Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. И. Седенко, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Признак устойчивости стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости, указанный В. И. Арнольдом [1,2] для течения жидкости, ограниченной твердыми стенками, переносится на случай, когда часть границы области течения свободна и на ней действует поверхностное натяжение.

Метод [1, 2] представляет собой вариант второго метода Ляпунова и близок также к методу связки интегралов Четаева [3], примененному в [4] для исследования устойчивости движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью, осуществляющей потенциальное течение. Теорема Гельмгольца — Томсона о сохранении вихрей приводит к существованию инвариантного слоения (слоения Гельмгольца) в рассматриваемой динамической системе. Стационарным течениям соответствуют критические точки функционала энергии на слоях этого слоения, а если критическая точка — невырожденный максимум или минимум, то соответствующее стационарное течение устойчиво. В результате критерием устойчивости оказывается знакоопределенность некоторого квадратического функционала — второй вариации энергии на слое Гельмгольца.

Общий признак устойчивости применяется к параллельным течениям над твердым дном и круговым течениям. Оказывается, что выпуклый профиль устойчивого течения должен монотонно возрастать от твердой стенки к свободной границе, а вогнутый — монотонно убывать.

1. Динамическая система и инвариантное слоение. Пусть $D(t)$ — зависящая от времени t область трехмерного пространства R^3 с гладкой границей $\Gamma(t)$, заполненная идеальной несжимаемой жидкостью, находящейся под действием потенциальных массовых сил с потенциалом $U(x)$. Граница $\Gamma(t)$ состоит из неподвижной твердой стенки Γ_1 и свободной границы $\Gamma_2(t)$, причем Γ_1 и $\Gamma_2(t)$ не пересекаются при всех t. Тогда скорость $\mathbf{v}(x, t)$ и давление $p(x, t)$ в области $D(t)$ удовлетворяют для всех t уравнениям Эйлера (в форме Громеки — Ламба) и граничным условиям

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \times \mathbf{r} - \operatorname{grad} q, \quad \mathbf{r} = \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad q = U + p + {}^1/_2\, v^2 \\
& \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\
& v_n(x, t) = \mathbf{v}\mathbf{n} = 0, \; x \in \Gamma_1, \; v_n(x, t) = \varkappa_n \\
& x \in \Gamma_2(t), \quad p(x, t) = 2\sigma H(x, t)
\end{aligned}
$$

Здесь $\sigma \geqslant 0$ — коэффициент поверхностного натяжения, H — средняя кривизна поверхности $\Gamma_2(t)$ в точке x, выражаемая через главные радиусы кривизны формулой

$$H = {}^1/_2\ (1\ /\ R_1 + 1\ /\ R_2)$$

R_1 и R_2 считаются положительными, если они направлены внутрь области $D\ (t)$, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к границе области; $\varkappa_n$ — нормальная компонента скорости точки границы.

Теорема существования решений начально-краевой задачи для системы (1.1) неизвестна. Предположим, что решения, соответствующие слабым возмущениям устойчивых стационарных течений, существуют при всех $t \in [0, \infty)$.

Пусть M — множество пар $(D, \mathbf{v})$, где D — область с гладкой границей, частью которой является Γ_1, $\mathbf{v}$ — гладкое (вплоть до границы) соленоидальное векторное поле на D, причем $v_n\ (x) = 0$, $x \in \Gamma_1$ (здесь и далее под словом «гладкий» подразумевается бесконечно дифференцируемый). Уравнения (1.1) определяют на M динамическую систему.

Обобщая определения [1], назовем элементы $(D, \mathbf{v})$ и $(D', \mathbf{v}')$ из M равнозавихренными, если существует сохраняющее элемент объема гладкое отображение g области D на область D', такое, что $g\Gamma_1 = \Gamma_1$, и для любого замкнутого контура γ в области D

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v}\, dx = \oint_{g\gamma} \mathbf{v}'\, dx$$

Таким образом, на M задается слоение (слоение Гельмгольца), т. е. разбиение на классы эквивалентности: два элемента принадлежат одному слою тогда и только тогда, когда они равнозавихрены.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{v}\ (x,\ t)$ удовлетворяет уравнениям (1.1) в области $D\ (t)$ для всех $t \in (-\ \delta,\ \delta)$, $x\ (t)$ — траектория жидкой частицы. Тогда $(D\ (0),\ \mathbf{v}\ (x,\ 0))$ и $(D\ (t),\ \mathbf{v}\ (x,\ t))$ равнозавихрены, а отображение g переводит $x\ (0)$ в $x\ (t)$.

Эта формулировка теоремы Гельмгольца — Томсона о сохранении вихря, данная в [1], показывает, что слоение, определенное выше, инвариантно для динамической системы на M, определенной уравнениями Эйлера.

2. Первая и вторая вариации элементов из M вдоль слоев Гельмгольца. Под гладкой кривой на M будем понимать определенное при $|\,\tau\,| < \delta$ однопараметрическое семейство $(D\ (\tau),\ \mathbf{v}\ (x,\ \tau))$, такое, что 1) множество $\{(x,\ \tau)\colon x \in \partial D\ (\tau),\ |\,\tau\,| < \delta\}$ — гладкое подмногообразие в $R^3 \times (-\ \delta,\ \delta)$; 2) $\mathbf{u}\ (x,\ \tau) = (\mathbf{v}\ (x,\ \tau),\ 0)$ — гладкое вплоть до границы векторное поле в области $\{(x,\ \tau)\colon x \in D\ (\tau),\ |\,\tau\,| < \delta\}$.

Пусть гладкая кривая $(D\ (\tau),\ \mathbf{v}\ (x,\ \tau))$ целиком содержится в слое F инвариантного слоения. Тогда, по определению равнозавихренных элементов, существует однопараметрическое семейство гладких и сохраняющих элемент объема отображений $g_\tau : D\ (0) \to D\ (\tau)$, таких, что

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v}\,(x, 0)\, dx = \oint_{g_\tau \gamma} \mathbf{v}\,(x, \tau)\, dx \tag{2.1}$$

для любого контура $\gamma \subset D\ (0)$.

Пусть $(D, \mathbf{v})$ — элемент из M. Согласно разложению Вейля [4], $\mathbf{v}$ можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0,\ v_{1n}(x) = 0,\ x \in \partial D \tag{2.2}$$
$$\mathbf{v}_2 = \operatorname{grad} \alpha,\ v_{2n}(x) = v_n(x),\ x \in \partial D$$

Грубо говоря, $\mathbf{v}_1$ — скорость внутреннего перемешивания жидкости, а $\mathbf{v}_2$ соответствует течению, вызванному изменением свободной поверхности.

Вариации скорости вдоль кривой $(D(\tau), \mathbf{v}(x, \tau))$, согласно (2.2), имеют вид

$$\delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_2,\quad \delta^2 \mathbf{v} = \delta^2 \mathbf{v}_1 + \delta^2 \mathbf{v}_2$$

Пусть семейство g_τ из (2.1) определяется следующим образом: $g_\tau(x(0)) = x(\tau)$, где $x(\tau)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx / d\tau = \mathbf{f}(x, \tau)$$

Здесь $\mathbf{f}(x, \tau)$ — гладкое соленоидальное векторное поле, заданное в некоторой окрестности D при $|\tau| < \delta$, такое, что $\operatorname{div}_x f(x, \tau) = 0, f_n(x, \tau) = 0,\ x \in \Gamma_1$.

Лемма 1. Пусть замкнутый контур $\gamma \subset D$ и

$$\oint_{g_\tau^{-1}\gamma} \mathbf{v}_1(x, 0)\, dx = \oint_\gamma \mathbf{v}_1(x, \tau)\, dx$$

Тогда

$$\oint_\gamma (\mathbf{v}_1(x, \tau) - \mathbf{v}_1(x, 0))\, dx = \tau \oint_\gamma \mathbf{f}(x, 0) \times \mathbf{r}(x)\, dx +$$
$$+ \frac{\tau^2}{2} \oint_\gamma (\mathbf{f}(x, 0) \times \{\mathbf{f}(x, 0), \mathbf{r}(x)\} + \varphi(x) \times \mathbf{r}(x))\, dx + O(\tau^3)$$

Здесь $\mathbf{r}(x) = \operatorname{rot} \mathbf{v}_1(x, 0)$, $\{\mathbf{f}(x, 0), \mathbf{r}(x)\}$ — скобка Пуассона векторных полей $\mathbf{f}(x, 0)$, $\mathbf{r}(x)$; $\varphi(x) = (\partial \mathbf{f}(x, \tau) / \partial \tau)_{\tau=0}$. Аналогичная лемма была доказана для случая автономных векторных полей в [1]. Доказательство незначительно отличается от соответствующего доказательства в [1].

Следствие. Вариации поля $\mathbf{v}_1$ имеют вид

$$\delta v_1 = (\partial v_1(x, \tau) / \partial \tau)_{\tau=0} = \mathbf{f} \times \mathbf{r} + \operatorname{grad} \alpha_1 \tag{2.3}$$
$$\delta^2 \mathbf{v}_1 = (\partial^2 \mathbf{v}_1(x, \tau) / \partial \tau^2)_{\tau=0} = {}^1/_2 [\mathbf{f} \times \{\mathbf{f}, \mathbf{r}\} + \varphi \times \mathbf{r}] + \operatorname{grad} \alpha_2 \tag{2.4}$$
$$\operatorname{div} \delta \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \delta^2 \mathbf{v}_2 = 0$$
$$(d[\mathbf{v}_1(g_\tau x, \tau)\, \mathbf{n}(g_\tau x, \tau)] / d\tau)_{\tau=0} = 0$$
$$(d^2[\mathbf{v}_1(g_\tau x, \tau)\, \mathbf{n}(g_\tau x, \tau)] / d\tau^2)_{\tau=0} = 0$$

Здесь $x \in \partial D$, $n(g_\tau x, \tau)$ — орт внешней нормали к $\partial D(\tau)$ в точке $g_\tau x$; α_1 и α_2 определяются из трех последних соотношений (2.4).

Лемма 2.

$$\delta \mathbf{v}_2 = (\partial \mathbf{v}_2(x, \tau) / \partial \tau)_{\tau=0} = \operatorname{grad} \beta_1 \tag{2.5}$$
$$\delta^2 \mathbf{v}_2 = (\partial^2 \mathbf{v}_2(x, \tau) / \partial \tau^2)_{\tau=0} = \operatorname{grad} \beta_2 \tag{2.6}$$

Здесь β_1, β_2 — гармонические функции в D; краевые условия для них получим, дифференцируя по τ условие $v_n = \varkappa_n$ на границе и полагая $\tau = 0$.

Пусть $h_\tau : D \to D(\tau)$ ($|\tau| < \delta$) — однопараметрическое семейство сохраняющих элемент объема отображений, гладких по совокупности аргументов (x, τ). Тогда вариацией формы свободной поверхности, соответствующей деформации h_τ, назовем нормальное векторное поле на ∂D

$$(\delta \mathrm{D})\ (x) = (dh_\tau x \,/\, d\tau)_{\tau=0} \mathbf{n}\,(x),\ x \in \partial D$$

Следующая лемма оправдывает это название, показывая, что $\delta \mathrm{D}$ зависит только от изменения формы области D при деформации h_τ; в частности, $\delta \mathrm{D} = 0$, если $D(\tau) = D$ для малых τ.

Лемма 3. Пусть заданы две деформации h_τ^1, $h_\tau^2 : D \to D(\tau)$, тогда

$$[(dh_\tau^1 x \,/\, d\tau)_{\tau=0}]_n = [(dh_\tau^2 x \,/\, d\tau)_{\tau=0}]_n$$

Доказательство. В окрестности любой своей точки гладкую поверхность $(\partial D(\tau), \tau)$ в пространстве $R^3 \times R$ можно задать уравнением $F(x, \tau) = 0$, $|\operatorname{grad}_x F(x, \tau)| \neq 0$. Отсюда

$$\frac{d}{d\tau} h_\tau^i x n\,(h_\tau^i x, \tau) = -\frac{\partial F\,(h_\tau^i x, \tau)/d\tau}{|\operatorname{grad}_x F\,(h_\tau^i x, \tau)|}, \quad i = 1, 2 \tag{2.7}$$

Здесь $\mathbf{n}(h_\tau^i x, \tau)$ — внешняя нормаль к $\partial D(\tau)$ в точке $h_\tau^i x$, $i = 1, 2$. Положив в (2.7) $\tau = 0$, получаем утверждение леммы (см. также [6]).

Полная энергия жидкости, равная сумме кинетической энергии, потенциальной энергии поля массовых сил и поверхностной потенциальной энергии капиллярных сил, представляет собой функционал E на M, определяемый равенством

$$E = \int\limits_{D(t)} \left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + U\right) dx + \sigma \int\limits_{\Gamma_2(t)} ds$$

3. Вариационный принцип и вариация энергии. *Теорема 2.* Соленоидальное векторное поле $\mathbf{v}(x)$ есть скорость стационарного течения жидкости в области D тогда и только тогда, когда энергия E на слое Гельмгольца имеет в точке $(D, \mathbf{v})$ локальный экстремум.

Доказательство. Вычислим первую вариацию E в точке $(D, \mathbf{v})$. Используя формулы для производных от интеграла по области [6] и по поверхности (см., например, [7, 8]), зависящих от параметра, из (2.3), (2.5) с учетом (1.1) получим

$$\begin{aligned}
\delta E = \left.\frac{dE}{d\tau}\right|_{\tau=0} &= \int\limits_D \mathbf{v}\delta\mathbf{v}\, dx + \int\limits_{\partial D} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + 2\sigma H\right) f_n\, dS = \\
&= -\int\limits_D \mathbf{f} \operatorname{grad} q\, dx + \int\limits_{\partial D} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + 2\sigma H\right) f_n\, dS = \\
&= \int\limits_{\partial D} (2\sigma H - p) f_n\, dS = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Обратно, пусть $\delta E = 0$. Положив в (2.3) $\mathbf{f}|_{\tau=0} \equiv 0$, получим

$$0 = \int_D \mathbf{v} \operatorname{grad} \beta_1 \, dx = \int_{\partial D} v_n \beta_1 dS$$

откуда следует, что $v_n = 0$ на ∂D.

Далее, для произвольного гладкого соленоидального векторного поля f из (2.3), (2.5), (3.1) имеем

$$0 = \int_D \mathbf{f} \left(\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + U + 2\sigma H\right) dx\right.$$

Отсюда, согласно разложению Вейля, получаем, что существует функция $p(x)$ такая, что

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \operatorname{grad} (\mathbf{v}^2 / 2 + U) = -\operatorname{grad} p, \; p(x) = 2\sigma H(x), \; x \in \partial D$$

Теорема доказана.

Прежде всего отметим, что для нормальных вариаций $\mathbf{N}$ свободной поверхности Γ_2 вариация средней кривизны выражается по формуле

$$\delta H = (2K - 4H^2) N - \Delta N \tag{3.2}$$

Здесь K — произведение главных кривизн, Δ — оператор Лапласа — Бельтрами поверхности Γ_2 (см., например, [8]). Продолжим среднюю кривизну $H(x, \tau)$ как функцию, определенную на поверхности $(\partial D(\tau), \tau)$ ($|\tau| < \delta$) в R^4, на некоторую окрестность этой поверхности в R^4. Учитывая, что, согласно лемме 3, в (3.2) $\mathbf{N} = f_n$ и используя формулы для производных от интегралов по области и поверхности, зависящих от параметра τ, из (2.4), (2.6) получаем

$$2\delta^2 E = \int_D I \, dx + \int_{\partial D} (J_1 + J_2) \, dS \tag{3.3}$$

$$I = (f \times r + \operatorname{grad} \alpha_1)^2 + (\operatorname{grad} \beta_1)^2 + (v \times f)\{f, r\}$$

$$J_1 = (2v(f \times r + \operatorname{grad} (\alpha_1 + \beta_1)) + \operatorname{grad} (v^2/2 + U) f) f_n$$

$$J_2 = f_n dH_S(f) + \sigma((\nabla f_n)^2 + (2K - 4H^2)(f_n)^2$$

Отметим, что при $\mathrm{f}_n \equiv 0$ на ∂D и $\beta_1 = 0$ на D формула (3.3) совпадает с формулой (5.1) из [1] для случая течений жидкости в сосуде с твердыми стенками. Таким образом, если стационарное течение со свободной границей устойчиво, то оно остается устойчивым, когда свободная граница заменяется твердой стенкой (принцип отвердения).

4. Устойчивость симметричных течений. Пусть твердая стенка Γ_1 и потенциал U инвариантны относительно сдвигов вдоль оси Ox_1. Будем рассматривать такие движения жидкости, для которых свободная граница $\Gamma_2(t)$ и поле скоростей периодичны по x_1 с фиксированным периодом l. Тогда уравнения движения допускают интеграл

$$L_1 = \int_0^l \int_{S(x_1, t)} \mathbf{v}\mathbf{e}_1 \, dx$$

Здесь $S(x_1, t)$ — сечение области $D(t)$ плоскостью, ортогональной Ox_1 и проходящей через точку $(x_1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — координатные орты.

Аналогично, если твердая стенка Γ_1 и потенциал U инвариантны относительно вращения вокруг оси Ox_3, то уравнения Эйлера (1.1) — (1.3) имеют интеграл момента количества движения

$$K_3 = \int\limits_{D(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{R}) \mathbf{e}_3 \, dx, \quad \mathbf{R} = (x_1, x_2, x_3)$$

Теорема 3. Функционал L_1 на слое Гельмгольца имеет в точке $(D, \mathbf{v})$ экстремум тогда и только тогда, когда $\mathbf{v}$ — скорость стационарного течения в области D, инвариантного относительно сдвигов вдоль оси Ox_1.

Теорема 4. Функционал K на слое Гельмгольца имеет в точке $(D, \mathbf{v})$ экстремум тогда и только тогда, когда $\mathbf{v}$ — скорость стационарного течения в области D, инвариантного относительно вращения вокруг оси Ox_3.

Доказательства этих теорем полностью аналогичны доказательству теоремы 2.

Для вторых вариаций L_1 и K вдоль слоя Гельмгольца имеем

$$2\delta^2 L_1 = \int\limits_0^l \int\limits_{S(x_1)} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{f}) \{\mathbf{f}, \mathbf{r}\} \, dx + \int\limits_0^l \int\limits_{\partial S(x_1)} [2\mathbf{e}_1 (\mathbf{f} \times \mathbf{r} + \operatorname{grad}(\alpha_1 + \beta_1)) + \operatorname{grad}(\mathbf{v}\mathbf{e}_1)\, \mathbf{f}] \, f_n \, dS$$

$$2\delta^2 K_3 = \int\limits_D (\mathbf{R} \times e_3 \times \mathbf{f}) \{\mathbf{f}, \mathbf{r}\} \, dx + \iint\limits_{\partial D} [2(\mathbf{f} \times \mathbf{r} + \operatorname{grad}(\alpha_1 + \beta_1)) \mathbf{R}\mathbf{e}_3 + \operatorname{grad}((\mathbf{v} \times \mathbf{R}) \mathbf{e}_3)\, \mathbf{f}] \, f_n \, dS$$

Как и в [1], приходим к следующему достаточному условию устойчивости стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей.

Теорема 5. Если существует линейная комбинация вторых вариаций

$$\mu_1 \delta^2 E + \mu_2 \delta^2 L_1 + \mu_3 \delta^2 K_3 \tag{4.1}$$

взятых вдоль слоя Гельмгольца, являющаяся знакоопределенной квадратичной формой от $\mathbf{f}$, то стационарное течение в области D со скоростью $\mathbf{v}$ устойчиво относительно малых конечных возмущений скорости $\mathbf{v}$, вихря $\mathbf{r}$ и формы свободной поверхности.

5. Примеры. Рассмотрим устойчивость некоторых плоских стационарных течений идеальной жидкости со свободной границей относительно плоских возмущений.

Отметим, что для скорости $\mathbf{v}$ плоского стационарного течения и любого плоского векторного поля $\mathbf{f}$

$$\mathbf{r}(x) = (0, 0, \mathbf{r}(x)), \quad \delta\mathbf{r} = \{\mathbf{f}, \mathbf{r}\} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} f_2$$

1°. Устойчивость плоскопараллельных течений. Изучим устойчивость параллельного течения с полем скорости $\mathbf{v}(x) = (u(x_2), 0)$ в горизонтальном слое $D = \{(x_1, x_2): -\infty < x_1 < \infty, 0 \leqslant x_2 \leqslant a\}$. При этом $\Gamma_1 = \{(x_1, 0): -\infty < x_1 < \infty\}$ — твердая стенка, $\Gamma_2 = \{(x_1, a): -\infty < x_1 < \infty\}$ — свободная граница. Считаем, что жидкий слой находится под действием силы тяжести с потенциалом $U = gx_2$.

Положим в (4.1) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = -2u(a)$, $\mu_3 = 0$. Тогда

$$2\delta^2 E - 2u(a)\,\delta^2 L_1 = \int_0^l\int_0^a \left[(\delta \mathbf{v})^2 + \frac{u(x_2) - u(a)}{u''(x_2)}(\delta r)^2\right] dx_1\,dx_2 + \int_0^l \left[g(f_2)^2 + \sigma\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2\right] dx_1 \tag{5.1}$$

Для того чтобы квадратичная форма (5.1) была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$[u(x_2) - u(a)] \,/\, u''(x_2) > 0, \quad x \in [0, a) \tag{5.2}$$

Из теории осцилляции решений дифференциального уравнения второго порядка следует, что неравенство (5.2) выполняется лишь в двух случаях:

1) $u''(x_2) \geqslant 0, \quad u(x_2) \geqslant u(a)$

2) $u''(x_2) \leqslant 0, \quad u(x_2) \leqslant u(a)$!

В случае 1) функция $u(x_2)$ оказывается вогнутой и монотонно убывающей, в случае 2) — выпуклой и монотонно возрастающей.

Рассмотрим случай $a < 0$, соответствующий течению слоя жидкости по потолку. Аналогично предыдущему положим в (4.1) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = -2u(a)$, $\mu_3 = 0$. Тогда течение будет устойчиво, если выполняется (5.2) и, кроме того, $\sigma > gl^2 / (4\pi^2)$.

2°. *Устойчивость течений по концентрическим окружностям.* Исследуем устойчивость чисто вращательных течений в кольце $D = \{(x_1, x_2) : a \leqslant \rho \leqslant b\}$ $(\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$: $v_\rho = 0$, $v_\theta = v_\theta(\rho)$. Пусть $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2): \rho = b\}$ — твердая стенка, $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2): \rho = a\}$ — свободная граница; $\omega(\rho) = v_\theta(\rho) / \rho$ — угловая скорость частиц жидкости, $\psi(\rho)$ — функция тока основного течения. Положим в (4.1) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = -2\omega(a)$. В результате получаем условие устойчивости в виде

$$(\mathrm{grad}\,\psi - {}^1/_2\,\omega\, a\,\mathrm{grad}\,\rho^2) \,/\, \mathrm{grad}\, r \geqslant 0 \tag{5.3}$$

Условие (5.3) полностью аналогично условию (5.2) и определяет аналогичные профили устойчивых течений. Теперь, в отличие от предыдущего случая, твердой стенкой будем считать Γ_2, а свободной границей — Γ_1.

Положим в (4.1) $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = -2\omega(b)$. Тогда течение устойчиво, если выполняется (5.3) и кроме того, $\sigma > b^3\omega^2(b)$.

Поступила 13 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
2. *Арнольд В. И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 5.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
4. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
5. *Weyl H.* The method of ortogonal projection in potential theory. Duke Math. J., 1940, vol. 7, No. 411—444.
6. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Изд. 4, т. 2. М., Физматгиз, 1963.
7. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
8. *Кочин Н. Я.* Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. Изд. 9. М., «Наука», 1965.