Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Л. М. Филиппова

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается полупространство из несжимаемого неогуковского [1,2] материала, подвергнутое однородному двухосному растяжению или сжатию вдоль границы. На эту конечную деформацию накладывается малая деформация, вызванная воздействием жесткого гладкого штампа на границу полупространства. Получено интегральное уравнение для контактного давления. Для наклонного эллиптического штампа с плоским основанием и неплоского эллиптического штампа найдено решение этого уравнения в случаях, когда коэффициенты растяжения в двух направлениях одинаковы и когда они мало отличаются один от другого. Проанализировано влияние начального нагружения на распределение контактного давления, перемещение штампа и форму зоны контакта.

1. На основании соотношений теории малых деформаций упругого тела, наложенных на конечную деформацию [2], получим следующие уравнения, описывающие деформацию предварительно нагруженного неогуковского тела:

$$G\left(\lambda_1^2\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2}+\lambda_2^2\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial y^2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2}\right)+2\operatorname{grad}p=0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\quad \mathbf{u}=(u,v,w)$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты в начальном деформированном состоянии, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения, p — функция давления, появление которой в уравнениях (1.1) обусловлено несжимаемостью материала, λ_1, λ_2 — коэффициенты предварительного растяжения в направлениях x, y, G — постоянная материала, имеющая при малых деформациях смысл модуля сдвига.

Уравнения (1.1) получены в предположении, что в начальном напряженном состоянии напряжение $\sigma_z=0$. Два других напряжения выражаются через коэффициенты растяжения формулами

$$\sigma_x=G(\lambda_1^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}),\quad \sigma_y=G(\lambda_2^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2})$$

Краевые условия на границе полупространства $z=0$ в задаче о внедрении жесткого гладкого штампа таковы:

в области, свободной от контакта

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad p+G\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1.2}$$

в области контакта S

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad w=\delta-\theta_2 x+\theta_1 y-\varphi(x,y) \tag{1.3}$$

Здесь δ — смещение штампа, θ_1, θ_2 — косинусы углов наклона штампа [2], $\varphi(x, y)$ — квадратичная функция, задающая форму поверхности штампа.

Предварительно рассмотрим задачу о действии на границу полупространства единичной сосредоточенной нормальной силы, приложенной в начале координат. Применив к (1.1) двумерное преобразование Фурье

$$\bar{f}(\alpha,\beta,z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\exp\left[-i(\alpha x+\beta y)\right]dx\,dy$$

найдем изображение нормального перемещения в точках границы

$$\bar{w}(\alpha,\beta,0)=\frac{\mu\lambda_1^2\lambda_2^2(\mu^2-\lambda_1^2\lambda_2^2\nu^2)}{G\left[\mu^2-\lambda_1^4\lambda_2^4\nu^4-2\mu^2(\mu-\lambda_1\lambda_2\nu)^2\right]}\equiv W(\alpha,\beta) \tag{1.4}$$

$$\mu=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad \nu=\sqrt{\lambda_1^2\alpha^2+\lambda_2^2\beta^2}$$

Из (1.3), (1.4) следует интегральное уравнение для контактного давления $q(x, y)$

$$\begin{aligned}\delta-\theta_2 x+\theta_1 y-\varphi(x,y)&=\\ =\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_S q(\xi,\eta)\iint\limits_{-\infty}^{\infty} W(\alpha,\beta)\exp\{i\,[\alpha(x-\xi)&+\\ +\beta(y-\eta)]\}\,d\alpha\,d\beta\,d\xi\,d\eta\end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Рассмотрим сначала случай, когда предварительное растяжение или сжатие одинаково в обоих направлениях ($\lambda_1=\lambda_2=\lambda$). Из (1.4) получим

$$\bar{w}(\alpha,\beta,0)=\frac{N(\lambda)}{2G\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad w(x,y,0)=\frac{N(\lambda)}{4\pi G\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2.1}$$

$$N(\lambda)=\frac{2\lambda^4(1+\lambda^3)}{\lambda^9+\lambda^6+3\lambda^3-1}$$

Интегральное уравнение (1.5) принимает вид

$$\delta-\theta_2 x+\theta_1 y-\varphi(x,y)=\frac{1}{4\pi G}\iint\limits_S\frac{N(\lambda)\,q(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \tag{2.2}$$

Ядро уравнения (2.2) отличается от ядра классической контактной задачи [2-4] только постоянным множителем $N(\lambda)$. Так как $N(1)=1$, при отсутствии предварительной деформации уравнение (2.2) совпадает с классическим (в последнем следует положить коэффициент Пуассона равным $^1/_2$, поскольку материал несжимаем).

С помощью выражения (2.1) можно установить, что в промежутке $\lambda^*<\lambda<\infty$, где $\lambda^*\approx 0.667$, коэффициент $N(\lambda)$ монотонно убывает. При $\lambda\to\lambda^*$ $N(\lambda)$ неограниченно возрастает, т. е. при $\lambda\to\lambda^*$ сжатое полупространство теряет устойчивость. Поэтому значения коэффициента сжатия, меньшие критического λ^*, нереализуемы.

Решение интегрального уравнения (2.2) в случае эллиптического штампа с плоским наклонным основанием ($\varphi(x, y) = 0$) [2] показывает, что в случае прямого штампа ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) предварительное равномерное растяжение не влияет на распределение контактного давления, но сказывается на величине смещения штампа. Для наклонного штампа от величины начального растяжения зависит также характер распределения контактного давления. Аналогичные явления были обнаружены в плоской контактной задаче [5].

В случае неплоского эллиптического в плане штампа [2]:

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \varphi(x, y) = x^2 / (2R_1) + y^2 / (2R_2)$$

причем предполагается, что $R_1 \geqslant R_2$. Как и для эллиптического штампа с плоским наклонным основанием, решение уравнения (2.2) получается из решения, соответствующего ненапряженному полупространству [2]. Из этого решения следует, что начальная деформация не влияет на форму площадки соприкасания и характер распределения контактного давления. Вместе с тем размеры площадки контакта и смещение штампа зависят от предварительного нагружения, причем предварительное растяжение (сжатие) уменьшает (увеличивает) размер области контакта и величину перемещения штампа.

3. Предположим, что коэффициенты растяжения в двух направлениях мало отличаются один от другого. Положим

$$\lambda = {}^1/_2(\lambda_1 + \lambda_2), \quad \chi = {}^1/_2(\lambda_2 - \lambda_1) \tag{3.1}$$

и считая, что $|\chi| \ll 1$, упростим выражение (1.4), удержав только члены первого порядка относительно χ. Получим

$$\bar{w}(\alpha, \beta, 0) = \frac{1}{2G}\left[\frac{N(\lambda)}{(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}} + \chi L(\lambda)\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}\right] + O(\chi^2) \tag{3.2}$$

$$L(\lambda) = \frac{4\lambda^6(\lambda^9+2\lambda^6+\lambda^3+2)}{\lambda^9+\lambda^6+3\lambda^3-1}$$

В рассматриваемом промежутке $\lambda^* < \lambda < \infty$ коэффициент $L(\lambda)$ положителен.

Используя известную [6] формулу для преобразования Фурье функции вида $(x^2 + y^2)^{n/2}$, из (3.2) найдем $w(x, y, 0)$.

С точностью до членов порядка χ^2 интегральное уравнение для контактного давления принимает вид

$$\delta - \theta_2 x + \theta_1 y - \varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi G}\iint\limits_S q(\xi, \eta)\left[\frac{N(\lambda)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2}} + \right. \tag{3.3}$$

$$\left. + \chi L(\lambda)\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{3/2}}\right] d\xi\, d\eta$$

С помощью приемов, изложенных в работах [2-4,7], можно получить формулы, на которых основано решение уравнения (3.3), например

$$\iint\limits_S \frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r^3 R}\xi d\xi d\eta = \frac{2\pi a\sqrt{1-e^2}}{e^4} x\,[(4-e^2)\,\mathrm{E} - (4-3e^2)\,\mathrm{K}]x$$

$$\iint\limits_S \frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r^3R}\eta d\xi d\eta = \frac{2\pi a\sqrt{1-e^2}}{e^4} y\,[(1-e^2)(4-e^2)\,\mathrm{K} -$$
$$-(4-3e^2)\,\mathrm{E}]$$
$$\iint\limits_S \frac{R}{r^3}[(y-\eta)^2-(x-\xi)^2]\,d\xi d\eta = \frac{\pi a\sqrt{1-e^2}}{e^2}\Big\{[2\mathrm{E}-(2-e^2)\times$$
$$\times\,\mathrm{K}] - \frac{x^2}{a^2e^2}[(4-e^2)\,\mathrm{E}-(4-3e^2)\,\mathrm{K}] - \frac{y^2}{a^2e^2(1-e^2)}\times$$
$$\times\,[(1-e^2)(4-e^2)\,\mathrm{K}-(4-3e^2)\,\mathrm{E}]\Big\}$$
$$r = \{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{1/2}, \qquad R = \{1-\xi^2/a^2-\eta^2/[a^2(1-e^2)]\}^{1/2}$$

Интегрирование распространяется по эллиптической площадке, вытянутой вдоль оси x, с большой полуосью a и эксцентриситетом e. Для сокращения записи аргумент e у полных эллиптических интегралов E, K опущен.

Для плоского эллиптического штампа с наклонным основанием решение уравнения (3.3) ищется в виде

$$q(\xi,\eta) = (a_0+a_1\xi+a_2\eta)\{1-\xi^2/a^2-\eta^2/[a^2(1-e^2)]\}^{-1/2} \tag{3.4}$$

Используя условие уравновешенности штампа с внешней силой Q, с точностью до членов порядка χ^2 получаем

$$a_0 = \frac{Q}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}, \quad \delta = \frac{QN(\lambda)\,\mathrm{K}}{4\pi Ga}(1+\chi f_0) \tag{3.5}$$
$$a_1 = -\frac{2Ge^2\theta_2}{N(\lambda)\,a\sqrt{1-e^2}(\mathrm{K}-\mathrm{E})}(1-\chi f_1)$$
$$a_2 = \frac{2Ge^2\theta_1}{N(\lambda)\,a\sqrt{1-e^2}[\mathrm{E}-(1-e^2)\,\mathrm{K}]}(1-\chi f_2)$$

Здесь и далее

$$f_0 = \frac{L(\lambda)}{N(\lambda)}\frac{2\mathrm{E}-(2-e^2)\,\mathrm{K}}{e^2\mathrm{K}}, \quad f_1 = \frac{L(\lambda)}{N(\lambda)}\frac{(4-e^2)\,\mathrm{E}-(4-3e^2)\,\mathrm{K}}{e^2(\mathrm{K}-\mathrm{E})}$$
$$f_2 = \frac{L(\lambda)}{N(\lambda)}\frac{(1-e^2)(4-e^2)\,\mathrm{K}-(4-3e^2)\,\mathrm{E}}{e^2\mathrm{E}-e^2(1-e^2)\,\mathrm{K}}$$

Для неплоского эллиптического в плане штампа, у которого главные оси поверхности совпадают с осями x, y, решение уравнения (3.3), удовлетворяющее условию равновесия штампа, имеет вид

$$q(\xi,\eta) = \frac{3Q}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}\left[1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{a^2(1-e^2)}\right]^{1/2} \tag{3.6}$$

Подставив (3.6) в (3.3), придем к системе уравнений для определения постоянных e, a, δ

$$\delta = \frac{3QN(\lambda)\,\mathrm{K}}{8\pi Ga}(1+\chi f_0), \quad \frac{1}{2R_1} = \frac{3QN(\lambda)(\mathrm{K}-\mathrm{E})}{8\pi Ga^3e^2}(1+\chi f_1) \tag{3.7}$$
$$\frac{1}{2R_2} = \frac{3QN(\lambda)[\mathrm{E}-(1-e^2)\,\mathrm{K}]}{8\pi Ga^3e^2(1-e^2)}(1+\chi f_2)$$

Решение системы (3.7) следует искать в виде

$$e^2 = e_{(0)}^2+\chi e_{(1)}^2+\ldots, \qquad a = a_{(0)}+\chi a_{(1)}+\ldots \tag{3.8}$$
$$\delta = \delta_{(0)}+\chi\delta_{(1)}+\ldots$$

где нулевым индексом отмечено известное решение рассмотренной в п. 2 задачи для равномерного растянутого тела. Так как интегральное уравнение (3.3) справедливо лишь с точностью до членов порядка χ^2, в (3.8) достаточно вычислить только $e_{(1)}$, $a_{(1)}$, $\delta_{(1)}$.

В качестве примера приведем вычисление эксцентриситета площадки контакта для кругового в плане ($R_1 = R_2$) штампа. Разделим второе уравнение (3.7) на третье, подставим в полученное уравнение разложение (3.8), учтем, что $e_{(0)} = 0$, и, отбросив члены порядка χ^2 и выше, получим

$$e^2 = \frac{4}{3}\chi\frac{L(\lambda)}{N(\lambda)} \tag{3.9}$$

Правая часть (3.9) положительна в допустимом интервале $\lambda^* < \lambda < \infty$ при положительных χ. Это означает, что использованное выше предположение о том, что площадка контакта S вытянута вдоль оси x, справедливо при $\lambda_2 > \lambda_1$. Итак, площадка контакта при внедрении кругового в плане неплоского штампа ограничена эллипсом, вытянутым в направлении той оси, которая подвергнута меньшему растяжению.

Поступила 17 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ривлин Р. С.* Большие упругие деформации. В кн.: Реология. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
5. *Филиппова Л. М.* Плоская контактная задача для предварительно напряженного упругого тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
7. *Александров В. М., Соловьев А. С.* Некоторые пространственные смешанные задачи теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.