Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3 : 534.1

ВИБРАЦИЯ ШТАМПА, ЧАСТИЧНО СЦЕПЛЕННОГО С УПРУГОЙ СРЕДОЙ

В. А. Бабешко, А. Н. Румянцев

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о вибрации штампа произвольной в плане формы, занимающего область Ω, гармонически колеблющегося на упругой среде с плоской границей. Предполагается, что упругая среда представляет собой пакет слоев с параллельными границами, покоящийся на жестком или упругом полупространстве. Под штампом осуществляется контакт трех типов: в области Ω_1 — жесткое сцепление, в области Ω_2 — контакт без трения, касательные контактные напряжения отсутствуют, в области Ω_3 — «пленочный» контакт без нормального усилия (нормальные контактные напряжения отсутствуют, присутствуют лишь касательные напряжения). Предполагается, что границы всех областей имеют дважды непрерывно дифференцируемую кривизну и $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.

Рассматриваемая задача предполагает наличие статической нагрузки, прижимающей штамп к слою и препятствующей образованию зон отрыва. Кроме того, на штамп воздействует динамическая гармоническая во времени нагрузка, вызывающая динамические напряжения, которые представляют наибольший интерес, поскольку решение статической задачи получается как частный случай динамической при $\omega = 0$ (ω — частота колебаний). Общее решение строится в виде суммы статического и динамического решений.

Устанавливается теорема единственности для интегрального уравнения указанной задачи, а для случая осесимметричного колебания круглого штампа, частично жестко сцепленного со слоем, частично контактирующего без трения, задача сведена к эффективно решаемой системе интегральных уравнений второго рода, легко сводящихся к фредгольмовым.

Данные результаты являются обобщением метода, изложенного в работе [1], причем для их получения пришлось качественно изменить подход работы [1].

1. Система интегральных уравнений описанной выше задачи имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{3} \iint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_{3-[n/3]}} k_{mn}(x-\xi, y-\eta)\, q_n(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = f_m(x,y) \tag{1.1}$$

$$m = 1, 2, 3$$

$$k_{mn}(\xi,\eta) = \int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} K_{mn}(\alpha,\beta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)} d\alpha\, d\beta, \quad (x,y) \in \Omega_1 \cup \Omega_{3-[m/3]}$$

Здесь q_1, q_2 — касательные контактные напряжения с носителем в $\Omega_1 \cup \Omega_3$, спроектированные соответственно на Ox и Oy, q_3 — нормальное контактное напряжение с носителем в $\Omega_1 \cup \Omega_2$; f_1, f_2 — амплитудные значения смещения точек под штампом в направлении осей Ox и Oy соответственно, заданные в $\Omega_1 \cup \Omega_3$, f_3 — аналогичное нормальное смещение, заданное в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Элементы матрицы $\mathbf{K}(\alpha, \beta)$ даются соотношениями

$$K_{11}(\alpha, \beta) = \alpha^2 M(u) + \beta^2 N(u), \quad K_{22}(\alpha, \beta) = \beta^2 M(u) + \alpha^2 N(u)$$
$$K_{12}(\alpha, \beta) = K_{21}(\alpha, \beta) = [M(u) - N(u)]\alpha\beta$$
$$i\alpha^{-1}K_{13}(\alpha, \beta) = -i\alpha^{-1}K_{31}(\alpha, \beta) = i\beta^{-1}K_{23}(\alpha, \beta) =$$
$$= -i\beta^{-1}K_{32}(\alpha, \beta) = P(u)$$
$$K_{33}(\alpha, \beta) = R(u), \quad u = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Функции M, N, P, R — четные по u. Их вид определяется типом среды, с которой контактирует штамп. В частности, если среда является упругим слоем, жестко сцепленным с недеформируемым основанием, имеют место следующие соотношения:

$$M(u) = {}^1/_2\varkappa_2^2 u^{-2}(\sigma_2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1 - \sigma_1^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2)\Delta^{-1}(u)$$
$$N(u) = 2u^{-2}\sigma_2^{-1} \operatorname{th} 2\sigma_2$$
$$P(u) = \{(2u^2 - {}^1/_2\varkappa_2^2)(1 - \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2) + \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \times$$
$$\times [2u^4 - (\varkappa_1^2 + {}^3/_2\varkappa_2^2) + \varkappa_1^2\varkappa_2^2]\}\Delta^{-1}$$
$$R(u) = {}^1/_2\varkappa_2^2(\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 - u^2\sigma_2^{-1} \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1)\Delta^{-1}(u)$$
$$\Delta(u) = u^2(2u^2 - \varkappa_2^2) - \left(2u^4 - u^2\varkappa_2^2 + \frac{1}{4}\varkappa_2^2\right) \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 +$$
$$+ \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}u^2[2u^4 - u^2(2\varkappa_2^2 + \varkappa_1^2) + \varkappa_1^2\varkappa_2^2 + {}^1/_4\varkappa_2^4] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2$$
$$\varkappa_1^2 = \omega^2\rho h^2(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \varkappa_2^2 = \omega^2\rho h^2\mu^{-1}, \quad \sigma_k = (u^2 - \varkappa_k^2)^{1/2}$$

Здесь λ, μ — модули упругости, ρ — плотность материала, ω — частота колебаний штампа, h — полутолщина слоя.

Контуры Γ_1, Γ_2 в (1.1) располагаются в соответствии с правилами, установленными в [2].

Для системы интегральных уравнений (1.1) справедлива теорема единственности, аналогичная установленной в работе [1].

Обозначим через $\pm\zeta_r$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$ полюсы функций $M(u)$, $P(u)$, $R(u)$, через $\pm\eta_s$ $(s = 1, 2, \ldots, q)$ полюсы функции $N(u)$.

Теорема 1. Пусть область Ω выпуклая. Тогда система интегральных уравнений (1.1) не может иметь в L_α, $\alpha > 1$ более одного решения, если $M(u)$, $N(u)$, $P(u)$, $R(u)$ обладают свойствами:

1°. $[M^{-1}(\zeta_r)]' > 0$, $[N^{-1}(\eta_s)]' > 0$, $r = 1, 2, \ldots, p$; $s = 1, 2, \ldots, q$

2°. $[R^{-1}(\zeta_r)]'[M^{-1}(\zeta_r)]' - \{[P^{-1}(\zeta_r)]'\}^2 > 0$, $r = 1, 2, \ldots, p$

3°. Существует матрица $\Pi(u)$ с элементами $\Pi_{mn}(u)$, являющимися рациональными функциями, ограниченными на бесконечности, с полюсами в точках $\pm\zeta_r$, $\pm\eta_s$, такая, что при любом u $(-\infty < u < \infty)$ вещественная эрмитова компонента матрицы $\mathbf{K}(u)\Pi^{-1}(u)$ положительно-определенная.

Достаточно громоздкое доказательство этой теоремы опущено, поскольку оно в значительной степени повторяет прием доказательства теоремы 1 работы [1]. Метод доказательства аналогичных теорем изложен в [1, 2].

2. Рассмотрим частный случай системы уравнений (1.1), именно: будем считать, что Ω — круг радиуса a_2, область Ω_2 — круг радиуса a_1, область Ω_1 — кольцо внутреннего и внешнего радиусов соответственно a_1 и a_2.

Система интегральных уравнений в этом случае упрощается и принимает вид

$$\int_{a_1}^{a_2} r_{k1}(r,\rho)\, q_1(\rho)\,\rho d\rho + \int_0^{a_2} r_{k2}(r,\rho)\, q_2(\rho)\,\rho d\rho = f_k(r), \quad k=1,2 \tag{2.1}$$

$$r_{mn}(r,\rho) = \int_\gamma K_{mn}(u)\, J_{2-m}(ur)\, J_{2-n}(u\rho)\, u du$$

$$r \in [a_1, a_2], \quad k=1; \quad r\in[0, a_2], \quad k=2$$

В отличие от подхода работы [1] в данном случае не удается применить метод левосторонней регуляризации, основанный на использовании аналитических свойств преобразований Фурье. Поэтому в данной работе дается обобщение метода правосторонней регуляризации системы интегральных уравнений, которая в простейшем варианте использована в работе [3].

В соответствии с этим подходом установим общий вид решения системы интегральных уравнений. С этой целью продолжим правые части системы интегральных уравнений вне областей задания. Обозначим продолжение функции $f_1(r)$ в область $r < a_1$ через $\varphi(r)$, продолжения в область $r > a_2$ функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ — соответственно через $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие факторизации:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_-\mathbf{K}_+, \quad K_{22} = K_{22}^+ K_{22}^-$$

Применив теперь к интегральным уравнениям соответствующие преобразования Бесселя на оси, найдем общее представление решения системы интегральных уравнений в следующем виде:

$$\mathbf{q}(r) = \int_\gamma \mathbf{J}(ur)\,\mathbf{K}^{-1}(u)\,\mathbf{F}(u)\, u du + \frac{1}{2}\int_\Gamma \mathbf{H}(ur)\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Z}_1(u)\, u du + \tag{2.2}$$

$$+ \int_\Gamma \mathbf{J}(ur)\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Z}_2(u)\, u du, \quad r\in[a_1,a_2]$$

$$q_2(r) = \int_\gamma \frac{J_0(ur)\,F_2(u)}{K_{22}(u)}\, u du + \int_\Gamma \frac{J_0(ur)\,Z_5(u)}{K_{22}^+(u)}\, u du, \quad r\in[0,a_1]$$

Здесь $\mathbf{J}(ur)$ и $\mathbf{H}(ur)$ — диагональные матрицы с диагональными элементами $J_1(ur)$, $J_0(ur)$ и $H_1^{(2)}(ur)$, $H_0^{(2)}(ur)$ соответственно. Контур γ является частью контура Γ, лежащей в правой полуплоскости. Кроме того, приняты обозначения

$$\mathbf{F}(u) = \left\{\int_{a_1}^{a_2} f_1(\rho)\, J_1(u\rho)\,\rho d\rho, \quad \int_0^{a_2} f_2(\rho)\, J_0(u\rho)\,\rho d\rho\right\} = \{F_1, F_2\}$$

$$\mathbf{Z}_1(u) = \{Z_1(u),\ Z_2(u)\}, \quad \mathbf{Z}_2(u) = \{Z_3(u),\ Z_4(u)\}$$

$$\mathbf{q}(r) = \{q_1(r),\ q_2(r)\}$$

В последнем представлении функции $Z_k(u)$ нуждаются в определении. Для их определения внесем $q_k(r)$ в левую часть системы интегральных уравнений и произведем интегрирование. Предварительно для каждого ядра системы интегральных уравнений используем представление вида

$$r_{mn}(r,\rho)=\int_\Gamma K_{mn}(t)\begin{Bmatrix}H^{(2)}_{2-m}(tr)\,J_{2-n}(t\rho), & r>\rho\\ H^{(2)}_{2-n}(t\rho)\,J_{2-m}(tr), & r<\rho\end{Bmatrix}tdt \tag{2.3}$$

Несложные преобразования приводят полученные соотношения для определения неизвестных $Z_k(u)$ к следующей системе интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma \Theta_1(u,t,a_2)\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Z}_2(u)\,udu=\\&=-\int_\gamma \Theta_1(u,t,a_2)\,\mathbf{K}^{-1}(u)\,\mathbf{F}(u)\,udu-\frac{1}{2}\int_\Gamma \Theta_2(u,t,a_2)\times\\&\times \mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Z}_1(u)\,udu\\&\frac{1}{2}\int_\Gamma \Theta_3(u,t,a_1)\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Z}_1(u)\,udu=-\int_\gamma \Theta_4(u,t,a_1)\times\\&\times \mathbf{K}^{-1}(u)\,\mathbf{F}(u)\,udu-\int_\Gamma \Theta_4(u,t,a_1)\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Z}_2(u)\,udu\\&\int_\Gamma \frac{Z_5(u)\,\Theta_5(u,t,a_1)}{K_{22}^{+}(u)}\,udu=-\int_\gamma \frac{F_2(u)\,\Theta_5(u,t,a_1)}{K_{22}(u)}\,udu\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\Theta_k(u,t,a)$ — диагональные матрицы второго порядка, первыми диагональными элементами которых являются соответственно функции

$$\begin{aligned}&\frac{uH_1^{(2)}(ta)\,J_0(ua)-tH_0^{(2)}(ta)\,J_1(ua)}{t^2-u^2},\quad \frac{uH_1^{(2)}(ta)\,H_0^{(2)}-tH_0^{(2)}(ta)\,H_1^{2}(ua)}{t^2-u^2}\\&\frac{uJ_1(ta)\,H_0^{(2)}(ua)-tJ_0(ta)\,H_1^{(2)}(ua)}{t^2-u^2},\quad \frac{uJ_1(ta)\,J_0(ua)-tJ_0(ta)\,J_1(ua)}{t^2-u^2}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Вторые диагональные элементы могут быть получены из первых при взаимной замене множителей u и t, стоящих при первом и втором слагаемом числителя в (2.5). Кроме того, обозначено

$$\Theta_5(u,t,a_1)=\frac{tH_1^{(2)}(ta_1)\,J_0(ua_1)-uJ_1(ua_1)\,H_0^{(2)}(ta_1)}{t^2-u^2}$$

Изучим поведение ядер полученных интегральных уравнений при больших значениях параметров t и u. Несложный анализ, основанный на применении асимптотических формул для бесселевых функций, позволяет выявить следующие асимптотические соотношения:

$$\Theta_1(u,t,a_2)\sim\frac{i\exp[-ia_2(t-u)]}{\pi a_2\sqrt{tu}}\frac{\mathbf{E}}{t-u}$$

$$\Theta_2(u,t,a_2)\sim\frac{2\exp[-ia_2(t+u)]}{\pi a_2\sqrt{tu}}\frac{\mathbf{I}}{t+u}$$

$$\Theta_3(u,t,a_1)\sim\frac{-i\exp ia_1(t-u)}{\pi a_1\sqrt{tu}}\frac{\mathbf{E}}{t-u}$$

$$\Theta_4(u, t, a_1) \sim \frac{\exp ia_1(t+u)}{2\pi a_1 \sqrt{tu}} \frac{\mathrm{I}}{t+u}$$

$$\Theta_5(u, t, a_1) \sim \frac{i \exp[-ia_1(t-u)]}{\pi a_1 \sqrt{tu}} \frac{1}{t-u}$$

$$|u| \to \infty, \quad |t| \to \infty, \quad \operatorname{Im} u < 0, \quad \operatorname{Im} t < 0$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $\mathbf{I}$ — диагональная матрица с элементами, равными 1 и —1.

Введем нормирующие функции $\varkappa_1(x, a)$ и $\varkappa_2(x, a)$, обладающие при $|x| \to \infty$, $\operatorname{Im} x < 0$ асимптотическим поведением

$$i\varkappa_1(x, a) \sim b\pi \sqrt{ax}\, e^{iax}, \quad \varkappa_2(x, a) \sim b^{-1} \sqrt{ax}\, e^{-iax}; \quad a, b = \mathrm{const}$$

В частности, в качестве этих нормирующих функций можно принять следующие:

$$\varkappa_1(x, a) = \frac{\sqrt{a}}{iH_0^{(2)}(ax)}, \quad \varkappa_2(x, a) = \pi x \sqrt{a}\, H_0^{(2)}(ax)$$

Умножим первое уравнение системы (2.4) на $\mathbf{K}_+(t)\varkappa_1(t, a_2)$, второе — на $-\mathbf{K}_+(t)\varkappa_2(t, a_1)$, а третье — на $K_{22}^+(t)\varkappa_1(t, a_1)$, предварительно введя новые неизвестные по формулам

$$\mathbf{Z}_\mathrm{I}^*(u) = \varkappa_\mathrm{I}^{-1}(u, a_\mathrm{I}) u \mathbf{Z}_\mathrm{I}(u), \quad \mathbf{Z}_2^*(u) = \varkappa_2^{-1}(u, a_2) u \mathbf{Z}_2(u)$$

$$Z_5^*(u) = \varkappa_2^{-1}(u, a_1) u Z_5(u)$$

После этого спроектируем полученные соотношения на область выше контура Г.

При больших значениях параметров u, t ядра интегральных уравнений вырождаются в бисингулярные интегралы. Используем свойства этих интегралов, связанные с возможностью их обращения, а именно: прибавим к левой части получающиеся предельные бисингулярные интегралы и вычтем их. В результате указанных преобразований и использования свойств бисингулярных интегралов приходим к системе интегральных уравнений второго рода, первое из которых имеет вид

$$\mathbf{X}^+(z) + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_+} \int\limits_{\Gamma} \mathbf{K}_+(t) \mathbf{M}_\mathrm{I}(t, u, a_2) \mathbf{K}_+^{-1}(u) \mathbf{X}^+(u) \frac{du dt}{(t-z)(t^2-u^2)} = \tag{2.6}$$

$$= - \int\limits_{\Gamma_+} \int\limits_{\gamma} \mathbf{K}_+(t) \mathbf{\Theta}_\mathrm{I}(u, t, a_2) \mathbf{K}^{-1}(u) \varkappa_\mathrm{I}(t, a_2) \mathbf{F}(u) u \frac{du dt}{t-z} -$$

$$- \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\Gamma_+} \int\limits_{\Gamma} \mathbf{K}_+(t) \mathbf{\Theta}_2(u, t, a_2) \mathbf{K}_+^{-1}(u)\, \mathbf{Y}^+(u) \varkappa_\mathrm{I}(t, a_2) \varkappa_\mathrm{I}(u, a_\mathrm{I}) \frac{du dt}{t-z}$$

Остальные уравнения относительно неизвестных $\mathbf{Y}^+(z)$ и $Z^+(z)$ записываются аналогично (2.6).

Контур Γ_+ расположен выше контура Г, z лежит выше Γ_+. Функции $\mathbf{X}^+(z)$, $\mathbf{Y}^+(z)$, $Z^+(z)$, регулярные в области выше Г, связаны с неизвестными $\mathbf{Z}_1^*(z)$, $\mathbf{Z}_2^*(z)$, $Z_5^*(z)$ следующими соотношениями:

$$\mathbf{Z}_\mathrm{I}^*(z) = \frac{1}{4\pi^2} \mathbf{Y}^+(z) + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{K}_+(z) \mathbf{R}_\mathrm{I}^-(z)$$

$$\mathbf{Z}_2^*(z) = \frac{1}{4\pi^2}\mathbf{X}^+(z) + \frac{1}{2\pi i}\mathbf{K}_+(z)\,\mathbf{R}_2^-(z)$$

$$Z_5^*(z) = \frac{1}{4\pi^2}Z^+(z) + \frac{1}{2\pi i}K_{22}^+(z)\,R_3^-(z)$$

где $\mathbf{R}_1^-(z)$, $\mathbf{R}_2^-(z)$, $R_3^-(z)$ регулярны в нижней полуплоскости. Функция $\mathbf{M}_1(t, u, a_2)$, входящая в состав ядра интегрального уравнения (2.6), имеет вид

$$\mathbf{M}_1(t, u, a_2) = \mathbf{\Theta}_1(u, t, a_2)\,\varkappa_1(t, a_2)\,\varkappa_2(u, a_2)\,(t^2 - u^2) - (t + u)\,\mathbf{E}$$

Интегральные операторы системы (2.6) не являются вполне непрерывными в банаховом пространстве $c(1)$; здесь $c(\lambda)$ — пространство функций, непрерывных с весом z^λ на контуре Г. Однако можно сделать преобразования, аналогичные использованным в работе [3], которые приводят указанные операторы к фредгольмовым. Для практических целей решения указанной системы уравнений нет надобности осуществлять указанные преобразования, поскольку при решении наиболее удобна выписанная форма.

С целью приближенного решения системы интегральных уравнений (2.6) контуры Γ_+, Г в представлении ядер необходимо деформировать в нижнюю полуплоскость. В результате интеграл по деформированным контурам оказывается мал, им можно пренебречь, а система интегральных уравнений сводится к системе алгебраических уравнений [4].

Для определения контактных напряжений получим следующие соотношения:

$$\mathbf{q}(r) = \int_\gamma \mathbf{J}(ur)\,\mathbf{K}^{-1}(u)\,\mathbf{F}(u)\,u\,du + \frac{1}{8\pi^2}\int_\Gamma \varkappa_1(u, a_1)\,\mathbf{H}(ur) \times \tag{2.7}$$

$$\times\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Y}^+(u)\,du + \frac{1}{8\pi^2}\int_\Gamma \varkappa_2(u, a_2)\,\mathbf{J}(ur)\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{X}^+(u)\,du$$

$$a_1 \leqslant r \leqslant a_2$$

$$q_2(r) = \int_\gamma \frac{F_2(u)\,J_0(ur)\,u\,du}{K_{22}(u)} + \frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma \frac{\varkappa_2(u, a_1)\,J_0(ur)\,Z^+(u)}{K_{22}^+(u)}\,du$$

$$0 \leqslant r \leqslant a_1$$

Видно, что нахождение решения системы интегральных уравнений второго рода (2.6) полностью решает задачу отыскания контактных напряжений.

3. Изучим свойства решений системы интегральных уравнений.

Теорема 2. Система интегральных уравнений второго рода (2.6) однозначно разрешима в пространстве функций $c(1)$, если система интегральных уравнений (1.1) имеет единственное решение в L_α, $\alpha > 1$.

Доказательство теоремы основано на эквивалентности системы интегральных уравнений (1.1) системе интегральных уравнений с вполне непрерывным оператором, получающейся из системы интегральных уравнений второго рода (2.6). Единственность решения фредгольмовой системы интегральных уравнений обеспечивает ее разрешимость.

На основании этой теоремы устанавливается общий вид решений системы второго рода (2.6), именно: справедливы асимптотические формулы

$$\mathbf{X}^+(z) \sim \mathbf{c}_1 z^{-1}, \quad \mathbf{Y}^+(z) \sim \mathbf{c}_2 z^{-1}, \quad Z^+(z) \sim c_3 z^{-1}, \quad |z| \to \infty$$

Здесь $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ — постоянные векторы, c_3 — константа.

Пользуясь этими свойствами, с помощью соотношений (2.7) устанавливаем следующие свойства функций $q_k(r)$ (ν — коэффициент Пуассона материала слоя):

$$q_1(r)(r-a_1)^{1/2}(a_2-r)^{1/2+i\varepsilon} \in C(a_1, a_2)$$
$$q_2(r)\,|r-a_1|^{1/2}(a_2-r)^{1/2+i\varepsilon} \in C(0, a_2)$$
$$\varepsilon = \frac{1}{\pi}\operatorname{arth}\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Для приближенного вычисления напряжений во внутренних точках областей Ω_i можно использовать деформацию контуров в (2.7). Вычисляя вычеты подынтегральных функций в полюсах, пересекаемых деформируемыми контурами, и пренебрегая малыми интегральными членами, получим следующее представление для решения:

$$\mathbf{q}(r) \approx \mathbf{f}\left\{\mathbf{J}(\eta r)\mathbf{K}^{-1}(\eta) - \frac{i}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\varkappa_1(-p_k, a_1)\,\mathbf{H}(-p_k r)\times\right. \tag{3.1}$$
$$\times \operatorname*{Res}_{u=-p_k}\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Y}^+(-p_k) - \frac{i}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\varkappa_2(-p_k, a_2)\,\mathbf{J}(-p_k r)\times$$
$$\left.\times \operatorname*{Res}_{u=-p_k}\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{X}^+(-p_k)\right\}, \quad a_1 < r < a_2$$
$$q_2(r) = f_2\left\{\frac{J_0(\eta r)}{K_{22}(\eta)} - \frac{i}{2\pi}\sum_{s=1}^{m}\varkappa_1(-z_s, a_1)\,J_0(-z_s r)\frac{Z^+(-z_s)}{[K_{22}^+(-z_s)]'}\right\}$$
$$0 \leqslant r < a_1$$

Здесь $-p_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $-z_s$ ($s = 1, 2, \ldots, m$) — соответственно нули $\det\mathbf{K}(z)$ и $K_{22}(z)$ в нижней полуплоскости. Кроме того, при получении выражений (3.1) без ограничения общности было положено в качестве правых частей уравнений (2.1)

$$f_1(r) = f_1 J_1(\eta r), \quad f_2(r) = f_2 J_0(\eta r), \qquad \mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$$
$$\eta,\ f_i = \text{const}$$

Для изучения поведения поверхности вне штампа и в области Ω_2 необходимо найденные значения $q_k(r)$ внести в систему интегральных уравнений (2.1) и вычислить значение правых частей вне области контакта и значение правой части первого уравнения в области Ω_2. В результате для поведения поверхности получается представление следующего вида ($\Gamma_- < \Gamma$):

$$\psi(r) = \frac{1}{2}\int_{\gamma}\int_{\Gamma_-} u\mathbf{H}(ur)\,\mathbf{K}(u)\left[\mathbf{D}_4(u,t)\,\mathbf{K}^{-1}(t)\,\mathbf{F}(t)\,t + 2\mathbf{c}\frac{F_2(t)\,t}{K_{22}^+(t)}\times\right. \tag{3.2}$$
$$\left.\times D_3(u,t)\right]du\,dt + \frac{1}{16\pi^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma_-} u\mathbf{H}(ur)\,\mathbf{K}(u)\left[\mathbf{D}_1(u,t)\,\mathbf{K}_+^{-1}(t)\,\mathbf{Y}^+(t)\times\right.$$
$$\times\varkappa_1(t, a_1) + \mathbf{D}_4(u,t)\,\mathbf{K}_+^{-1}(t)\,\mathbf{X}^+(t)\,\varkappa_2(t, a_2) + 2\mathbf{c}\frac{Z^+(t)}{K_{22}^+(t)}\times$$
$$\left.\times\varkappa_2(t, a_1)\,D_3(u,t)\right]du\,dt \qquad r > a_2$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(r) &= \frac{\mathbf{a}}{2}\int\limits_{\gamma}\int\limits_{\Gamma_-} t\mathbf{J}(tr)\,\mathbf{K}(t)\,\mathbf{D}_1(u,t)\,\mathbf{K}^{-1}(u)\,\mathbf{F}(u)\,u\,dt\,du + \\
&+ \frac{\mathbf{a}}{16\pi^2}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma_-} t\mathbf{J}(tr)\,\mathbf{K}(t)\,[\mathbf{D}_2(u,t)\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{Y}^+(u)\,\varkappa_1(u,a_1) + \\
&+ \mathbf{D}_1(u,t)\,\mathbf{K}_+^{-1}(u)\,\mathbf{X}^+(u)\,\varkappa_2(u,a_2)]\,dt\,du + \\
&+ \int\limits_{\gamma}\frac{F_2(u)\,uJ_1(ur)}{K_{22}(u)}\left[K_{12}(u) + \frac{a_1}{2}\int\limits_{\Gamma_-} tK_{12}(t)\,\Theta_5(u,t,a_1)\,dt\right]du + \\
&+ \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_-}\frac{\varkappa_2(u,a_2)\,Z^+(u)\,J_1(ur)}{K_{22}^+(u)}\times \\
&\times\left[K_{12}(u) + \frac{a_1}{2}\int\limits_{\Gamma_-} tK_{12}(t)\,\Theta_5(u,t,a_1)\,dt\right]du \qquad 0 \leqslant r < a_1
\end{aligned}
$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{a} = \{1, 0\},\ \mathbf{c} = \{0, 1\},\ \boldsymbol{\psi}(r) = \{\psi_1(r),\ \psi_2(r)\}$$

$$\mathbf{D}_k(u, t) = a_2\boldsymbol{\Theta}_k(u, t, a_2) - a_1\boldsymbol{\Theta}_k(u, t, a_1),\ k = 1, 2, 4$$

$$D_3(u,t) = \frac{a_1}{t^2 - u^2}[tJ_1(ta_1)\,J_0(ua_1) - uJ_0(ta_1)\,J_1'(ua_1)]$$

Приведем теорему, позволяющую оценить погрешность приближенного решения (3.1), (3.2) задачи (2.1). Доказательство ее, проводимое с использованием метода возмущений, ради краткости опущено.

Теорема 3. Пусть система (2.1) с матрицей-ядром $\mathbf{K}(u)$ имеет решение $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$, а с матрицей $\mathbf{K}^*(u)$ — решение $\mathbf{q}^* = \{q_1^*, q_2^*\}$. Тогда, если в условиях теоремы 1 элементы $K_{ij}(u)$ и $K_{ij}^*(u)$ матриц $\mathbf{K}(u)$ и $\mathbf{K}^*(u)$ удовлетворяют условиям

$$|K_{ij}(u) - K_{ij}^*(u)|\,|K_{ij}(u)|^{-1}(1 + |u|)^\alpha < \varepsilon, \quad \alpha > {}^1/_2$$

то при достаточно малом ε справедливо неравенство

$$\left|[q_k(r) - q_k^*(r)]\sqrt{|r - a_1|\,|r - a_2|}\right| < t\varepsilon$$

где t не зависит от q_k и ε.

Рассмотренные задачи могут быть использованы как модель для исследования характера контакта фундаментов с грунтом, а также для дефектоскопии клеевых соединений. Именно, имея набор решений задачи при различных условиях контакта, можно из условия наилучшего совпадения экспериментальных и теоретических данных прогнозировать наличие областей неполного сцепления.

Поступила 21 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А., Румянцев А. Н.* Колебания штампа, частью поверхности сцепленного с упругим слоем. ПММ, 1977, т. 41, вып. 4.
2. *Бабешко В. А.* О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
3. *Бабешко В. А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.
4. *Бабешко В. А., Ворович И. И., Селезнев М. Г.* Вибрация штампа на двуслойном основании. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.