Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

О ДЕЙСТВИИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ШТАМПА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

В. А. Чурилов

(Москва)

Рассматривается действие движущегося с постоянной скоростью жесткого штампа на границу упругого полупространства. Предполагается, что силы трения между штампом и поверхностью полупространства отсутствуют. Из интегрального уравнения, полученного в [1], найдены формулы для давления в случае, когда область контакта штампа с полупространством эллиптическая.

1. Разложение ядра интегрального уравнения в степенной ряд. В работе [1] получено интегральное уравнение для нахождения давления под жестким штампом, движущимся с постоянной скоростью вдоль оси x, которое в системе координат x, y, z, связанной с движущимся штампом, имеет вид

$$w(x,y)=\iint\limits_{\Omega} K(x-\xi, y-\eta)\, q(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{1.1}$$

$$K(x-\xi, y-\eta)=\frac{k_2(1+r_1r_2^{-1}\sqrt{S_3})\, r_1r_2^{-1}\sqrt{S_3}}{2\pi\mu\,[4\gamma k_2^2r^2r_2^{-2}+(1-k_2^2r^2r_2^{-2})(1+r_1r_2^{-1}\sqrt{S_3})]\, r_2}$$

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,\quad r_1=\sqrt{k_1^2(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

$$r_2=\sqrt{k_2^2(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},\quad S_3=k_2^2k_1^{-2}$$

$$k_1^{-2}=1-c^2c_1^{-2},\quad k_2^{-2}=1-c^2c_2^{-2},\quad \gamma=(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$$

Здесь c_1, c_2 — скорости соответственно продольных и поперечных волн, возникающих при движении штампа со скоростью c.

Для решения разложим ядро в степенной ряд по переменной

$$\varkappa=(y-\eta)^2r^{-2}c^2c_2^{-2} \tag{1.2}$$

Используя последние четыре соотношения в (1.1), для ядра уравнения (1.1) имеем

$$K(x-\xi, y-\eta)=\frac{1}{2\pi\mu\, r}K^*(\varkappa) \tag{1.3}$$

$$K(\varkappa)=\frac{[1-\gamma+\gamma(1-\varkappa)^{-1}+B]\,(1-\varkappa)^{-1/2}}{[1+(1-\varkappa)^{-1}(4\gamma-1-B\varkappa)]}$$

$$B=[1-(1-\gamma)\,\varkappa]^{1/2}\,(1-\varkappa)^{-1/2}$$

Разлагая в (1.3) выражения вида $(1-\varkappa)^m$ в биномиальные ряды, получим следующее представление ядра уравнения (1.1):

$$(1.4)\qquad K(x-\xi, y-\eta)=\sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \frac{(y-\eta)^{2\alpha}}{r^{2\alpha+1}}$$

$$A_0=\frac{1}{4\pi\mu\gamma},\quad A_1=\frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{3}{2}\right)\frac{c^2}{c_2{}^2}$$

$$\alpha\geqslant 2,\quad A_\alpha=\frac{1}{8\pi\mu\gamma}\left\{[2\gamma\alpha-(1-\gamma)^\alpha-1]\frac{(2\alpha-3)!!}{(2\alpha)!!}+\right.$$

$$+\frac{4\pi\mu}{(c^2c_2^{-2})^{\alpha-1}}A_{\alpha-1}-2\pi\mu\sum_{i=0}^{\alpha-2}\sum_{\beta=0}^{i+1}\frac{A_{\alpha-i-2}}{(c^2c_2^{-2})^{\alpha-i-2}}(1-\gamma)^\beta\times$$

$$\left.\times\frac{(2\beta-3)!!}{(2\beta)!!}\,\frac{(2i-2\beta+1)!!}{(2i-2\beta+2)!!}\right\}\left(\frac{c^2}{c_2{}^2}\right)^\alpha$$

$$(\alpha=0,\ (-3)!!=(-1)!!=0!!=1)$$

Ряд (1.4) равномерно сходится к $K(x-\xi, y-\eta)$ при $c<c_3$, где c_3 — скорость поверхностных волн Рэлея, которая определяется из соотношения

$$(1.5)\qquad (2-c^2c_2^{-2})^4=16\,(1-c^2c_2^{-2})\,(1-c^2c_1^{-2})$$

полученного путем приравнивания знаменателя в формуле (1.3) нулю при условии $(y-\eta)^2r^{-2}=1$. Соотношение (1.5) известно также в сейсмологии (см., например, [2,3]).

Заметим, что по индукции для коэффициентов A_α ряда (1.4) может быть получена оценка

$$A_\alpha<N\left(\frac{B}{\gamma}\right)^\alpha\left(\frac{c^2}{c_2{}^2}\right)^\alpha,\quad N=\text{const},\quad \frac{1}{2(1-\gamma)}<B<\infty$$

здесь следует иметь в виду, что $1/2<\gamma<1$.

2. Вдавливание эллиптического в плане штампа в упругое полупространство. Если

$$(2.1)\qquad w(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}b_{ij}x^iy^j$$

$$(k+l=n,\ b_{ij}=\text{const})$$

то решение интегрального уравнения

$$(2.2)\qquad w(x,y)=\iint_\Omega q(\xi,\eta)\sum_{\alpha=0}^{\infty}A_\alpha\frac{(y-\eta)^{2\alpha}}{R^{2\alpha+1}}\,d\xi\,d\eta$$

для эллиптической области контакта Ω (с полуосями a, $в$) имеет вид

$$(2.3)\qquad q(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}a_{ij}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}$$

$$(k+l=n,\ a_{ij}=\text{const},\ R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2})$$

Предполагая единственность решения интегрального уравнения (2.2), дадим доказательство справедливости выражения (2.3) и одновременно получим способ определения связи между коэффициентами a_{ij} и b_{ij}.

Покажем, что интеграл $J(x, y)$, равный правой части в (2.2), есть полином степени n, если $q(\xi, \eta)$ имеет вид (2.3). Для этого воспользуемся методом, изложенным в [4,5].

Переходя к полярным координатам (фигура) $\xi = x + R\cos\varphi$, $\eta = y + R\sin\varphi$, из (2.2), (2.3) найдем

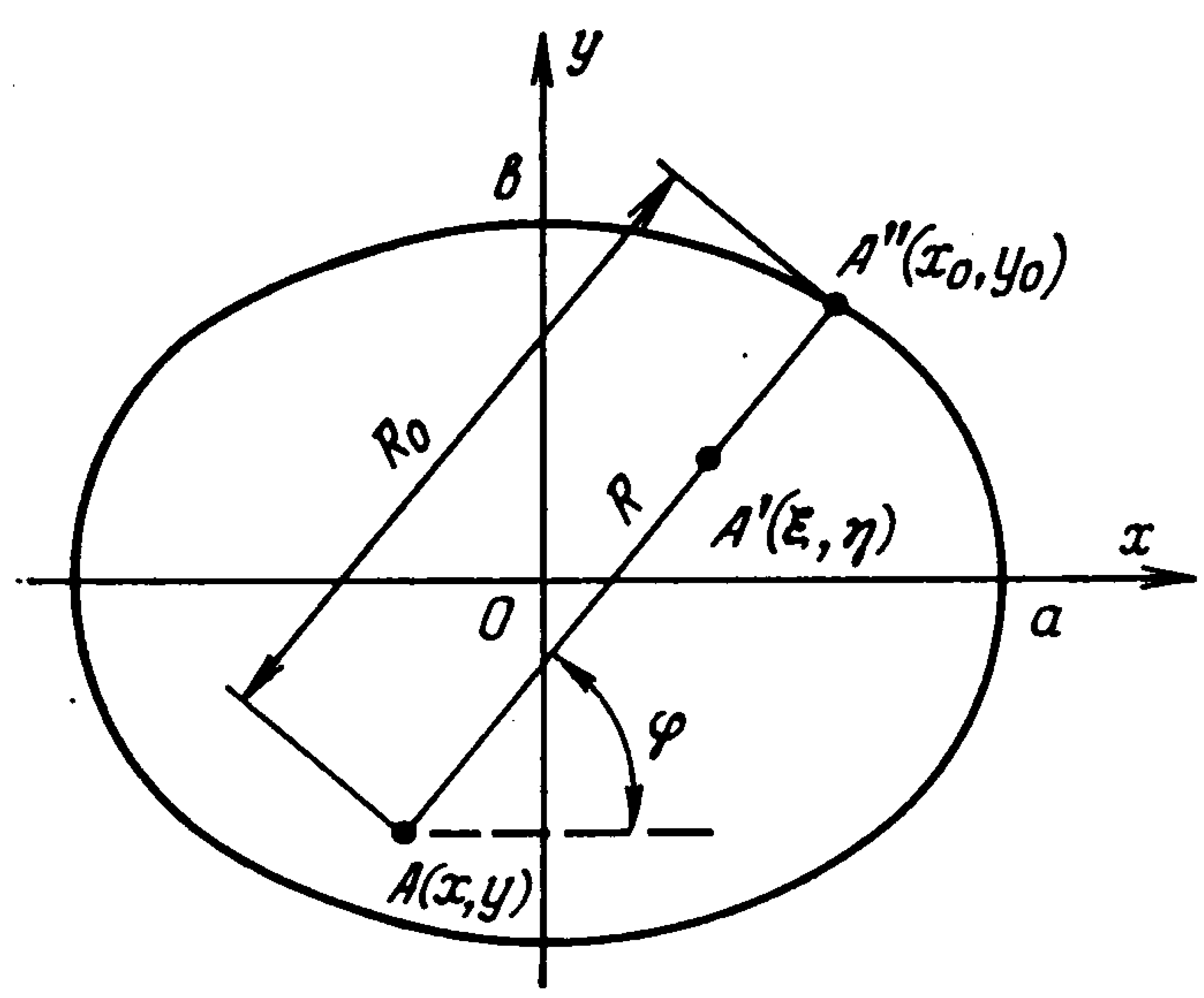
$$J(x,y) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{ij} \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} (x + R\cos\varphi)^i \times \tag{2.4}$$

$$\times (y + R\sin\varphi)^j \sin^{2\alpha}\varphi \left[N + \frac{M^2}{L}\right]^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{M + RL}{\sqrt{NL + M^2}}\right)^2\right]^{-1/2} dR$$

$L(\varphi) = a^{-2}\cos^2\varphi + b^{-2}\sin^2\varphi$, $M(\varphi) = a^{-2}x\cos\varphi + b^{-2} \times$
$\times\, y\sin\varphi$

$N = 1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2$

Рассмотрим точку A внутри эллипса и точку A'' на его границе. Пусть $R_0(\varphi)$ — расстояние между точками A и A''. Так как координаты точки A'' удовлетворяют соотношениям



$$x_0^2 / a^2 + y_0^2 / b^2 = 1 \tag{2.5}$$
$$x_0 = x + R_0\cos\varphi$$
$$y_0 = y + R_0\sin\varphi$$

расстояние R_0 определяется выражением

$$R_0(\varphi) = (-M(\varphi) + \sqrt{M^2(\varphi) - NL(\varphi)})/L(\varphi) \tag{2.6}$$

Здесь $N > 0$, так как $A(x, y)$ лежит внутри эллипса.

Так как $0 \leqslant R \leqslant R_0(\varphi)$, $L(\varphi) > 0$, то

$$-1 < \frac{M}{K} \leqslant \frac{M + RL}{K} \leqslant \frac{M + R_0 L}{K} = 1 \qquad (K = \sqrt{M^2 + NL})$$

Тогда при помощи замены переменной

$$\cos\theta = (M + RL) / K \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

соотношение (2.4) перепишем в виде

$$J(x,y) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{ij} \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} J_{ij}\, d\theta \tag{2.7}$$

$J_{ij}(\varphi, \theta) = (x + K\cos\varphi\cos\theta - L^{-1} M\cos\varphi)^i \times$
$\times\, (y + K\sin\varphi\cos\theta - L^{-1} M\sin\varphi)^j L^{-1/2} \sin^{2\alpha}\varphi$

Здесь $\theta(\varphi)$ — значение θ при $R = 0$. Учитывая следующее из (2.4), (2.7) соотношение

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\theta(\varphi)} J_{ij}(\varphi, \theta(\varphi))\, d\theta = \int_{0}^{\pi} d\psi \int_{0}^{\pi-\theta(\psi)} J_{ij}(\psi, \theta(\psi))\, d\psi$$

запишем выражение (2.7) в виде

$$J(x, y) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{ij} \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} J_{ij}(\varphi, \theta(\varphi))\, d\theta = \tag{2.8}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{ij} \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} J_{ij}(\varphi, \theta)\, d\theta$$

Интегрируя по θ, приведем (2.8) к следующей форме:

$$J(x, y) = 2 \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{ij} \sum_{r=0}^{i} \sum_{s=0}^{j} C_i^r C_j^s \times \tag{2.9}$$

$$\times B\left(\frac{r+s+1}{2}, \frac{1}{2}\right)(1-e^2)^{(r-s+2j+1)/2} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{(r+s)/2} C_{(r+s)/2}^{q} (-1)^{(r-s)/2-q} a^{2q+1} \sum_{p=0}^{i+j-2q} C_{i+j-2}^{p} \times$$

$$\times x^{i+j-2q-p} y^p \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha S_{2\alpha,\, i-q+(j-p+s-r)/2,\, (j+p-s+r)/2}$$

$$S_{2\alpha, m, n} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m+2\alpha}\varphi \sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{m+n+1/2}}$$

Здесь $r + s$ и $j + p$ — четные числа, e — эксцентриситет эллиптической области Ω.

Величины $S_{2\alpha, m, n}$ выражаются через полные эллиптические интегралы.

Из выражения (2.9) видно, что $J(x, y)$ — действительно, полином степени n.

Подставив в правую часть уравнения (2.2) выражение (2.9), получим соотношение, в левой и правой частях которого стоят зависящие от x и y полиномы степени n. Приравнивая коэффициенты правой и левой частей этого соотношения при одинаковых степенях x и y, получим систему $(n + 1)(n + 2) / 2$ линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_{ij} через b_{ij}. Решив эту систему, получим, согласно (2.3), решение интегрального уравнения (2.2) для случая (2.1) и эллиптической области Ω.

Величина силы P и моменты M_x, M_y определяются по формулам

$$P = \iint_\Omega q(x, y)\, dx\, dy \tag{2.10}$$

$$M_x = \iint_\Omega yq(x, y)\, dx\, dy, \quad M_y = \iint_\Omega xq(x, y)\, dx\, dy$$

Решение (2.3) обращается в бесконечность на контуре эллиптической области контакта Ω. Однако может быть получено решение интегрального уравнения (2.2), которое на контуре области контакта Ω обращается в нуль.

Это решение имеет вид

$$q(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} \tag{2.11}$$

Доказательство справедливости формулы (2.17) аналогично приведенному выше. В этом случае зависимости между коэффициентами a_{ij} и b_{ij}, определяются из соотношения

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} b_{ij} x^i y^j = 2 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} a_{ij} \times \\
&\times \sum_{r=0}^{i} \sum_{s=0}^{j} C_i^r C_j^s B\left(\frac{r+s+1}{2}, \frac{3}{2}\right) (1 - e^2)^{(r-s+2j+1)/2} \times \\
&\times \sum_{q=0}^{(r+s+2)/2} C_{(r+s+2)/2}^q (-1)^{(r-s)/2-q+1} a^{2q-1} \sum_{p=0}^{i+j-2q+2} C_{i+j-2q+2}^p x^{i+j-2q-p+2} y^p \times \\
&\times \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha S_{2\alpha,\, i-q+1+(j-p+s-r)/2,\, (j+p-s+r)/2}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь $k + l = n$, $r + s$ и $j + p$ — четные числа.

Рассмотрим пример, когда на контуре области контакта давление неограничено. Пусть

$$w(x, y) = b_{00} + b_{10} x + b_{01} y \tag{2.13}$$

Тогда полином (2.9) имеет следующий вид:

$$Z(x, y) = 2\pi b \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha (S_{2\alpha, 0, 0} a_{00} + S_{2\alpha, 1, 0} a_{10} x + b^2 a^{-2} S_{2\alpha, 0, 1} a_{01} y) \tag{2.14}$$

Приравняв в (2.13) свободный член и коэффициенты при неизвестных x и y к соответствующим величинам, стоящим в (2.14), получим систему

$$\begin{aligned}
&b_{i0} = 2\pi b \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha S_{2\alpha, i, 0} a_{i0}, \quad i = 0, 1 \\
&b_{01} = 2\pi b^3 a^{-2} \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha S_{2\alpha, 0, 1} a_{01} \\
&S_{2\alpha, i, j} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2(\alpha+i)} \varphi \sin^{2j} \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Решив систему (2.15) относительно a_{ij}, получим из (2.3) величину давления под штампом в виде

$$\begin{aligned}
&q(x, y) = (2\pi b)^{-1} (b_{00} B_{00} + b_{10} B_{10} x + a^2 b^{-2} b_{01} B_{01} y) (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{-1/2} \\
&B_{ij} = \left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha S_{2\alpha, i, j}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Значения силы и моментов получим из (2.10), (2.16) в виде

$$P = ab_{00}B_{00}, \quad M_x = {}^1/_3 a^3 b_{01} B_{01}, \quad M_y = {}^1/_3 a^3 b_{10} B_{10}$$

Рассмотрим теперь пример, когда на контуре области контакта давление ограничено. Пусть

$$w(x, y) = b_{00} + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 \tag{2.17}$$

В этом случае, используя соотношение (2.12), получим систему уравнений для определения коэффициентов a_{ij} при заданных полуосях a и b эллиптической области контакта

$$b_{00} = \pi b \left[\sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \left(S_{2\alpha,0,0} a_{00} + \frac{1}{4} b^2 S_{2\alpha,0,1} a_{20} + \frac{1}{4} b^2 S_{2\alpha,1,0} a_{02} \right) \right] \tag{2.18}$$

$$b_{20} = \pi b \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \left[-a^{-2} S_{2\alpha,1,0} a_{00} + \left(S_{2\alpha,2,0} - \frac{1}{4} b^2 a^{-2} S_{2\alpha,1,1} \right) a_{20} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(b^4 a^{-4} S_{2\alpha,1,1} + \frac{1}{4} b^2 a^{-2} S_{2\alpha,2,0} \right) a_{02} \right] \right\}$$

$$b_{02} = \pi b \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha \left[-a^{-2} S_{2\alpha,0,1} a_{00} + \left(S_{2\alpha,1,1} - \frac{1}{4} b^2 a^{-2} S_{2\alpha,0,2} \right) a_{20} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(b^4 a^{-4} S_{2\alpha,0,2} - \frac{1}{4} b^2 a^{-2} S_{2\alpha,1,1} \right) a_{02} \right] \right\}$$

$$S_{2\alpha,i,j} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2(\alpha+i)}\varphi \sin^{2j}\varphi \, d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^\beta}$$

$$j = 0{,}2, \quad \beta = {}^3/_2; \quad j = 1, \quad \beta = {}^5/_2$$

Определяя a_{ij}, получим из (2.11) давление под штампом

$$q(x, y) = (a_{00} + a_{20}x^2 + a_{02}y^2)(1 - x^2 / a^2 - y^2 / b^2)^{-1/2} \tag{2.19}$$

Величину нагрузки на штамп определим с помощью интеграла (2.10) в виде

$$P = {}^2/_3 \pi ab \, [a_{00} + (a_{20}a^2 + a_{02}b^2) / 5] \tag{2.20}$$

Если в формулах (2.18)—(2.20) положить a_{20} и a_{02} равными нулю, то получим решение задачи о вдавливании в упругое полупространство движущегося параболического штампа с изменяемой в зависимости от силы P областью контакта. При этом из первого уравнения (2.18) определится коэффициент a_{00}, а второе и третье уравнения (2.18) послужат для нахождения неизвестных теперь полуосей эллиптической области контакта a и b.

Поступила 17 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чурилов В. А.* О действии на упругое полупространство движущейся по его границе с постоянной скоростью нормальной нагрузки. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
2. *Голицын Б. Б.* Лекции по сейсмометрии. С.-Петербург, 1912.
3. *Саваренский Е. Ф., Кирнос Д. П.* Элементы сейсмологии и сейсмометрии. Л.— М., Гостехиздат, 1949.
4. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.