

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОЯ С ДВУМЯ ШТАМПАМИ

В. Н. За кор ко

(Комсомольск-на-Амуре)

Рассматривается задача о вдавливании в верхнюю и нижнюю грани однородного упругого слоя круглых в плане соосных штампов. Поверхности подошв штампов обладают осевой симметрией. Части граней слоя, находящиеся за пределами контактов, свободны от напряжений; трение или сцепление между слоем и штампами отсутствует.

Получена система двух интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями, решающими задачу. Методом выделения особенностей эту систему удастся свести к уравнениям Фредгольма второго рода. Для случая плоских штампов получено приближенное решение уравнений в предположении, что два параметра, входящие в систему, достаточно малы.

Задачи о слое с различными граничными условиями были поставлены и решены во многих работах, например [1,2]. Однако, насколько известно автору, во всех этих задачах условия на границе предполагались различными лишь на одной грани слоя; в данной задаче граничные условия являются смешанными на обеих гранях, поэтому получается система двух интегральных уравнений.

1. Пусть  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ламе упругого слоя

$$-d \leq z \leq d, \quad 0 \leq r < \infty \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

где  $u_r, u_z$  — компоненты деформации, а  $\sigma_r, \sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  — компоненты напряжения в цилиндрической системе координат (фигура).

Граничные условия

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_z |_{z=\pm d} &= f_{\pm}(r), \quad r \leq r_{\pm}; \quad \sigma_z |_{z=\pm d} = 0, \quad r > r_{\pm} \\ \tau_{rz} |_{z=\pm d} &= 0 \quad (f_{\pm}(r) = \pm g_{\pm}(r) \mp h_{\pm}) \end{aligned}$$

Здесь  $g_+(r)$  и  $g_-(r)$  — функции, определяющие подошвы штампов радиусами  $r_+$  и  $r_-$ ,  $h_+$  и  $h_-$  — неизвестные пока постоянные — величины внедрения штампов в слой.

В случае осевой симметрии компоненты деформации и напряжения выражаются через одну бигармоническую функцию. Эту функцию выберем в форме преобразования Ханкеля

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \Phi(r, z) &= \int_0^{\infty} G(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \\ G(\gamma, z) &= (A + Bz) \operatorname{ch}(\gamma z) + (C + Dz) \operatorname{sh}(\gamma z) \end{aligned}$$

Здесь  $A = A(\gamma), \dots, D = D(\gamma)$  — функции, которые предстоит определить из граничных условий (1.1).

Подставляя (1.2) в известные выражения для  $u_z$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  через  $\Phi$ , получим

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u_z &= \int_0^\infty \left( \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \gamma^2 G \right) \gamma J_0(\gamma r) d\gamma \\ \sigma_z &= \int_0^\infty \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^3 G}{\partial z^3} - (3\lambda + 4\mu) \frac{\partial G}{\partial z} \right] \gamma J_0(\gamma r) d\gamma \\ \tau_{rz} &= \int_0^\infty \left[ \lambda \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + (\lambda + 2\mu) \gamma^2 G \right] \gamma^2 J_1(\gamma r) d\gamma \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$(1.4) \quad -\sigma_z|_{z=\pm d} = p_\pm(r), \quad \bar{p}_\pm(\gamma) = \int_0^\infty p_\pm(r) r J_0(\gamma r) dr$$

Ко второму равенству (1.3) применим формулу обращения преобразования Ханкеля и положим последовательно  $z = d$  и  $z = -d$ , тогда получим два уравнения для определения неизвестных  $A, B, C$  и  $D$ . Еще два уравнения дают граничные условия  $\tau_{rz}|_{z=\pm d} = 0$ .

Таким образом, неизвестные  $A, \dots, D$  могут быть выражены через новые неизвестные  $\bar{p}_\pm(\gamma)$ , а функция  $G(\gamma, z)$  представлена в форме

$$G(\gamma, z) = g_+(\gamma, z) \bar{p}_+(\gamma) + g_-(\gamma, z) \bar{p}_-(\gamma)$$

Подставляя теперь это выражение в первое из равенств (1.3) и полагая там последовательно  $z = d$  и  $z = -d$ , придем к системе двух уравнений с неизвестными  $\bar{p}_\pm(\gamma)$ . Опуская хотя и громоздкие, но элементарные выкладки, приводим результаты

$$(1.5) \quad \int_0^\infty [K_\pm(\gamma) \bar{p}_+(\gamma) - K_\mp(\gamma) \bar{p}_-(\gamma)] \gamma J_1(\gamma r) d\gamma = \frac{E}{2(1-\sigma^2)} f'_\pm(r)$$

$$2K_\pm(\gamma) = \frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{\operatorname{sh} 2u - 2u} \pm \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}$$

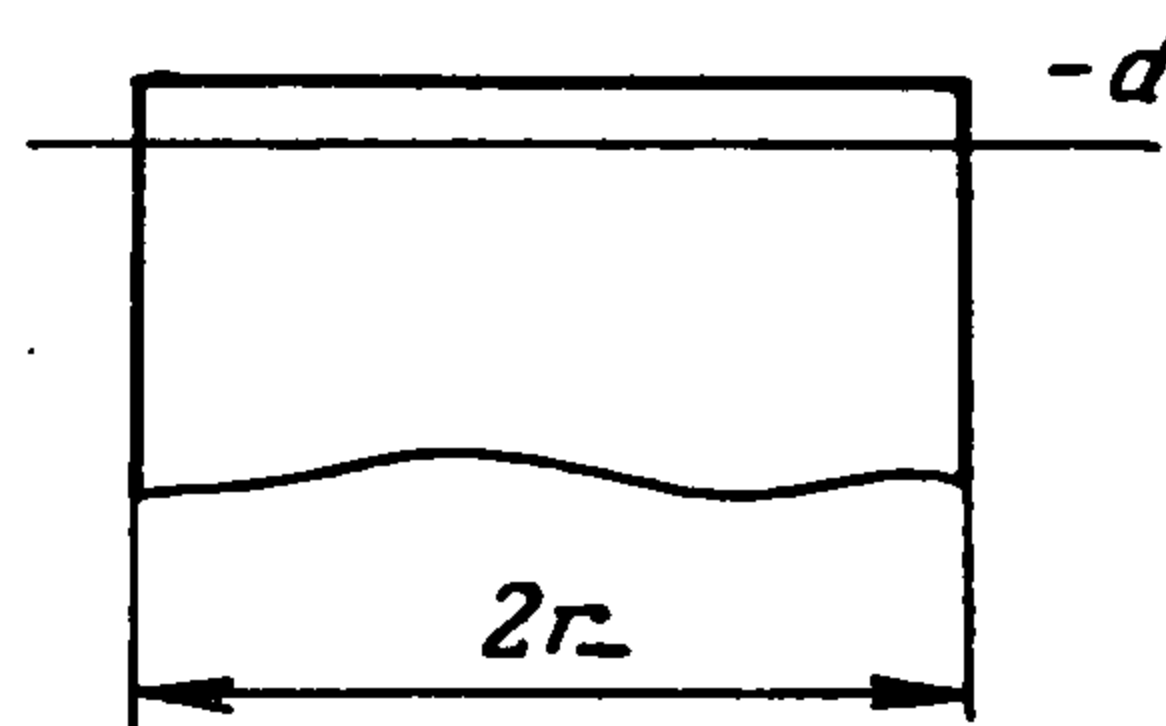
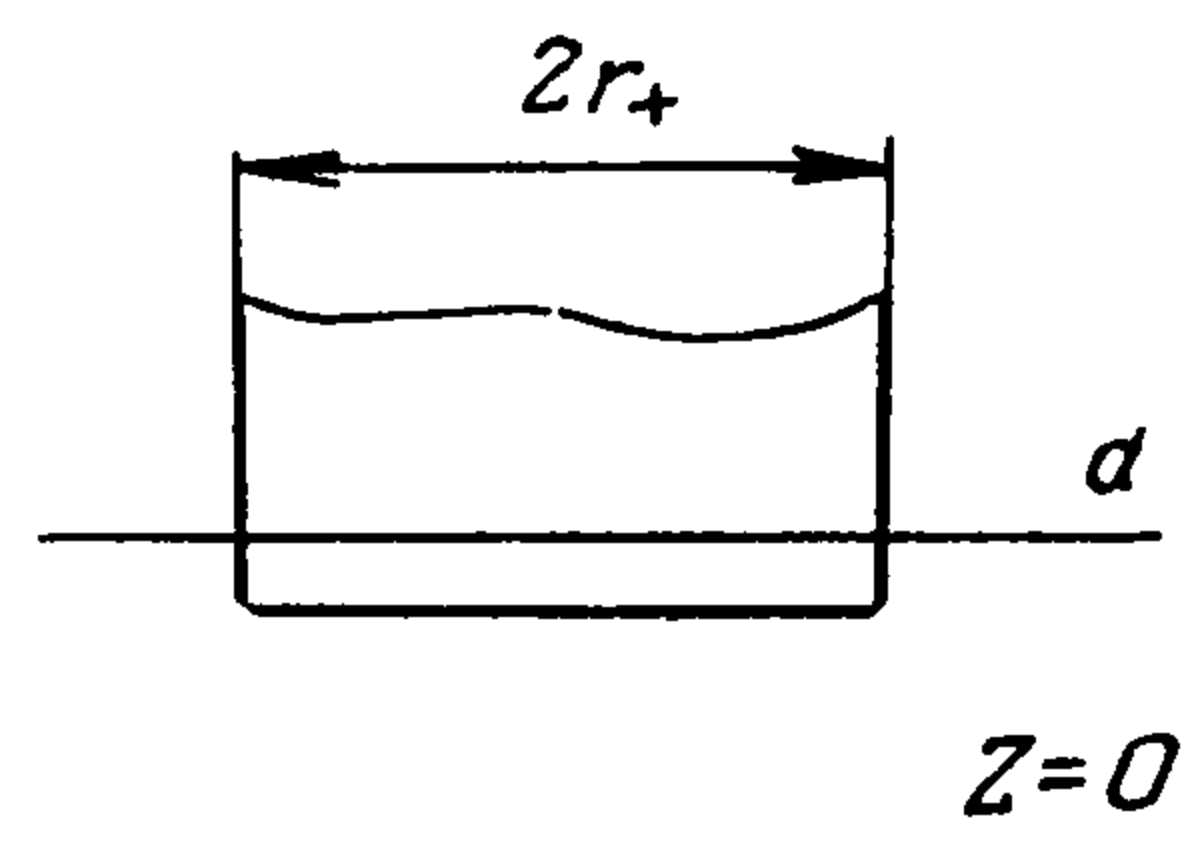
$$u = \gamma d, \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Функции  $K_\pm(\gamma)$  при  $\gamma \rightarrow +\infty$  ведут себя по-разному: если  $K_-(\gamma)$  стремится к нулю как бесконечно малая  $4\gamma d \exp(-2\gamma d)$ , то  $K_+(\gamma) = 1 + O((4\gamma d \exp(-2\gamma d))^2)$ . Последнее порождает особенности в левых частях системы (1.5).

Положим  $K_+(\gamma) = 1 + R_+(\gamma)$ ,  $K_-(\gamma) = R_-(\gamma)$  и выделим эти особенности в явном виде

$$(1.6) \quad \pm \int_0^\infty \bar{p}_\pm(\gamma) \gamma J_1(\gamma r) d\gamma + I_\pm(r) = \frac{E}{2(1-\sigma^2)} f'_\pm(r)$$

$$I_\pm(r) = \int_0^\infty [R_\pm(\gamma) \bar{p}_+(\gamma) - R_\mp(\gamma) \bar{p}_-(\gamma)] \gamma J_1(\gamma r) d\gamma$$



Чтобы удовлетворить условиям для  $\sigma_z$  в (1.1), положим

$$(1.7) \quad -p_{\pm}(r) = \int_0^{\infty} \gamma J_0(\gamma r) d\gamma \int_0^{r_{\pm}} \varphi_{\pm}(t) \cos(\gamma t) dt$$

Здесь  $\varphi_{\pm}(t)$  — новые неизвестные функции; для дальнейшего придется предположить, что они непрерывно дифференцируемы.

Интегрируя по частям (1.7) и имея в виду, что [3]

$$\int_0^{\infty} \sin(\gamma t) J_0(\gamma r) d\gamma = \begin{cases} (t^2 - r^2)^{-1/2}, & r < t \\ 0, & r > t \end{cases}$$

получим

$$(1.8) \quad -p_{\pm}(r) = \varphi_{\pm}(r_{\pm})(r_{\pm}^2 - r^2)^{-1/2} - \int_r^{r_{\pm}} \varphi_{\pm}(t)(t^2 - r^2)^{-1/2} dt, \quad r < r_{\pm}$$

$$p_{\pm}(r) = 0, \quad r > r_{\pm}$$

В равенствах для  $\bar{p}_{\pm}(\gamma)$  (см. (1.4)) заменим функции  $p_{\pm}(r)$  их представлениями (1.7) и, учитывая, что

$$\int_0^{\infty} J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \int_0^{\infty} J_0(\gamma \rho) \rho f(\rho) d\rho = f(r) \quad (0 < r < \infty)$$

получим

$$\bar{p}_{\pm}(\gamma) = - \int_0^{r_{\pm}} \varphi_{\pm}(t) \cos(\gamma t) dt = - \varphi_{\pm}(r_{\pm}) \frac{\sin(\gamma r_{\pm})}{\gamma} +$$

$$+ \int_0^{r_{\pm}} \frac{\sin(\gamma t)}{\gamma} \varphi_{\pm}(t) dt$$

Функции  $K_{\pm}(\gamma)$  под интегралами в (1.5) имеют в точке  $\gamma = 0$  полюсы третьего порядка,  $\gamma J_1(\gamma r)$  — величина второго порядка малости относительно  $\gamma$ , а функции  $\bar{p}_{\pm}(\gamma)$  отличны от нуля в этой точке ( $P$  — сила давления штампов на слой)

$$\bar{p}_{\pm}(0) = \int_0^{r_{\pm}} \varphi_{\pm}(r) dr = \frac{P}{2\pi} \neq 0$$

$$(P = -2\pi \int_0^{r_{\pm}} \bar{p}_{\pm}(r) r dr = 2\pi \int_0^{r_{\pm}} \varphi_{\pm}(r) r dr)$$

Это означает, что интегралы

$$\int_0^{\infty} R_{\pm}(\gamma) \bar{p}_{\pm}(\gamma) \gamma J_1(\gamma r) d\gamma$$

взятые порознь, расходятся. Но если положить

$$\bar{p}_{\pm}(\gamma) = \frac{P}{2\pi} - \Phi_{\pm}(\gamma), \quad \Phi_{\pm}(\gamma) = \int_0^{r_{\pm}} \varphi_{\pm}(t)(1 - \cos(\gamma t)) dt$$

и учесть, что разность  $R(\gamma) = R_+(\gamma) - R_-(\gamma)$  в точке  $\gamma = 0$  ограничена,

можно заметить, что особенности взаимно уничтожаются. Получим

$$I_{\pm} = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} R(\gamma) \gamma J_1(\gamma r) d\gamma - \int_0^{\infty} [R_+(\gamma) \Phi_+(\gamma) - \\ - R_-(\gamma) \Phi_-(\gamma)] \gamma J_1(\gamma r) d\gamma$$

Сделав эти преобразования и затем изменив порядок интегрирования в интегралах системы (1.6), получим

$$(1.9) \quad \int_0^r \frac{t \varphi_{\pm}'(t) dt}{r \sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{E}{2(1 - \sigma^2)} f_{\pm}'(r) - \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} R(\gamma) \gamma J_1(\gamma r) d\gamma \mp \\ \mp \int_0^{r_+} \varphi_+'(t) Q_{\pm}(t, r) dt \pm \int_0^{r_-} \varphi_-'(t) Q_{\mp}(t, r) dt \pm \\ \pm \varphi_+(r_+) Q_{\pm}(r_+, r) \mp \varphi_-(r_-) Q_{\mp}(r_-, r) \\ Q_{\pm}(t, r) = \int_0^{\infty} R_{\pm}(\gamma) (\gamma t - \sin(\gamma t)) J_1(\gamma r) d\gamma$$

При выводе этих уравнений было использовано соотношение [3]

$$\int_0^{\infty} \sin(\gamma t) J_1(\gamma r) d\gamma = \begin{cases} t [r \sqrt{r^2 - t^2}]^{-1}, & r > t \\ 0, & r < t \end{cases}$$

2. Для операторов в левых частях системы (1.9) известны обратные: если временно считать правые части (1.9) известными и положить  $t = r \sin \theta$ , получим уравнение Шлёмилля

$$\int_0^{\pi/2} F(r \sin \theta) d\theta = g(r)$$

непрерывное решение которого

$$(2.1) \quad F(r) = \frac{2}{\pi} \left[ g(0) + r \int_0^{\pi/2} g'(r \sin \theta) d\theta \right]$$

На самом деле правые части (1.9) неизвестны, поэтому (2.1) порождает новые интегральные уравнения второго рода. Эти уравнения таковы:

$$(2.2) \quad \varphi_{\pm}'(r) = F_{\pm}(r) - \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} R(\gamma) \gamma \sin(\gamma r) d\gamma \mp \int_0^{r_+} \varphi_+'(t) S_{\pm}(t, r) dt \pm \\ \pm \int_0^{r_-} \varphi_-'(t) S_{\mp}(t, r) dt \pm A_+ S_{\pm}(r_+, r) \mp A_- S_{\mp}(r_-, r), \quad A_{\pm} = \varphi_{\pm}(r_{\pm}) \\ S_{\pm}(t, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{\pm}(\gamma) (\gamma t - \sin(\gamma t)) \sin(\gamma r) d\gamma \\ F_{\pm}(r) = \frac{E}{\pi(1 - \sigma^2)} \int_0^{\pi/2} [r \sin \theta f_{\pm}'(r \sin \theta)]' d\theta = \frac{E}{2(1 - \sigma^2)} \int_0^r \frac{[f_{\pm}'(z) z]'}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz$$

Можно показать, что ядра  $S_{\pm}(t, r)$  непрерывны в квадрате  $[0, r_+] \times [0, r_-]$  и поэтому система (2.2) Фредгольмова.

Для дальнейшего удобно ввести величины  $\varepsilon_{\pm} = r_{\pm}/d$ ,  $u = \gamma d$ ,  $x = r/d$  и положить

$$\varphi_{\pm}'(r) = \frac{P}{2\pi d^2} \psi_{\pm}(x)$$

Можно заметить, что в пределе, когда  $d \rightarrow \infty$  (случай полупространства), уравнения (2.2) принимают вид

$$\varphi_{\pm}'(r) = F_{\pm}(r)$$

и получаем решение задачи для полупространства (см. (1.8))

$$\sigma_z = \frac{\varphi_-(r_-)}{\sqrt{r_-^2 - r^2}} - \int_r^{r_-} \frac{F_-(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt = \frac{A_-}{\sqrt{r_-^2 - r^2}} - \frac{E}{\pi(1 - \sigma^2)} \int_0^r \frac{[f_-'(t) t]'}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt$$

В частности, для плоского штампа

$$f_-'(r) = 0, \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi r_- \sqrt{r_-^2 - r^2}}$$

Следовательно

$$\lim_{d \rightarrow \infty} A_{\pm} = \frac{P}{2\pi r_{\pm}}$$

В соответствии с этим положим

$$A_{\pm} = \frac{P}{2\pi r_{\pm}} B_{\pm}$$

В новых обозначениях система (2.2) приобретает следующий вид (ограничимся случаем плоских штампов):

$$(2.3) \quad \psi_{\pm}(x) = \int_0^{\infty} R^{\circ}(u) u \sin(ux) du \mp \int_0^{\varepsilon_+} \psi_+(t) T_{\pm}(t, x) dt \pm$$

$$\pm \int_0^{\varepsilon_-} \psi_-(t) T_{\mp}(t, x) dt \pm \frac{B_+}{\varepsilon_+} T_{\pm}(\varepsilon_+, x) \mp \frac{B_-}{\varepsilon_-} T_{\mp}(\varepsilon_-, x)$$

$$R^{\circ}(u) = \frac{2u + 1 - e^{-2u}}{\text{sh } 2u + 2u}$$

$$T_{\pm}(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U_{\pm}(2u) (ut - \sin(ut)) \sin(ux) du$$

$$U_+(z) = \frac{e^{-z} \text{sh } z + z^2 + z}{(\text{sh } z)^2 - z^2}$$

$$U_-(z) = \frac{z \text{ch } z + \text{sh } z}{(\text{sh } z)^2 - z^2}$$

3. Система (2.3) может быть решена разными приближенными методами. Здесь ограничимся наиболее простым — методом малого параметра.

Разложив  $\sin(ux)$  в степенной ряд, получим

$$(3.1) \quad T_{\pm}(t, x) = a_{\pm}(t) x + b_{\pm}(t) x^3 + \dots$$

Учитывая, что

$$U_+(z) \sim 4z^2 e^{-2z}, \quad U_-(z) \sim 2ze^{-z}, \quad z \rightarrow +\infty$$

можно показать, что ряды (3.1) сходятся при условии  $\varepsilon_0 \equiv \max(\varepsilon_-, \varepsilon_+) < 2$  и тем лучше, чем меньше величина  $\varepsilon_0$ . Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы

$$\alpha \equiv \|T_+\| + \|T_-\| < 1$$

$$(\|T_{\pm}\| = \max_{\Delta} |T_{\pm}(x, t)|, \quad \Delta = [0 \leq x \leq \varepsilon_0] \times [0 \leq t \leq \varepsilon_0])$$

Если промежуток  $[0, \infty)$  разбить на две части  $[0, a]$  и  $(a, \infty)$  и подходящим образом аппроксимировать функции  $U_{\pm}(z)$  на каждой из этих частей, можно показать, что  $\alpha \leq 0.88 \varepsilon_0^3$ . Следовательно, итерационный процесс будет заведомо сходящимся, если  $\varepsilon_0 \leq 1$ .

При этом условии решения уравнений (2.3) представимы в виде рядов по степеням  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_-$ . Чтобы получить приближенные решения, ограничиваясь членами не выше  $\varepsilon_0^5$ , нужно вычислить интегралы

$$(3.2) \quad f_{\pm}^{(j)} \equiv \int_0^{\infty} R_{\pm}^{\circ}(u) u^{2j} du \quad (j = 1, 2)$$

Вычисление этих интегралов осуществляли на ЭВМ, причем функции  $R_{\pm}^{\circ}(u)$  аппроксимировали каждый раз так, чтобы ошибка при вычислении интегралов (3.2) не превосходила 0.001. Таким образом получены следующие приближенные формулы для нормальных напряжений в области контактов:

$$\sigma_z|_{z=\pm d} = \frac{P}{2\pi r_{\pm} \sqrt{r_{\pm}^2 - r^2}} (1 + 0.0866\varepsilon_{\pm}^3 - 0.1732\varepsilon_{\pm}^5 + 0.0323\varepsilon_{\pm}^7 - \dots)$$

Поступила 3 XI 1977]

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л. «Наука», 1967.
2. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. И. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.