

**КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЖИМОВ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОМАССОБМЕНА В ПОГРАНИЧНОМ
СЛОЕ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ ВДУВАХ**

В. М. Агранат, А. М. Гришин

(Томск)

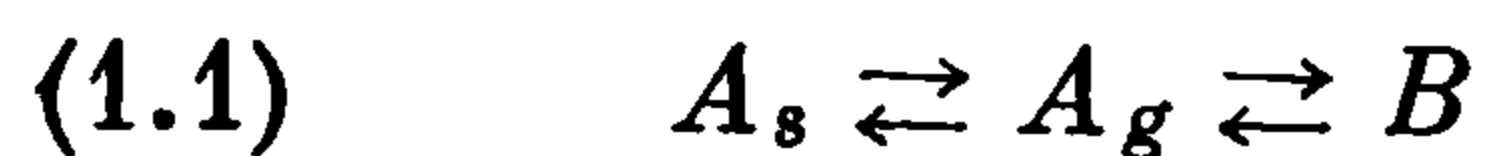
При помощи качественной теории динамических систем исследуется влияние газофазных химических реакций на нестационарный тепломассообмен в окрестности лобовой критической точки обтекаемого тела. Получены необходимые и достаточные условия единственности и устойчивости стационарных режимов тепломассообмена.

Процессы горения и термохимического разрушения многих газифицирующихся и летучих конденсированных веществ протекают в две стадии [1-3]: сначала имеет место газификация с образованием промежуточных газообразных химически активных продуктов, которые затем вступают в газофазные химические реакции. При этом происходит интенсивный вдув газообразных продуктов термохимического разрушения с поверхности обтекаемого тела.

Решению задачи об интенсивных вдувах посвящены работы [4-6]: в [4,5] рассматривались уравнения химически замороженного пограничного слоя, а в [6] — химически неравновесного. Как в [4,5], так и в [6] была использована стационарная постановка задачи.

Цель предлагаемой работы — дать метод приближенного аналитического исследования влияния газофазных реакций на устойчивость стационарных режимов тепломассообмена и получить условия существования, единственности и устойчивости стационарных решений соответствующих краевых задач.

1. Постановка задачи. Рассматривается обтекание окрестности лобовой критической точки газифицирующегося тела вращения потоком нагретого газа. Химически активные продукты газификации A_g , попадая в газовый поток, участвуют вблизи поверхности тела в газофазной реакции, т. е. химические превращения следуют схеме



где A_s — исходное конденсированное вещество, B — продукты газофазной реакции, индексы s и g приписываются веществу в конденсированном и газообразном состоянии соответственно. Понятие процесса газификации определено в [7]. Частными случаями этого процесса можно считать испарение и сублимацию.

Согласно схеме (1.1), обе стадии процесса термохимического разрушения могут быть обратимыми. Условимся в дальнейшем считать, что если газификация (газофазная реакция) является эндотермической, например, сублимацией (диссоциацией), то она обратима, если экзотермической, — то необратима.

Следует отметить, что при записи кинетической схемы (1.1) для простоты дальнейшего изложения было сделано допущение о том, что A_g — газ тождественного химического состава, как это имеет место, например, при сублимации и испарении некоторых конденсированных веществ [1, 7]. В случае, когда продуктов газификации оказывается несколько, причем в газофазную реакцию вступает лишь часть из них, схема (1.1), вообще говоря, не выполняется. Однако, если допустить, что скорость газофазной реакции лимитируется содержанием какого-то одного промежуточного компонента, и учесть, что массовая скорость образования этого компонента в результате реакции газификации отличается от массовой скорости газификации лишь постоянным множителем, то полученные ниже результаты распространяются и на случай, когда A_g — газ нетождественного химического состава, что наблюдается, например, при газификации пороха [2].

Предполагается, что имеет место сильный вдув продуктов газификации и реализуется известная двухзонная схема обтекания реагирующего тела [4–6]: вблизи тела влияние вязких сил пренебрежимо мало, а пограничный слой оттеснен от тела и формируется в окрестности контактного разрыва, разделяющего области внешнего и внутреннего течений. Считается, что скорость газофазной реакции зависит только от температуры и концентрации одного лимитирующего компонента газовой смеси. Требуется определить условия существования, единственности и устойчивости стационарных режимов тепломассопереноса в пограничном слое.

Математически поставленная задача сводится к определению условий существования, единственности и устойчивости стационарных решений следующей краевой задачи, записанной в безразмерном виде:

$$(1.2) \quad f''' + ff'' = \beta_1 \left[(f')^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right], \quad \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{1 + \beta\Theta}{1 + \beta\Theta_e} \frac{M_e}{M}$$

$$\frac{1}{Pr} \Theta'' + f\Theta' = \frac{1}{\pi_t} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{\alpha_2}{\gamma} \pi_q \pi_\delta R_2(C, \Theta) \right]$$

$$\frac{1}{Sc} C'' + fC' = \frac{1}{\pi_t} \left[\frac{\partial C}{\partial \tau} + \pi_\delta R_2(C, \Theta) \right]$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial y_s^2} + \gamma \sqrt{\pi_x} \frac{\rho_w}{\rho_s} R_1 \frac{\partial \Theta_s}{\partial y_s} = \frac{\partial \Theta_s}{\partial \tau}$$

$$(1.4) \quad \frac{\lambda_w \rho_w}{\lambda_e \rho_e} \sqrt{\frac{\pi_t}{Pr}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right)_w + \alpha_1 \frac{\rho_w}{\rho_e} R_1 -$$

$$- \pi_\sigma [(1 + \beta\Theta_w)^4 - (1 + \beta\Theta_e)^4] = -K_e \left(\frac{\partial \Theta_s}{\partial y_s} \right)_w$$

$$- \frac{\lambda_w}{\lambda_e} L \sqrt{\frac{\pi_t}{Pr}} \left(\frac{\partial C}{\partial \eta} \right)_w = \gamma R_1 (1 - C_w)$$

$$\Theta|_{\eta=0} = \Theta_s|_{y_s=0}, \quad \Theta_s|_{y_s \rightarrow \infty} \rightarrow -\Theta_{sH}$$

$$f|_{\eta=0} = f_w = - \frac{\gamma R_1}{\sqrt{\pi_t Pr}} \frac{\rho_w}{\rho_e}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0$$

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \frac{2y_*^2 \rho_e c_{pe}}{\lambda_e}, \quad y_* = \frac{\lambda_e RT_*^2}{\rho_e E_1 |q_1| k_1} \exp \frac{E_1}{RT_*}$$

$$y_s = - \frac{y \sqrt{\pi_x}}{y_*}, \quad \pi_x = \frac{\lambda_e \rho_s c_{ps}}{\lambda_t \rho_e c_{pe}}, \quad \Theta = \frac{E_1}{RT_*^2} (T - T_*)$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{(\rho v)_w}{\rho_w k_1} \exp \frac{E_1}{RT_*}, \quad \gamma = \frac{c_{pe} RT_*^2}{|q_1| E_1}, \quad \pi_t = t_* \beta_x \\
\beta_x &= \left(\frac{du_e}{dx} \right)_{x=0}, \quad \pi_\sigma = \frac{\varepsilon \sigma T_*^2 y_* E_1}{R \lambda_e}, \quad K_\varepsilon = \sqrt{\pi_c \pi_\rho} \\
\pi_c &= \frac{c_{ps}}{c_{pe}}, \quad \pi_\rho = \frac{\rho_s \lambda_s}{\rho_e \lambda_e}, \quad \beta = \frac{RT_*}{E_1}, \quad \Theta_{sH} = \frac{E_1}{RT_*^2} (T_* - T_{sH}) \\
L &= \frac{Pr}{Sc}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad Sc = \frac{\mu}{\rho D}, \quad \beta_1 = \frac{2\zeta}{u_e} \frac{du_e}{d\zeta} \\
\alpha_1 &= \frac{q_1}{|q_1|}, \quad \alpha_2 = \frac{q_2}{|q_2|}, \quad \pi_q = \frac{|q_2|}{|q_1|}, \quad \pi_\delta = \frac{1}{2} \pi_t \text{ Dam} \\
\text{Dam} &= \frac{k_2}{\beta_x} \exp \left(-\frac{E_2}{RT_*} \right), \quad \eta = \frac{ru_e}{\sqrt{2\zeta}} \int_0^y \rho dy, \quad \zeta = \int_0^x \mu_e \rho_e u_e r^2 dx
\end{aligned}$$

Здесь и выше τ, y_s — безразмерные время и координата; ζ, η — переменные А. А. Дородницына в форме Лиза; f, Θ — безразмерные функция тока и температура; C — массовая концентрация лимитирующего компонента; R_1, R_2 — безразмерные массовые скорости реакции газификации и газофазной реакции соответственно; $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, \text{Dam}, \pi_t, \pi_c, \pi_\rho, \pi_\delta, \pi_\mu, \pi_\sigma, K_\varepsilon, L, Pr, Sc, \beta_1, \pi_q$ — безразмерные параметры; x, y — координаты ортогональной системы координат, связанной с границей раздела сред; r — радиус поперечной кривизны тела; u, v — компоненты скорости газа; ρ — плотность; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; μ — динамическая вязкость; M — молекулярный вес газовой смеси; T — температура; D — эффективный коэффициент диффузии; λ — коэффициент теплопроводности; $E_1, q_1, k_1, E_2, q_2, k_2$ — энергия активации, тепловой эффект и предэкспонент реакции газификации и газофазной реакции соответственно; ε — коэффициент черноты; σ — постоянная Стефана — Больцмана; R — универсальная газовая постоянная; штрих означает дифференцирование по η ; индексы $s, H, e, w, *$ относятся к параметрам конденсированной фазы, к параметрам конденсированной фазы при $y_s \rightarrow \infty$, к параметрам газовой фазы на внешней стороне пограничного слоя, к параметрам на границе раздела сред и характерным величинам соответственно.

При выводе уравнений (1.2), описывающих тепломассообмен в газовой фазе в окрестности лобовой критической точки твердого тела, считалось, что газ оптически прозрачен, числа Прандтля и Шмидта и произведение плотности на вязкость постоянны, газовая смесь является эффективной бинарной [8], а удельные теплоемкости различных компонентов постоянны и одинаковы. Кроме того, как и в работах [9-11], предполагалось, что уравнения неразрывности и движения квазистационарны. Из результатов работы [12] следует, что это предположение можно считать оправданным в достаточно широком диапазоне изменения параметров течения.

При записи законов сохранения энергии и массы на границе раздела сред в (1.4) были оставлены члены, характеризующие перенос энергии и массы вследствие процессов теплопроводности и диффузии, так как при

наличии газофазной реакции, согласно [6], градиенты температуры и концентраций на границе раздела сред отличны от нуля.

В связи с тем, что цель данной работы — качественное исследование режимов теплообмена, конкретные начальные условия можно не ставить.

Если излучением можно пренебречь, поверхность обтекаемого тела не разрушается ($R_1 = 0$) и сохраняет постоянную температуру T_w , а через поверхность реализуется интенсивный постоянный вдув реакционно-способного газа, инициирующий в пограничном слое протекание неравновесной экзотермической химической реакции, в которой принимают участие компоненты набегающего и вдуваемого потоков, то краевая задача (1.2) — (1.4) упрощается и принимает вид [9,10]

$$(1.5) \quad f''' + ff'' = \beta_1 \left[(f')^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right], \quad \frac{\rho_e}{\rho} = \bar{T} \frac{M_e}{M}$$

$$(1.6) \quad \frac{1}{Pr} \bar{T}'' + f\bar{T}' = C_1 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} - C_1 C_2 m(C, \bar{T}) \equiv F(\eta, \tau)$$

$$(1.7) \quad \frac{1}{Sc} C'' + fC' = C_1 \frac{\partial C}{\partial \tau} + C_1 m(C, \bar{T}) \equiv \Phi(\eta, \tau)$$

$$(1.8) \quad \eta = 0: f = f_w = \text{const}, f' = 0, \bar{T} = \bar{T}_w = \text{const}, C = C_w = \text{const}$$

$$(1.9) \quad \eta \rightarrow \infty: f' \rightarrow 1, \bar{T} \rightarrow 1, C \rightarrow C_e$$

$$\bar{T} = \frac{T}{T_e}, \quad C_1 = \frac{1}{\beta_x t_*}, \quad t_* = \frac{2\rho_e^{1-n}}{K}, \quad C_2 = \frac{q_2}{c_p T_e}$$

Здесь \bar{T} — относительная температура; m — безразмерная скорость газофазной реакции; F, Φ — безразмерные функции; C_1, C_2 — первое и второе безразмерные числа Дамкеллера газофазной реакции; n, K — порядок и коэффициент скорости газофазной реакции при $T = T_e$, а остальные обозначения указаны выше.

При записи краевой задачи (1.5) — (1.9) были использованы новые характерные величины, что привело к уменьшению числа безразмерных критериев подобия.

2. Сведение краевой задачи (1.5) — (1.9) к динамической системе. Рассмотрим вначале обтекание неразрушающегося термостата при интенсивном вдуве. Известно [4-6], что при интенсивных вдувах течение в пограничном слое может быть разделено на две области: внутреннюю область $0 < \eta < \Delta$ ($\eta = \Delta$ — координата контактной поверхности, на которой $f = 0$), в которой члены, описывающие молекулярный перенос в уравнениях (1.5) — (1.7), становятся несущественными, и внешнюю область $\Delta < \eta < \infty$, в которой происходит основное изменение характеристик пограничного слоя. Будем рассматривать уравнения (1.5) — (1.7) отдельно в областях $0 < \eta < \Delta$ и $\Delta < \eta < \infty$, требуя на границе областей непрерывности функций f, \bar{T}, C и их производных по η .

Дважды интегрируя уравнения (1.6), (1.7) по η в области $\Delta < \eta < \infty$ с использованием условий (1.9) и производя асимптотическую оценку несобственных интегралов аналогично [10], получим соотношения (индекс Δ

относится к параметрам при $\eta = \Delta$)

$$(2.1) \quad f_{\Delta}'(1 - \bar{T}_{\Delta}) - F(\Delta, \tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{f_{\Delta}'}{\text{Pr}}} U_{\Delta}, \quad U = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta}$$

$$f_{\Delta}'(C_e - C_{\Delta}) - \Phi(\Delta, \tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{f_{\Delta}'}{\text{Sc}}} V_{\Delta}, \quad V = \frac{\partial C}{\partial \eta}$$

Согласно [4-6], при интенсивных вдувах в окрестности $\eta = 0$ величины f''' , \bar{T}'' , C'' пренебрежимо малы, поэтому при $0 < \eta < \Delta$ можно приближенно считать, что

$$(2.2) \quad f = f_w + f''(0) \frac{\eta^2}{2}, \quad \bar{T} = \bar{T}_w + A\eta, \quad C = C_w + B\eta$$

$$\left(f''(0) = \frac{\beta_1 \rho_e}{-f_w \rho_w} \right)$$

где A и B — функции времени. Выражение для величины $f''(0)$ получено из уравнения (1.5), записанного при $\eta = 0$, и граничных условий (1.8). Из (2.2) и условий сшивки на контактной поверхности находим

$$(2.3) \quad f_{\Delta}' = \frac{\rho_e}{\rho_w} \frac{\beta_1}{(-f_w)} \Delta, \quad U_{\Delta} = \frac{\bar{T}_{\Delta} - \bar{T}_w}{\Delta} = A, \quad V_{\Delta} = \frac{C_{\Delta} - C_w}{\Delta} = B$$

$$\Delta = -f_w \sqrt{\frac{2}{\beta_1} \frac{\rho_w}{\rho_e}}$$

Значения координаты $\eta = \Delta$ контактной поверхности, вычисленные по последней формуле (2.3) и по формуле для $\eta = \Delta$, полученной в работе [5] для случая изотермического пограничного слоя, совпадают, если затупление сферическое ($\beta_1 = 1/2$), и различаются на 8%, если затупление цилиндрическое ($\beta_1 = 1$).

Подставляя (2.3) и выражения для $F(\Delta, \tau)$, $\Phi(\Delta, \tau)$ в (2.1), получим следующую динамическую систему второго порядка (см. определение в [13]):

$$(2.4) \quad \frac{dC_{\Delta}}{d\tau} = -m_{\Delta} + \frac{1}{C_1} [a_{\Delta}(C_e - C_{\Delta}) - L^{1/2} b (C_{\Delta} - C_w)] \equiv P(C_{\Delta}, \bar{T}_{\Delta})$$

$$\frac{d\bar{T}_{\Delta}}{d\tau} = C_2 m_{\Delta} + \frac{1}{C_1} [a_{\Delta}(1 - \bar{T}_{\Delta}) - b(\bar{T}_{\Delta} - \bar{T}_w)] = Q(C_{\Delta}, \bar{T}_{\Delta})$$

$$a = \sqrt{2\beta_1 \frac{\rho_e}{\rho_w}} > 0, \quad b = \frac{1}{(-2f_w)} \sqrt{\frac{\pi a^3}{2\text{Pr}}} > 0, \quad m_{\Delta} \equiv m(C_{\Delta}, \bar{T}_{\Delta})$$

Если химическая реакция является необратимой реакцией первого порядка, подчиняющейся закону Аррениуса, то функция m_{Δ} и параметр K имеют вид

$$(2.5) \quad m_{\Delta} = C_{\Delta} \exp \left[\bar{E} \left(\frac{1}{\bar{T}_{\Delta}} \right) \right], \quad K = k_2 \exp(-E), \quad \bar{E} = \frac{E_2}{RT_e}$$

Если реакция является обратимой реакцией рекомбинации атомов воздуха, то, согласно [14], имеем

$$(2.6) \quad m_{\Delta} = \frac{C_{\Delta}^2 - C_{\Delta E}^2}{\bar{T}_{\Delta}^{3.5} (1 + C_{\Delta})}, \quad C_{\Delta E} = C_E(\bar{T}_{\Delta}) = C_e \exp \left[C_3 \left(1 - \frac{1}{\bar{T}_{\Delta}} \right) \right]$$

где $C_3 = \text{const}$, а индекс E относится к концентрации атомов в равновесном состоянии. При этом $K = 2K_1T_e^{-1.5}$, а $C_1 = K_1p_e^2T_e^{-3.5}R^{-2}\beta_x^{-1}$, где K_1 — постоянная скорости рекомбинации, а p_e — давление набегающего потока на бесконечности.

Таким образом, качественный анализ краевой задачи (1.5) — (1.9) сводится к качественному анализу динамической системы (2.4), который можно провести известными методами [13].

3. Анализ динамической системы (2.4) и физическая интерпретация результатов. В силу определения C_Δ , \bar{T}_Δ достаточно ограничиться рассмотрением системы (2.4) в области фазовой плоскости C_Δ , \bar{T}_Δ , определяемой неравенствами $0 < C_\Delta < 1$, $0 < \bar{T}_\Delta < \infty$. Относительно функции m_Δ будем предполагать, что она в этой области непрерывна и удовлетворяет условиям

$$(3.1) \quad \frac{\partial m_\Delta}{\partial C_\Delta} > 0, \quad \lim_{C_\Delta \rightarrow C_{\Delta E}} m_\Delta = 0, \quad \lim_{\bar{T}_\Delta \rightarrow \infty} m_\Delta = N < \infty$$

Первое условие (3.1) означает, что химическая реакция имеет положительный порядок, второе условие отражает тот факт, что в равновесном состоянии скорость химической реакции обращается в нуль (в случае необратимой реакции $C_{\Delta E} = 0$), а из последнего условия следует ограниченность скорости химической реакции. Очевидно, что если функция m_Δ удовлетворяет уравнениям (2.5), (2.6), то условия (3.1) оказываются выполненными.

Координаты C_Δ° , \bar{T}_Δ° состояний равновесия динамической системы (2.4) находятся из системы уравнений $P(C_\Delta^\circ, \bar{T}_\Delta^\circ) = 0$, $Q(C_\Delta^\circ, \bar{T}_\Delta^\circ) = 0$, которая приводится к виду

$$(3.2) \quad C_\Delta^\circ = \frac{aC_e + L^{1/2}bC_w}{a + L^{1/2}b} + \frac{a(1 - \bar{T}_\Delta^\circ) - b(\bar{T}_\Delta^\circ - \bar{T}_w)}{C_2(a + L^{1/2}b)}$$

$$C_1C_2m_\Delta^\circ = a(\bar{T}_\Delta^\circ - 1) + b(\bar{T}_\Delta^\circ - \bar{T}_w), \quad m_\Delta^\circ \equiv m(C_\Delta^\circ(\bar{T}_\Delta^\circ), \bar{T}_\Delta^\circ)$$

Количество состояний равновесия равно числу корней второго уравнения (3.2), а устойчивость и тип состояний равновесия определяются знаками величин

$$\sigma_1 = \frac{\partial P}{\partial C_\Delta} + \frac{\partial Q}{\partial \bar{T}_\Delta}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial P}{\partial C_\Delta} \frac{\partial Q}{\partial \bar{T}_\Delta} - \frac{\partial P}{\partial \bar{T}_\Delta} \frac{\partial Q}{\partial C_\Delta},$$

$$D_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial C_\Delta} - \frac{\partial Q}{\partial \bar{T}_\Delta} \right)^2 + 4 \frac{\partial P}{\partial \bar{T}_\Delta} \frac{\partial Q}{\partial C_\Delta}$$

вычисленных при $C_\Delta = C_\Delta^\circ$, $\bar{T}_\Delta = \bar{T}_\Delta^\circ$. Определяя эти величины для динамической системы (2.4), получим

$$(3.3) \quad \sigma_1 = C_2 \frac{\partial m_\Delta}{\partial \bar{T}_\Delta} - \frac{2a + (L^{1/2} + 1)b}{C_1} - \frac{\partial m_\Delta}{\partial C_\Delta}$$

$$\Delta_1 = - \frac{a+b}{C_1} \left(\frac{a + L^{1/2}b}{a+b} C_2 \frac{\partial m_\Delta}{\partial \bar{T}_\Delta} - \frac{a + L^{1/2}b}{C_1} - \frac{\partial m_\Delta}{\partial C_\Delta} \right)$$

$$D_1 = \left[C_1 \frac{\partial m_\Delta}{\partial \bar{T}_\Delta} + \frac{\partial m_\Delta}{\partial C_\Delta} + \frac{(L^{1/2} - 1)b}{C_1} \right]^2 - 4C_2 \frac{\partial m_\Delta}{\partial C_\Delta} \frac{\partial m_\Delta}{\partial \bar{T}_\Delta}$$

Из анализа соотношений (3.3) вытекают важные свойства динамической системы (2.4).

1°. Если $\partial m_{\Delta} / \partial \bar{T}_{\Delta} \leq 0$, то все состояния равновесия динамической системы (2.4) — устойчивые узлы ($\sigma_1 < 0$, $\Delta_1 > 0$, $D_1 \geq 0$), а предельные циклы отсутствуют согласно критерию Бендиксона [13].

2°. Если $\partial m_{\Delta} / \partial \bar{T}_{\Delta} > 0$, то при $L \geq 1$ все антиседла ($\Delta_1 > 0$) устойчивы ($\sigma_1 < 0$), а при $L < 1$ возможно существование неустойчивых антиседел ($\Delta_1 > 0$, $\sigma_1 > 0$).

Действительно, в силу (3.3) состояние равновесия динамической системы (2.4) является неустойчивым антиседлом, если при $C_{\Delta} = C_{\Delta}^{\circ}$, $\bar{T}_{\Delta} = \bar{T}_{\Delta}^{\circ}$ выполняется условие

$$(3.4) \quad 2a + (L^{1/2} + 1)b + C_1 \frac{\partial m_{\Delta}^{\circ}}{\partial C_{\Delta}^{\circ}} \equiv \alpha_1 < \alpha_2 \equiv C_1 C_2 \frac{\partial m_{\Delta}^{\circ}}{\partial \bar{T}_{\Delta}^{\circ}} < \alpha_3 \equiv \\ \equiv \frac{a+b}{a+L^{1/2}b} C_1 \frac{\partial m_{\Delta}^{\circ}}{\partial C_{\Delta}^{\circ}} + a+b$$

Выполнение двойного неравенства (3.4) возможно только в случае, если

$$(3.5) \quad \alpha_3 - \alpha_1 \equiv \frac{(1-L^{1/2})b}{a+L^{1/2}b} C_1 \frac{\partial m_{\Delta}^{\circ}}{\partial C_{\Delta}^{\circ}} - (a+L^{1/2}b) > 0$$

Последнее условие может быть выполнено лишь при $L < 1$. Если $L \geq 1$, то $\alpha_3 < \alpha_1$ и неравенство $\Delta_1 > 0$ приводит к условию $\sigma_1 < 0$.

3°. Если $\partial m_{\Delta} / \partial \bar{T}_{\Delta} > 0$, а $L < 1$, то необходимым и достаточным условием существования неустойчивых антиседел является условие (3.4), а необходимое условие их существования имеет в силу (3.5) следующий вид:

$$(3.6) \quad C_1 > C_1^* \equiv \frac{(a+L^{1/2}b)^2}{(1-L^{1/2})b \partial m_{\Delta}^{\circ} / \partial C_{\Delta}^{\circ}}$$

Теорема 3.1. Если функция m_{Δ} удовлетворяет условиям (3.1), где $C_{\Delta E} \equiv \equiv 0$, то справедливы следующие утверждения:

1) динамическая система (2.4) имеет нечетное число простых состояний равновесия ($\Delta_1 \neq 0$), которые расположены внутри области G_1 , определяемой неравенствами $0 < C_{\Delta} < C_{\max}$, $\bar{T}_{\min} < \bar{T}_{\Delta} < \bar{T}_{\infty}$, где C_{\max} — максимальное из значений C_w и C_e , \bar{T}_{\min} — минимальное из значений \bar{T}_w и $\bar{T}_e \equiv 1$, а \bar{T}_{∞} — достаточно большая величина, превышающая \bar{T}_w и 1, причем число седел ($\Delta_1 < 0$) на единицу меньше числа антиседел ($\Delta_1 > 0$);

2) критерий единственности состояний равновесия имеет вид

$$(3.7) \quad \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \frac{a+b}{a+L^{1/2}b} C_1 \frac{\partial m_{\Delta}^{\circ}}{\partial C_{\Delta}^{\circ}} + a+b - C_1 C_2 \frac{\partial m_{\Delta}^{\circ}}{\partial \bar{T}_{\Delta}^{\circ}} > 0$$

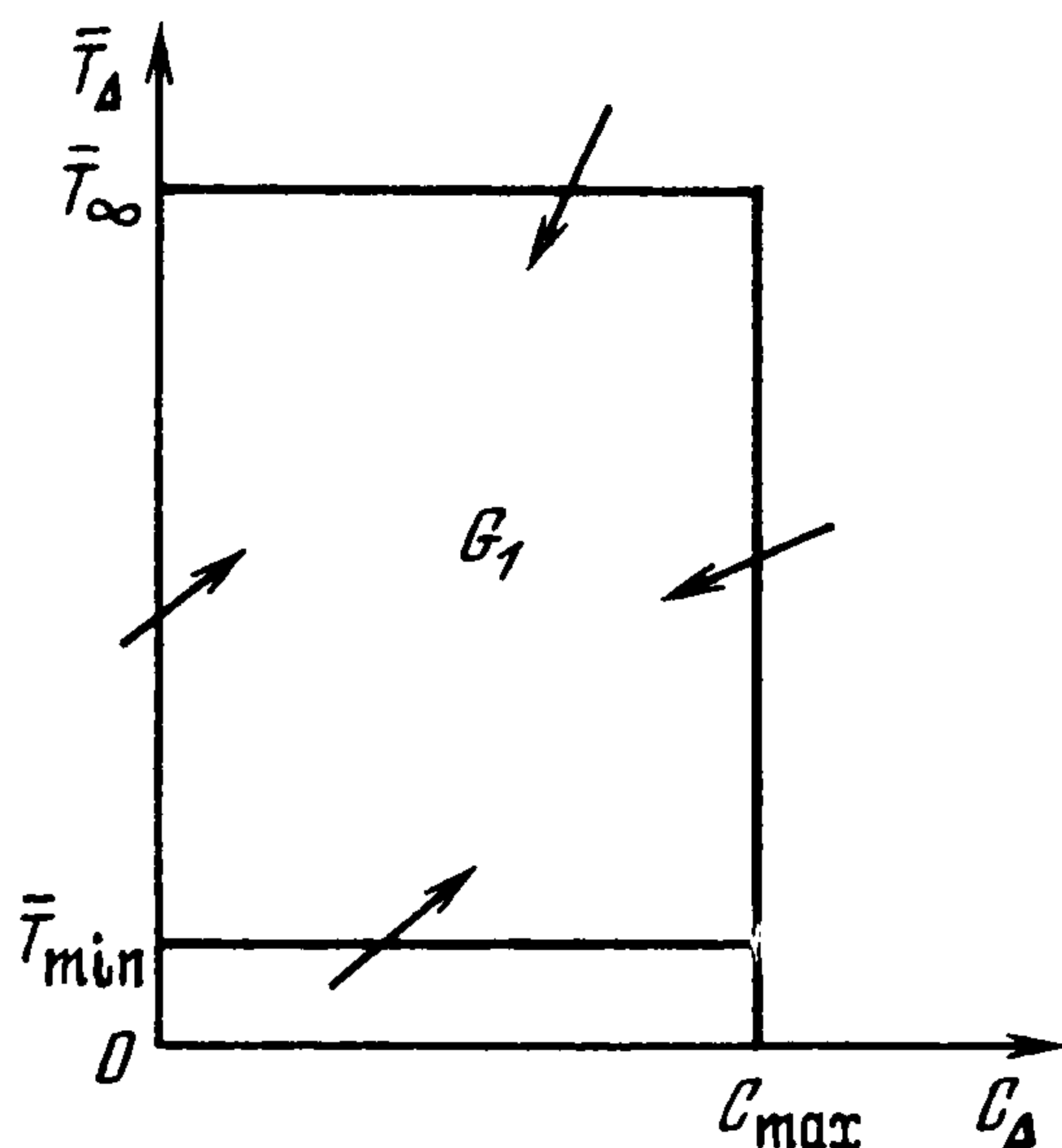
Доказательство. Из (2.4) и (3.1) следует, что вне области G_1 функции P и Q нигде в нуль не обращаются, поэтому все состояния равновесия динамической системы (2.4) лежат внутри области G_1 . Кроме того, согласно

(2.4), (3.1), имеют место неравенства

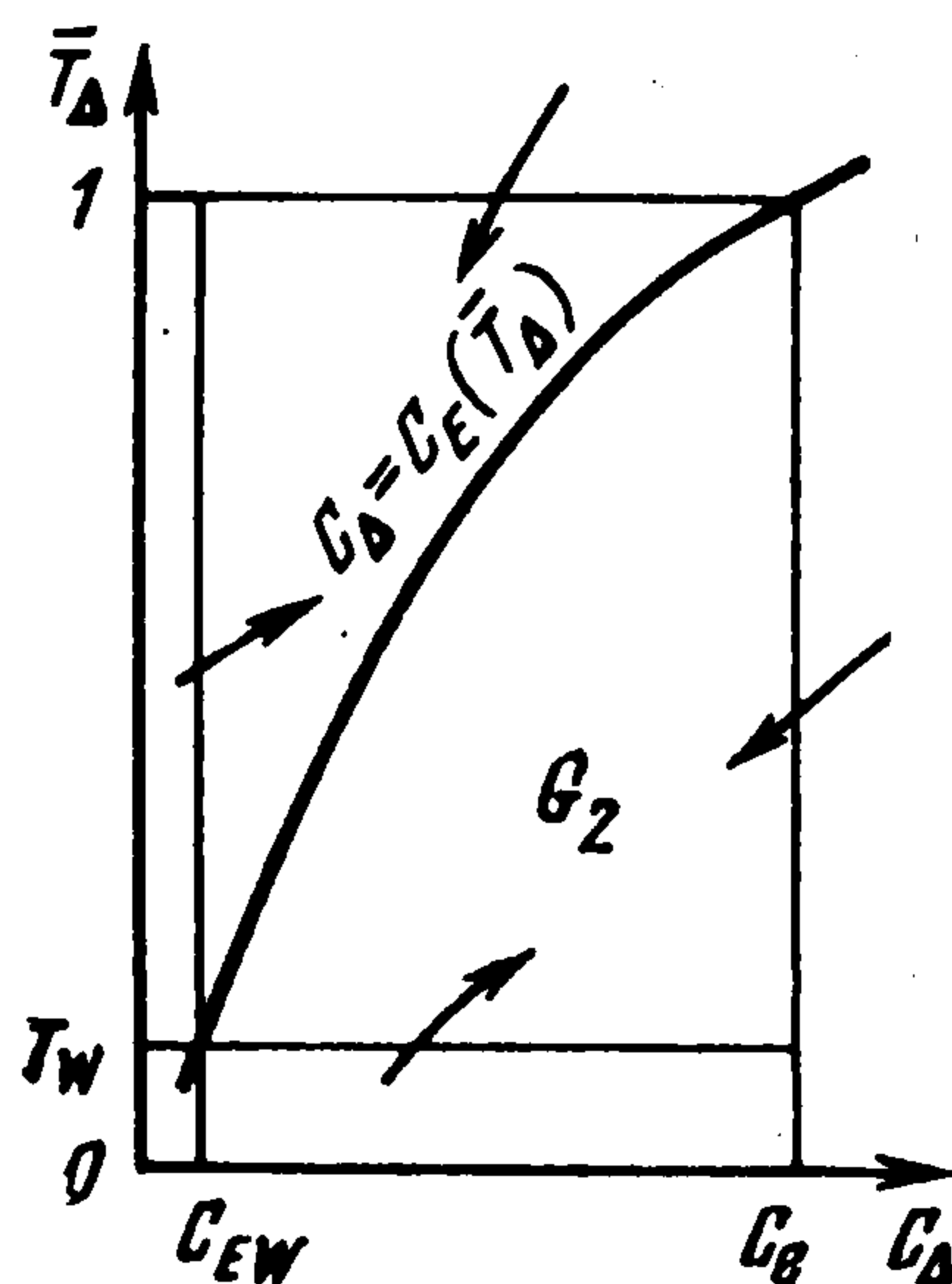
$$P(0, \bar{T}_\Delta) > 0, P(C_{\max}, \bar{T}_\Delta) < 0, Q(C_\Delta, \bar{T}_{\min}) > 0, Q(C_\Delta, \bar{T}_\infty) < 0$$

Таким образом, прямоугольник, ограничивающий область G_1 , содержит внутри себя все состояния равновесия динамической системы (2.4) и пересекается ее фазовыми траекториями снаружи внутрь (на фиг. 1 стрелки означают направление фазовых траекторий). Согласно теории индекса Пуанкаре [13], отсюда следует первое утверждение теоремы.

Второе утверждение теоремы вытекает из того, что, в соответствии с первым утверждением, динамическая система (2.4) имеет седло тогда



Фиг. 1



Фиг. 2

и только тогда, когда существует несколько состояний равновесия, а единственность состояний равновесия имеет место в случае, если при $C_\Delta = C_\Delta^\circ, \bar{T}_\Delta = \bar{T}_\Delta^\circ$ выполняется условие $\Delta_1 > 0$. Последнее условие в силу (3.3), (3.4) приводится к условию (3.7). Теорема доказана.

Теорема 3.2. Если $\bar{T}_w < 1, C_w < C_e$, а функция m_Δ удовлетворяет условиям (3.1), где $C_{\Delta E} = C_E(\bar{T}_\Delta)$ — положительная монотонно возрастающая функция, такая, что $C_E(\bar{T}_w) = C_{Ew} \ll 1$, а $C_E(1) = C_e$ (схематическое изображение графика функции $C_E(\bar{T}_\Delta)$ представлено на фиг. 2), то внутри области G_2 , определяемой неравенствами $C_{Ew} < C_\Delta < C_e, \bar{T}_w < \bar{T}_\Delta < 1$, существует нечетное число простых состояний равновесия динамической системы (2.4), причем число седел на единицу меньше числа антиседел, а критерием единственности состояний равновесия является условие (3.7).

Доказательство. Область G_2 разбивается кривой $C_\Delta = C_E(\bar{T}_\Delta)$ на две подобласти (см. фиг. 2): верхнюю, в которой $C_{wE} < C_\Delta < C_{\Delta E}$ и в силу условий (3.1) $m_\Delta < 0$, и нижнюю, в которой $C_{\Delta E} < C_\Delta < C_e$ и $m_\Delta > 0$. Учитывая этот факт и используя уравнения (2.4), получим в силу условий теоремы, что $P(C_{wE}, \bar{T}_\Delta) > 0$ при $\bar{T}_\Delta \geq \bar{T}_w, P(C_e, \bar{T}_\Delta) < 0$ при $\bar{T}_\Delta \leq 1, Q(C_\Delta, \bar{T}_w) > 0$ при $C_\Delta \geq C_{wE}$, а $Q(C_\Delta, 1) < 0$ при $C_\Delta \leq C_e$. Поэтому прямоугольник, ограничивающий область G_2 , пересекается фазовыми траекториями динамической системы (2.4) снаружи внутрь и содержит внутри себя, согласно теории индекса Пуанкаре, нечетное число простых

состояний равновесия, из которых число седел на единицу меньше числа антиседел ($\Delta_1 > 0$). Отсюда, согласно (3.3), (3.4), следует, что условие (3.7) является критерием единственности состояний равновесия, расположенных внутри области G_2 . Теорема доказана.

Следствия. 1°. Если функция m_Δ определяется формулой (2.5), то в силу теоремы 3.1 все состояния равновесия динамической системы (2.4) расположены в области G_1 , а критерий (3.7) их единственности имеет вид

$$(3.8) \quad C_1 \exp \left[E \left(1 - \frac{1}{\bar{T}_\Delta^\circ} \right) \right] \left[\frac{a+b}{a+L^{1/2}b} - \frac{EC_2C_\Delta^\circ}{(\bar{T}_\Delta^\circ)^2} \right] + a+b > 0$$

Поскольку из (3.2) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{C_1 \rightarrow 0} C_\Delta^\circ &= C_{\Delta 0}^\circ = \frac{aC_e + L^{1/2}bC_w}{a+L^{1/2}b}, & \lim_{C_1 \rightarrow 0} \bar{T}_\Delta^\circ &= \bar{T}_{\Delta 0}^\circ \frac{a+b\bar{T}_w}{a+b} \\ \lim_{C_1 \rightarrow \infty} C_\Delta^\circ &= C_{\Delta \infty}^\circ = 0, & \lim_{C_1 \rightarrow \infty} \bar{T}_\Delta^\circ &= \bar{T}_{\Delta \infty}^\circ = \frac{a+b\bar{T}_w}{a+b} + \\ &+ C_2 \frac{aC_e + L^{1/2}bC_w}{a+b} \end{aligned}$$

то в предельных случаях протекания химической реакции, когда $C_1 \rightarrow 0$ и $C_1 \rightarrow \infty$, критерий единственности (3.8) оказывается выполненным и динамическая система (2.4) имеет единственное антиседло. Нарушение условия (3.8) происходит лишь при промежуточных значениях первого числа Дамкеллера $C_1 : 0 < C_{1,1} < C_1 < C_{1,2} < \infty$, если параметр $H = EC_2C_e \gg \gg 1$. Бифуркационные значения $C_{1,1}, C_{1,2}$ параметра C_1 определяются из уравнения $\alpha_2 = \alpha_3$, если значения остальных параметров зафиксированы.

Если в рассматриваемом случае $L \gg 1$ или $L < 1, C_1 \leq C_1^*$ (см. соотношение (3.6)), то антиседла динамической системы устойчивы. При $L < 1$ и $C_1 > C_1^*$ возможны потеря устойчивости антиседел и существование неустойчивых антиседел в случае выполнения условия (3.4). При этом потеря устойчивости антиседла будет сопровождаться рождением устойчивого предельного цикла [13].

2°. Если $\bar{T}_w < 1, C_w < C_e$, а функция m_Δ удовлетворяет уравнению (2.6), в котором $C_3 \geq 1.75$ (по данным из работы [14] $C_3 = 4.022$), то динамическая система (2.4) имеет в области G_2 единственное состояние равновесия — устойчивый узел, причем предельные циклы отсутствуют в области G_2 .

Действительно, при $C_3 \geq 1.75$ всюду в области G_2 имеем

$$\frac{\partial m_\Delta}{\partial \bar{T}_\Delta} \equiv - \frac{3.5}{\bar{T}_\Delta^{4.5} (1 + C_\Delta)} \left[C_\Delta^2 + \left(\frac{C_3}{1.75\bar{T}_\Delta} - 1 \right) C_{\Delta E}^2 \right] < 0$$

В силу теоремы 3.2, соотношений (3.3) и условий (3.7) отсюда следует, что в области G_2 существует единственное состояние равновесия — устойчивый узел, а предельные циклы отсутствуют в области G_2 согласно критерию Бендиксона [13].

Из полученных результатов вытекает вывод о существовании, единственности и устойчивости стационарного режима и отсутствии колеба-

тельных и автоколебательных режимов тепломассопереноса в случае обтекания лобовой точки холодного термостата диссоциированным воздухом при наличии интенсивного вдува не реагирующего газа.

Этот вывод согласуется с выводом о единственности стационарного режима теплообмена лобовой точки термостата с потоком диссоциированного воздуха, сделанным в работе [15] на основании физических соображений, и с численными результатами работы [9].

Результаты п. 4, согласно которым динамическая система (2.4) в случае аррениусовской зависимости скорости реакции от температуры имеет при $L = 1$, $H \gg 1$ и $C_{1,1} < C_1 < C_{1,2}$ несколько устойчивых состояний равновесия, согласуются с результатами работ [16,17], в которых при $L = 1$ и $H \gg 1$ ($H = 432.7$) в результате численного анализа теплового взаимодействия горючей смеси с инертным термостатом как при отсутствии вдува ($f_w = 0$), так и при наличии вдува инертного газа ($f_w = -0.15$; -0.3 ; -0.5) действительно было обнаружено существование двух критических значений первого числа Дамкеллера, определяющих область существования трех стационарных решений системы уравнений сохранения. Как показано в [16,17], критические значения параметра C_1 соответствуют воспламенению и погасанию смеси.

4. Сведение сопряженной краевой задачи (1.2) — (1.4) к динамической системе. Рассмотрим случай, когда в результате газификации обтекаемого тела со сферическим затуплением ($\beta_1 = 1/2$) реализуется интенсивный вдув химически активного газа. Дважды интегрируя по y_s уравнение (1.3), с учетом первых четырех граничных условий (1.4) находим

$$(4.1) \quad K_s \left(\frac{\partial \Theta_s}{\partial y_s} \right)_w = \sqrt{\pi_t} R_1 \pi_s f_w \left[\Theta_w + \Theta_{sH} + \int_0^\infty J(y_s) dy_s \right]$$

$$I(y_s) = \exp \left(-\gamma \sqrt{\pi_x} \frac{\rho_w}{\rho_s} R_1 y_s \right) \int_0^{y_s} \frac{\partial \Theta_s}{\partial \tau} \exp \left(\gamma \sqrt{\pi_x} \frac{\rho_w}{\rho_s} R_1 y_s \right) dy_s$$

Подстановка выражения для $(\partial \Theta / \partial \eta)_w$, получающегося из третьего уравнения (1.2), в котором, согласно [4-6], можно положить $\Theta' = 0$ при $\eta = 0$, и соотношения (4.1), в котором несобственный интеграл вычислен при помощи приема, описанного в [10], в первое граничное условие (1.4) приводит к уравнению

$$(4.2) \quad \frac{d\Theta_w}{d\tau} = Q_1(C_w, \Theta_w) \equiv \left[\left(1 + \pi_p \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) \gamma \right]^{-1} \{ \alpha_2 \pi_q \pi_s R_2 +$$

$$+ \gamma^2 \varphi_1 R_1 \{ [\alpha_1 - \gamma \pi_c (\Theta_w + \Theta_{sH})] \varphi_2 R_1 +$$

$$+ \pi_\sigma [(1 + \beta \Theta_s)^4 - (1 + \beta \Theta_w)^4] \}$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(\Theta_w) = \frac{\lambda_e}{\lambda_w}, \quad \varphi_2 = \varphi_2(C_w, \Theta_w) = \frac{\rho_w}{\rho_e}$$

Второе уравнение получим из второго условия (1.4) при подстановке в последнее величины $(\partial C / \partial \eta)_w$, найденной из четвертого уравнения (1.2), записанного при $\eta = 0$ в соответствии с результатами [4-6].

$$(4.3) \quad \frac{dC_w}{d\tau} = P_1(C_w, \Theta_w) \equiv -\pi_s R_2 + \gamma^2 \varphi_1 \varphi_2 R_1^2 \frac{1 - C_w}{L}$$

5. Анализ динамической системы (4.2), (4.3) и физическая интерпретация результатов. При рассмотрении динамической системы (4.2), (4.3) из физических соображений достаточно ограничиться частью фазовой плоскости C_w, Θ_w , для которой выполнены следующие условия:

$$(5.1) \quad 0 < C_w < 1, \quad 0 < 1 + \beta\Theta_w < \infty, \quad R_1(C_w, \Theta_w) > 0$$

вытекающие из определения β, C_w, Θ_w и из гипотезы о сильном вдуве. В силу определения функций $\varphi_1, \varphi_2, R_1, R_2$ выполняются условия

$$(5.2) \quad \frac{\partial}{\partial C_w}(\varphi_2 R_1) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Theta_w}(\varphi_2 R_1) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Theta_w}(\varphi_2 R_2) > 0$$

Для простоты можно принять $\varphi_1 = \sqrt{(1 + \beta\Theta_e) / (1 + \beta\Theta_w)}$; зависимость $\varphi_2 = \varphi_2(C_w, \Theta_w)$ определяется в соответствии с (1.2). Все параметры, входящие в уравнения (4.2), (4.3), — вещественные и положительные, за исключением параметров α_1, α_2 , которые равны плюс 1 для случая экзотермических реакций и минус 1 для эндотермических.

Теорема 5.1. Пусть выполняются следующие условия:

$$(5.3) \quad \alpha_2 = +1, \quad \lim_{C_w \rightarrow 0} (\varphi_2 R_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial C_w}(\varphi_2 R_2) > 0$$

Тогда справедливы утверждения:

1) динамическая система (4.2), (4.3) имеет в рассматриваемой области (3.1) фазовой плоскости нечетное число простых состояний равновесия, причем число седел на единицу меньше числа антиседел (узлов и фокусов);

2) если все антиседла неустойчивы, то в области (3.1) существует хотя бы один устойчивый предельный цикл, содержащий внутри себя неустойчивые состояния равновесия.

Условия (3.3) теоремы имеют простой физический смысл: газофазная реакция является необратимой экзотермической реакцией положительного порядка. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1.

Из теоремы 5.1 и существующего соответствия между знаками величин, аналогичных величинам σ_1, Δ_1, D_1 , и характером состояний равновесия системы (4.2), (4.3) вытекают критерии единственности и устойчивости стационарных режимов и условия существования автоколебательных режимов тепломассообмена с мягким возбуждением. Интересно, что необходимое условие существования автоколебательных режимов с мягким возбуждением, неустойчивых стационарных режимов, а также колебательных режимов интенсивного термохимического разрушения, полученное из указанных критериев, имеет вид

$$(5.4) \quad \frac{\partial}{\partial \Theta_w} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) > 0$$

В случае экспоненциальных зависимостей функций R_1 и R_2 от Θ_w условие (5.4) принимает вид $\lambda_E = E_2 / E_1 > 1$.

Наличие необходимого условия (5.4) существования режима автоколебаний наводит на мысль о возможном физическом механизме этих авто-

колебаний. По-видимому, он аналогичен механизму термокинетических колебаний, описанному в [18] при рассмотрении двухстадийной реакции.

Представляет интерес проверка условия (5.4) для ряда конкретных примеров термохимического разрушения. В случае интенсивного разрушения большинства теплозащитных (например углеграфитовых сублимирующихся) материалов, когда величина E_1 достаточно велика ($E_1 \sim 170$ ккал / моль), условие (5.4) не выполняется, поэтому не следует ожидать и дестабилизирующего влияния газофазных экзотермических реакций на процесс термохимического разрушения. Аналогичный вывод, по-видимому, можно сделать и для случая быстрого горения при высоком давлении баллистического пороха H , для которого $\pi_E \sim 1$. Напротив, при горении летучих взрывчатых веществ, например нитроглицерина и нитрогликоля (для последнего $\pi_E = 2.76$ [2]), с ростом давления возможно возникновение нестационарных явлений, в частности, перехода горения в детонацию [2].

Поступила 9 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев А. Ф. О горении взрывчатых веществ. Ж. физ. хим., 1938, т. 12, вып. 1.
2. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, вып. 11—12.
3. Mills A. F. The effect of gas phase chemical reactions on heat transfer to a charring ablator. J. Spacecraft and Rockets, 1971, vol. 8, No. 6.
4. Кубота Т., Фернандес Г. Пограничный слой с большим вдувом и теплопереносом. Ракетная техника и космонавтика, 1968, № 1.
5. Гершбейн Э. А. Об автомодельных численных и асимптотических решениях уравнений пограничного слоя при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
6. Зинченко В. И. Исследование влияния объемных химических реакций на характеристики течения ламинарного пограничного слоя при интенсивных вдувах. В сб.: Математическое моделирование аэротермохимических явлений. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1974.
7. Душин Ю. А. Работа теплозащитных материалов в горячих газовых потоках. Л., «Химия», 1968.
8. Турский Г. А. Вычисление эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном диссоциированном многокомпонентном пограничном слое. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
9. Агранат В. М., Берцун В. Н., Гришин А. М., Зинченко В. И. Постановка и решение некоторых новых сопряженных задач нестационарного тепло- и массообмена реагирующих тел с потоком реакционноспособного газа. В сб.: Теплообмен — 5, т. 2. Минск, 1976.
10. Агранат В. М., Гришин А. М. Качественное исследование режимов нестационарного горения в пограничном слое. В сб.: Численные методы механики сплошной среды, т. 8, № 5. Новосибирск, СО АН СССР, 1977.
11. Winergardner D. K., Schmitz R. H. Dynamics of heterogeneous reaction at a stagnation point. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 9.
12. Гулинский М. М. Нестационарные режимы обтекания затупленного тела, связанные с сильным вдувом газа через поверхность. Научн. тр. Ин-та механики, № 44. Изд-во МГУ, 1976.
13. Баутин Н. Н., Леонтович Е. Е. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1976.
14. Fay J. A., Riddell F. R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 2.
15. Chung P. M., Fendell F. E., Holt J. F. Nonequilibrium anomalies in the development of diffusion flames. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 6.
16. Alkidas A., Durbetaki P. Stagnation-point heat transfer: the effect of the first Damköhler similarity parameter. Trans. ASME, Ser. C. J. Heat Transfer, 1972, vol. 94, No. 4.
17. Durbetaki P., Hsu H. W. Stagnation point heat transfer: ignition of a combustible mixture with inert gas injection through a porous wall. Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer, 1975, vol. 97, No. 4.
18. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.