Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531: 534. 01

О КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ В ЛИНЕЙНЫЕ ПРИ ОБРАЩЕНИИ ПАРАМЕТРА В НУЛЬ

В. Т. Грумондз

(Москва)

В работе [1] исследован вопрос о существовании и устойчивости относительно области N стационарных колебаний многомерных квазилинейных механических систем, уравнения движения которых, записанные в нормальной форме Коши, содержат в правых частях ряды, расположенные по степеням некоторого положительного параметра μ, причем при $\mu = 0$ система обращается в линейную, имеющую в характеристическом уравнении пару чисто мнимых корней и n корней с отрицательными вещественными частями; указан также алгоритм построения области N.

Ниже результаты работы [1] распространяются на случай многомерных систем, обращающихся при $\mu = 0$ в нелинейные. Двумерные механические системы такого типа исследовались в работах [2,3]. Характеристические уравнения рассматриваемых ниже систем имеют в критической системе либо пару чисто мнимых корней, либо два нулевых корня с одной или двумя группами решений и n корней с отрицательными вещественными частями — в присоединенной. Показано, что для исследования таких систем требуется наложить на систему некоторые дополнительные ограничения по сравнению с [1]. Вспомогательные функции $u_k^{(1)}(\theta)$, участвующие в определении функции Ляпунова, вычисляются иначе, чем в [1-3]. В двух из трех исследованных случаев задача сводится к нахождению корней некоторой целой вещественной иррациональной функции. Рассмотрен пример.

1. Рассмотрим механическую систему, дифференциальные уравнения движения которой в нормальной форме Коши имеют вид

$$x^{\cdot} = X_0(x, y) + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l X_l(x, y, x_1, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

$$y^{\cdot} = Y_0(x, y) + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l Y_l(x, y, x_1, \ldots, x_n)$$

$$x_j^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}x_k + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l X_{jl}(x, y, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

и для которой критическая система при $\mu = 0$ обращается в следующую нелинейную:

$$x^{\cdot} = X_0(x, y), \; y^{\cdot} = Y_0(x, y) \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что для (1.1) выполнены все требования 1° — 4° работы [1], т. е. что правые части (1.1) представляют собой абсолютно сходящиеся ряды в исследуемой области U изменения переменных x, y, x_j

и параметра μ, X_l, Y_l, X_{jl} — суммы форм относительно переменных $x, y, x_1, \ldots, x_n$ любого конечного порядка ν_{xl}, ν_{yl}, ν_{jl} с постоянными коэффициентами, причем низшие степени форм η_{xl}, η_{yl}, η_{jl} больше единицы, корни многочлена $D(\varkappa) = |p_{ij} - \delta_{ij}\varkappa|$ различны и имеют отрицательные вещественные части, правые части критической системы обращаются в нуль при $x = y = 0$. Заметим, что если для системы (1.1) последнее условие не выполняется, то в отличие от [1] ее можно привести к требуемому виду лишь в случае, когда $h_1\varkappa_1 + \ldots + h_n\varkappa_n \neq 0$ для любых целых неотрицательных чисел h_k, таких, что $\Sigma h_k > 0$ [4]. Будем также полагать, что для (1.1) выполнены следующие условия.

1°. Функции X_0, Y_0 имеют вид

$$X_0(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=m_0} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \quad Y_0(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=m_0} b_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \quad m_0 > 0 \tag{1.3}$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — постоянные коэффициенты.

2°. Функции $F(x, y) = xY_0 - yX_0$, $R(x, y) = xX_0 + yY_0$ таковы, что $F(x, y)$ — знакоопределенная, а $\varphi(2\pi) = 0$, где

$$\varphi(\theta) = \int_0^\theta \frac{R(\cos\psi, \sin\psi)}{F(\cos\psi, \sin\psi)} d\psi$$

3°. $m_1 \geqslant m_0$, где $m_1 = \min\{m_{x1}, m_{y1}\}$, m_{xl}, m_{yl} — минимальные степени форм, свободных от $x_1, \ldots, x_n$ в критической системе.

Тем же способом, что и в [1], преобразуем (1.1) к каноническому виду и далее сделаем замену $x = \bar r\cos\theta$, $y = \bar r\sin\theta$. Получим вместо (1.1) следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\bar r^\cdot = \bar R_0(\bar r, \theta) + \sum_{l=1}^\infty \mu^l \bar R_l(\bar r, \theta, z_1, \ldots, z_n)\\
&\theta^\cdot = \bar F_0(\bar r, \theta) + \sum_{l=1}^\infty \mu^l \bar F_l(\bar r, \theta, z_1, \ldots, z_n)\\
&z_k^\cdot = g_k z_k - h_k z_{T+k} + \sum_{l=1}^\infty \mu^l \bar Z_{kl}(\bar r, \theta, z_1, \ldots, z_n)\\
&\dot z_{k+T} = h_k z_k + g_k z_{T+k} + \sum_{l=1}^\infty \mu^l \bar Z_{k+T,\,l}(\bar r, \theta, z_1, \ldots, z_n)\\
&z_s^\cdot = d_s z_s + \sum_{l=1}^\infty \mu^l \bar Z_{sl}(\bar r, \theta, z_1, \ldots, z_n), \quad k = 1, 2, \ldots, T\\
&s = 2T + 1, \ldots, n\\
&\bar R_0(\bar r, \theta) = X_0(\bar r\cos\theta, \bar r\sin\theta)\cos\theta + Y_0(\bar r\cos\theta, \bar r\sin\theta)\sin\theta\\
&\bar F_0(\bar r, \theta) = \frac{1}{\bar r}[Y_0(\bar r\cos\theta, \bar r\sin\theta)\cos\theta - X_0(\bar r\cos\theta, \bar r\sin\theta)\sin\theta]
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Функции $\bar R_l$, $\bar F_l$, $\bar Z_{\alpha l}$ нетрудно записать, зная коэффициенты преобразования к каноническому виду [1].

Для решения вопроса о существовании и устойчивости относительно области стационарных в смысле [2] колебаний в системе (1.4) попытаемся воспользоваться результатами работы [1]. Для этого необходимо прежде всего так преобразовать (1.4), чтобы освободиться от нелинейных функций $\bar{R}_0$, $\bar{F}_0$ в правых частях критической системы. Поступим следующим образом. Заметим, что система (1.2), записанная с помощью переменных $\bar{r}$, θ, при выполнении условий 1° и 2° имеет периодическое решение $\bar{r} = \bar{r}_0 e^{\varphi(\theta)}$, где $\bar{r}_0$ — произвольная постоянная. Сделаем теперь в (1.4) замену [2]

$$\bar{r} = re^{\varphi(\theta)} \tag{1.5}$$

где r — новая переменная. Критическая система примет вид

$$r^{\cdot} = \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l R_l(r, \theta, z_1, \ldots, z_n), \quad \theta^{\cdot} = F_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l F_l(r, \theta, z_1, \ldots, z_n) \tag{1.6}$$
$$R_l = e^{-\varphi(\theta)}\bar{R}_l - rf(\theta)\bar{F}_l, \quad f(\theta) = \frac{R(\cos\theta, \sin\theta)}{F(\cos\theta, \sin\theta)}$$
$$F_0(r, \theta) = \frac{1}{r^2} e^{-2\varphi(\theta)} F(re^{\varphi(\theta)}\cos\theta, re^{\varphi(\theta)}\sin\theta)$$
$$F_l(r, \theta, z_1, \ldots, z_n) = \bar{F}_l(re^{\varphi(\theta)}, \theta, z_1, \ldots, z_n)$$

Вид присоединенной системы не изменится. Функции $Z_{\alpha l}(r, \theta, z_1, \ldots, z_n)$ при μ^l получатся из $\bar{Z}_{\alpha l}(\bar{r}, \theta, z_1, \ldots, z_n)$ как результат замены (1.5). Функции R_l, F_l, $Z_{\alpha l}$ — суммы форм относительно $r, z_1, \ldots, z_n$ с коэффициентами, являющимися 2π-периодическими функциями от θ, так что формально их структура такая же, как и структура соответствующих функций в [1]. Функции (1.6) в точности совпадут с функциями R_l, F_l [1], если положить $f(\theta) \equiv 0$. Функция $F_0(r, \theta) = r^{m_0-1}F_0^{(m_0-1)}(\theta)$ является знакоопределенной согласно предположению 2°, так что $F_0^{(m_0-1)} \neq 0$ при всех $\theta \in [0, 2\pi)$, $r > 0$.

Введем теперь новую переменную ρ согласно замене

$$r = \rho + \mu \sum_{q=1}^{M_1} \rho^q u_1^{(q)}(\theta), \quad M_1 = \max\{M_{x1}, M_{y1}\} \tag{1.7}$$

Здесь M_{x1}, M_{y1} — максимальные порядки форм, входящих в X_1, Y_1 и не зависящих от $z_1, \ldots, z_n$, $u_1^{(q)}(\theta)$ — некоторые, пока неизвестные 2π-периодические функции, величина μ предполагается настолько малой, что во всей области исследования U функция ρ, являющаяся решением (1.7), определенно-положительна при всех $r > 0$ и любых θ; при тех же условиях предполагается, что $r > 0$, $H = \partial r(\rho, \theta)/\partial\rho > 0$. Выберем функции $u_1^{(q)}$, $u_1^{(q)}(0) = 0$ так, чтобы они были 2π-периодическими и чтобы в результате преобразования (1.7) выражение при μ в правой части первого уравнения критической системы получило вид суммы многочлена

$$L_1(\rho) = \sum_{q=m_1}^{M_1} \rho^q g_1^{(q)}$$

с постоянными коэффициентами $g_1^{(q)}$ и некоторой функции вида

$$\mu R_{11} = \mu \sum_{k=0}^{N_1-1} \rho^k R_1^{(2,k)}(\theta, z_1, \ldots, z_n), \quad N_1 = \max\{\nu_{x1}, \nu_{y1}\}$$

Из этого условия функции $u_1^{(q)}(\theta)$ определятся единственным образом в силу выполнения требований 1° и 2°. Уравнения, их определяющие, дадут, в отличие от [1], следующее решение для $u_1^{(q)}(\theta)$ и для коэффициентов многочлена $L_1(\rho)$:

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = \ldots = u_1^{(m_1-m_0)} = u_1^{(M_1-m_0+2)} = u_1^{(M_1-m_0+3)} = \ldots = u_1^{(M_1)} \equiv 0$$

$$u_1^{(s-m_0+1)} = \int_0^\theta \frac{R_1^{(1,s)}(\theta) - g_1^{(s)}}{F_0^{(m_0-1)}(\theta)} d\theta$$

$$g_1^{(m_0)} = g_1^{(m_0+1)} = \ldots = g_1^{(m_1-1)} = g_1^{(M_1+1)} = g_1^{(M_1+2)} = \ldots$$

$$\ldots = g_1^{(M_1+m_0-1)} = 0$$

$$g_1^{(s)} = \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{F_0^{(m_0-1)}(\theta)}\right]^{-1} \int_0^{2\pi} \frac{R_1^{(1,s)}(\theta)}{F_0^{(m_0-1)}(\theta)} d\theta \quad (s = m_1, \ldots, M_1)$$

Здесь $R_1^{(1,s)}(\theta)$ — коэффициенты при ρ^s функции R_1 в (1.6).

После определения функций $u_1^{(q)}$ и постоянных $g_1^{(q)}$ получим систему уравнений, состоящую из критической вида

$$\rho^{\cdot} H = \mu L_1(\rho) + \mu R_{11}(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n) + \mu^2 P_2(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n, \mu) \tag{1.8}$$

$$\theta^{\cdot} = F_0(\rho, \theta) + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l F_l(\rho, \theta, z_1, \ldots, z_n)$$

и присоединенной, получающейся из (1.4) с помощью (1.5) и (1.7). Таким образом, исследуемая система (1.1) приведена к форме, полученной в [1]. Отличие от [1] состоит лишь в виде периодических коэффициентов форм, при выводе которых было использовано преобразование (1.5). Дальнейшее исследование проводится в точности так же, как и в [1]. Теоремы 1—3 [1] о существовании стационарных колебаний, их устойчивости относительно области $N \subset U$ и оценке μ и параметров области N остаются справедливыми, однако сами оценки претерпевают изменения, связанные с применением преобразования (1.5).

2. Пусть движение механической системы описывается системой дифференциальных уравнений, состоящей из критической системы

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l X_l, \quad y^{\cdot} = \lambda x + Y_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l Y_l \tag{2.1}$$

которая при $\mu = 0$ обращается в нелинейную систему вида

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X_0, \quad y^{\cdot} = \lambda x + Y_0 \tag{2.2}$$

имеющую в характеристическом уравнении пару чисто мнимых корней, и присоединенной, состоящей из тех же n уравнений, что и в (1.1). Вид функций X_0, Y_0, X_l, Y_l, X_{sl} ($l = 1, 2, \ldots; s = 1, 2, \ldots, n$) — тот же, что и в (1.1). Относительно исследуемой системы сделаем те же предположения, что и в начале п. 1 относительно (1.1), кроме предположений 1° — 3°. Заметим, что, как и в [1], приведение к виду, в котором правые части (2.1) обращаются в нуль при $x = y = 0$, при выполнении поставленных условий всегда возможно [4].

Сделаем, кроме того, следующие дополнительные предположения:

1°. Функции X_0, Y_0 имеют вид (1.3), где $m_0 \geqslant 2$, $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — постоянные коэффициенты, причем функция $Q = \lambda\,(x^2 + y^2) + F\,(x, y)$ определенно-положительна во всей области исследования U.

2°. Для системы (2.2) существует знакоопределенный голоморфный интеграл $I\,(x, y) = c^2$, где $I = x^2 + y^2 + \Phi\,(x, y)$, а Φ — функция не ниже третьего порядка относительно x, y, причем I сохраняет знакоопределенность во всей области исследования движений.

Как известно [4], условие существования такого интеграла является необходимым и достаточным условием существования в (2.2) периодических решений вида $x = x^{(1)}c + x^{(2)}c^2 + \ldots$, $y = y^{(1)}c + y^{(2)}c^2 + \ldots$, где c — произвольная постоянная, $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ — периодические функции. Уравнение $r^2 + \Phi\,(r\cos\theta, r\sin\theta) = c^2$ при сделанных предположениях определяет, согласно [4], два решения для r в виде сходящихся рядов $r = \pm c + v_2\cdot$ $\cdot(\theta)\,c^2 \pm v_3\,(\theta)\,c^3 + \ldots$, $v_k^*\,(\theta)$ — периодические функции θ, причем поскольку при замене θ на $\pi + \theta$ одно из этих решений переходит в другое, будем брать в этом выражении все члены с плюсом.

Производя, как и в п. 1, переход к каноническим переменным, а затем — к полярным координатам по формулам $x = \bar r\cos\theta$, $y = \bar r\sin\theta$, заменим далее $\bar r$ через r подстановкой

$$r^2 = \bar r^2 + \Phi\,(\bar r\cos\theta, \bar r\sin\theta) \tag{2.3}$$

Ряд $\bar r = r + v_2\,(\theta)\,r^2 + v_3\,(\theta)\,r^3 + \ldots$, представляющий собой решение (2.3), будем считать абсолютно сходящимся во всей области $U \supset N$ исследования решений. В результате критическая система примет вид

$$r^{\bullet} = \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l R_l(r, \theta, z_1, \ldots, z_n), \quad \theta^{\bullet} = \lambda + Q_0(r, \theta) + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l F_l(r, \theta, z_1, \ldots, z_n) \tag{2.4}$$

а присоединенная — тот же, что и выше, однако с учетом замены (2.3). Младшие по r члены в полученной системе при каждом μ^s в точности совпадают с младшими по r членами при μ^s системы п. 1.

Введем новую переменную ρ согласно следующей замене:

$$r = \rho + \mu\sum_{l=1}^{\infty} \rho^l u_1^{(l)}(\theta) \tag{2.5}$$

где, как и в п. 1, будем предполагать, что $u_1^{(l)}\,(\theta)$ — $2\,\pi$-периодические функции, а μ достаточно мало для того, чтобы $r > 0$, $H = \partial r/\partial\rho > 0$. Кроме того, будем считать, что для всех $\rho \in U$, где $U \supset N$ — область исследования, ряд (2.5) абсолютно сходится для каждого $\theta \in [0, 2\,\pi)$. Необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять постоянные $g_1^{(l)}$, для того чтобы функции $u_1^{(l)}$ были $2\,\pi$-периодическими, в рассматриваемом случае несколько отличны от условий [1, 2] и условий п. 1. Определяя $g_1^{(l)}$ и $u_1^{(l)}$ из этих условий и требуя дополнительно $u_1^{(l)}\,(0) = 0$, получим:

в случае $m_1 < m_0$

$$u_1^{(m)}(\theta) \equiv 0, \quad g_1^{(m)} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, m_1 - 1) \tag{2.6}$$

$$u_1^{(k)}(\theta) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\theta [R_1^{(1,k)}(\theta) - g_1^{(k)}]\, d\theta,$$

$$g_1^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_1^{(1,k)}(\theta)\, d\theta \quad (k = m_1, \ldots, m_0 - 1)$$

$$u_1^{(i)}(\theta) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\theta [T^{(i)}(\theta) - g_1^{(i)}]\, d\theta, \quad g_1^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T^{(i)}(\theta)\, d\theta$$

$$\left(T^{(i)}(\theta) = R_1^{(1,i)}(\theta) - \sum_{s=1}^{i-m_0+1} Q_0^{(i-s)}(\theta)\frac{du_1^{(s)}}{d\theta}, \quad i = m_0, m_0 + 1, \ldots\right)$$

где $Q_0^{(\alpha)}$ — периодические коэффициенты при ρ^α функции

$$Q_0\left(\rho + \sum_{l=1}^{\infty} \rho^l v_l(\theta), \theta\right)$$

в случае $m_1 = m_0$ — те же решения, за исключением равенств во второй строке (2.6);

в случае $m_1 > m_0$: $u_1^{(m)} \equiv 0$, $g_1^{(m)} = 0$, $m = 1, \ldots, m_1 - 1$, а выражения для $u_1^{(m_1)}$, $g_1^{(m_1)}$, $u_1^{(m_1+1)}$, $g_1^{(m_1+1)}$, ... определятся согласно равенствам в третьей строке (2.6) при $i = m_1, m_1 + 1, \ldots$.

Первое уравнение преобразованной системы имеет формально тот же вид, что и первое уравнение в (1.8), с той лишь разницей, что вместо многочлена $L_1(\rho)$ в нем стоит ряд

$$L_1^\infty(\rho) = \sum_{q=m_1}^{\infty} \rho^q g_1^{(q)}$$

Дальнейшее исследование проводится аналогично изложенному в [1], однако в предположении абсолютной сходимости соответствующих рядов во всей области исследования $U \supset N$. Теоремы 1—3 [1] остаются справедливыми, однако вместо положительных корней нечетной кратности многочлена $L_1(\rho)$ при их формулировке следует рассматривать действительные положительные нули нечетной кратности вещественной целой иррациональной функции $L_1^\infty(\rho)$ [5].

В случае невозможности вычисления положительных корней функции $L_1^\infty(\rho)$ (или многочлена $L_1(\rho)$) рассмотренные здесь и в [1] построения допускают использование значений верхней и нижней границ расположения каждого такого корня, причем к точности их вычисления метод предъявляет минимальные требования. Так, если

$$\bar\rho_j - \Delta_j < \rho_j < \bar\rho_j + \Delta_j, \quad \bar\rho_{j+1} - \Delta_{j+1} < \rho_{j+1} < \bar\rho_{j+1} + \Delta_{j+1},$$
$$\bar\rho_{j-1} - \Delta_{j-1} < \rho_{j-1} < \bar\rho_{j-1} + \Delta_{j-1}$$

где $\bar\rho_s$ — приближенные значения корней ρ_s с точностью Δ_s, то требуется дополнительно, чтобы

$$\bar\rho_j + \Delta_j + \varepsilon_1 < \bar\rho_{j+1} - \Delta_{j+1}, \quad \bar\rho_j - \Delta_j - \varepsilon_2 > \bar\rho_{j-1} + \Delta_{j-1}$$

3. Рассмотрим теперь ту же задачу для системы, состоящей из критической вида

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l X_l, \quad y^{\cdot} = Y_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l Y_l$$

и присоединенной, имеющей тот же вид, что и всюду выше. При $\mu = 0$ критическая система обращается в нелинейную

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X_0, \; y^{\cdot} = Y_0 \tag{3.1}$$

характеристическое уравнение которой содержит два нулевых корня с одной группой решений. Сохраним все предположения о виде функций X_l, Y_l, X_{sl}, а также предположения, сформулированные в п. 1, за исключением предположений 1° — 3°. Замечание о возможности приведения системы к исследуемому виду, сделанное в п. 1, остается справедливым. Дополнительно предположим следующее.

1°. Функции X_0, Y_0 имеют вид (1.3), где $m_0 \geqslant 2$, $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — постоянные коэффициенты, причем функция $Q_1 = \lambda y^2 + F(x, y)$ определенно-положительна во всей области исследования $U \supset N$.

2°. Для (3.1) существует знакоопределенный голоморфный интеграл $I_1(x, y) = c^2$, где $I_1 = y^2 + H_1$, со всеми свойствами интеграла I, сформулированными в п. 2. В том числе уравнение $I_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = c^2$ обладает решением относительно r вида $r = c + \bar v_2(\theta) c^2 + \bar v_3(\theta) c^3 + \ldots$, зависящим от одной произвольной постоянной c, причем $\bar v_k(\theta)$ — 2π-периодические функции от θ, решение для r голоморфно относительно c и ряд сходится абсолютно во всей области $U \supset N$ исследования стационарных колебаний.

Той же последовательностью преобразований, что и в п. 2, включая и замену $\bar r = r + \bar v_2(\theta) r^2 + \bar v_3(\theta) r^3 + \ldots$, приведем рассматриваемую систему к виду, по форме совпадающему с полученным в п. 2 с точностью до второго уравнения критической системы, которое в данном случае запишется следующим образом:

$$\theta^{\cdot} = \lambda\sin^2\theta + Q_0^*(r, \theta) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l F_l^*(r, \theta, z_1, \ldots, z_n), \quad Q_0^*(r, \theta) = \frac{F}{\bar r^2}$$

где $\bar r$ выражено через r согласно последней замене, причем $\lambda\sin^2\theta + Q_0^* \cdot (r, \theta) > 0$ при $r \neq 0$ в силу условия 1°. Уравнения для определения $g_1^{(l)}$ и $u_1^{(l)}(\theta)$ в исследуемом случае будут существенно отличаться от полученных выше, а также в [1, 2].

Имеем:

в случае $m_1 < m_0$

$$u_1^{(m)}(\theta) \equiv 0, \; g_1^{(m)} = 0 \; (m = 1, 2, \ldots, m_1 - 1) \tag{3.2}$$

$$R_1^{(1,i)}(\theta) - \lambda\sin^2\theta \frac{du_1^{(i)}}{d\theta} = g_1^{(i)} \quad (i = m_1, \ldots, m_0 - 1)$$

$$R_1^{(1,k)}(\theta) - \lambda \sin^2\theta \frac{du_1^{(k)}}{d\theta} -$$
$$- \sum_{s=1}^{k-m_0+1} Q_0^{*(k-s)}(\theta)\frac{du_1^{(s)}}{d\theta} = g_1^{(k)} \quad (k = m_0, m_0+1, \ldots)$$

где $Q_0{}^{*(\alpha)}$ есть $Q_0{}^{(\alpha)}$ с заменой v_s на $\bar{v}_s$;

в случае $m_1 = m_0$ — та же система, за исключением уравнений во второй строке (3.2);

в случае $m_1 > m_0$ — система, состоящая из равенств первой строки (3.2), а также последней — при $k = m_1$, $m_1 + 1, \ldots$.

Постоянные $g_1{}^{(l)}$ определим из (3.2) так, чтобы все $u_1{}^{(l)}(\theta)$ были 2π периодическими. Для этого необходимо и достаточно определить $g_1{}^{(l)}$ из уравнений вида

$$R_1^{(1,l)}(\theta) - g_1^{(l)} = \lambda \sin^2\theta f_1^{(l)}(\theta) + \Psi^{(l)}(\theta) \quad \left(\int_0^{2\pi} f_1^{(l)}(\theta)\,d\theta = 0\right) \tag{3.3}$$

где $f_1{}^{(l)}(\theta)$ — некоторые 2π-периодические функции, для каждой из которых выполняется условие, приведенное в скобках. Периодические функции $u_1{}^{(l)}(\theta)$ определим при этом выражениями

$$u_1^{(l)}(\theta) = \int_0^{\theta} f_1^{(l)}(\theta)\,d\theta$$

так что $u_1{}^{(l)}(0) = 0$.

Для совместного определения $g_1{}^{(l)}$ и $f_1{}^{(l)}(\theta)$ представим функции $R_1{}^{(1,l)} - \Psi^{(l)}$ в виде

$$R_1^{(1,l)} - \Psi^{(l)} = a_0^{(l)} + \sum_{s=1}^{l}(a_s^{(l)}\sin s\theta + b_s^{(l)}\cos s\theta)$$

а сами функции $f_1{}^{(l)}$ будем разыскивать как суммы

$$f_1^{(l)} = \sum_{s=1}^{l-2}(c_s^{(l)}\sin s\theta + d_s^{(l)}\cos s\theta)$$

Очевидно, что $f_1{}^{(l)}$ удовлетворяют сформулированному выше условию. Подставляя $R_1{}^{(1,l)} - \Psi^{(l)}$ и $f_1{}^{(l)}$ в (3.3), получим для нахождения $2l - 3$ неизвестных $g_1{}^{(l)}$, $c_s{}^{(l)}$, $d_s{}^{(l)}$ систему $2l + 1$ уравнений при каждом l, которая будет совместна лишь при выполнении некоторых дополнительных условий, наложенных на коэффициенты. Для не очень больших l эти условия нетрудно выписать в явном виде. Дальнейшее исследование аналогично проведенному в п. 2.

4. *Пример.* Рассмотрим следующую задачу. Пусть необходимо исследовать устойчивость невозмущенного движения $x = y = z_1 = z_2 = 0$ механической системы, уравнения возмущенного движения которой таковы:

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= -Ay^3 + \mu\,[z_1(a_1x^2 + a_2y^2) + ax^5 + bx^7] + \mu^2\Phi_1 \\ y^{\cdot} &= Ax^3 + \mu\,[z_1(b_1x^2 + b_2y^2) + ay^5 + by^7] + \mu^2\Phi_2 \\ z_1^{\cdot} &= pz_1 + \mu\Phi_3 + \mu^2\Phi_4, \quad z_2^{\cdot} = qz_2 + \mu\Phi_5 + \mu^2\Phi_6 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\mu > 0, \quad A > 0, \quad p < 0, \; q < 0, \; ab < 0$$

$$\Phi_1 = z_1^2 (a_5 x^2 + a_6 y^2), \quad \Phi_2 = z_1^2 (b_5 x^2 + b_6 y^2), \quad \Phi_3 = z_1^2 (c_1 x + c_2 y)$$

$$\Phi_4 = z_1^3 (c_3 x + c_4 y), \quad \Phi_5 = z_1^2 (d_1 x^2 + d_2 y^2), \quad \Phi_6 = z_1^3 (d_3 x^2 + d_4 y^2)$$

причем приведенный здесь конкретный вид функций Φ_s существен в дальнейшем лишь при оценке размеров области N.

Очевидно, что (4.1) удовлетворяет условиям, сформулированным в п. 1, причем

$$F = A\,(x^4 + y^4), \quad R = Axy\,(x^2 - y^2), \quad \varphi = {}^1/_4 \ln\,[4\,/\,(\cos 4\theta + 3)]$$

Исследуем устойчивость невозмущенного движения $x = y = z_1 = z_2 = 0$ системы (4.1) с помощью теоремы сведения для установившегося движения [6]. Система (4.1), рассматриваемая с позиций [6], согласно терминологии Г. В. Каменкова, относится к так называемому несущественно особенному случаю, так как в ней правые части присоединенной системы обращаются в нуль при $z_1 = z_2 = 0$, правые части критической системы не равны тождественно нулю. В связи с этим, как показано в [6], задача об устойчивости нулевого решения исследуемой системы эквивалентна задаче об устойчивости нулевого решения системы второго порядка следующего вида:

$$x^{\cdot} = -Ay^3 + hx^5 + lx^7, \quad y^{\cdot} = Ax^3 + hy^5 + ly^7, \quad h = \mu a, \quad l = \mu b$$

Могут представиться две возможности.

1) $a > 0$, $b < 0$

По теореме сведения невозмущенное движение неустойчиво при любых $\mu > 0$. По теоремам 1 и 2 [1] найдется такое μ^* и такая область $N\,(A_0^*, \varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*)$, что для всех $\mu < \mu^*$ и для всех $t \in (t_0, \infty)$ изображающая точка $P\,(t) \in N$, если только $P\,(t_0) \in N$, где t_0 — начальный момент времени. Стационарные колебания существуют и устойчивы относительно области N, размеры которой по координате ρ определятся величинами $\rho_1 + \varepsilon_1^*$, $\rho_1 - \varepsilon_2^*$ в соответствии с работой [1]. При этом

$$\rho_1 = 4\left[\frac{a}{2\pi b}\left(2\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3\mathrm{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]^{1/2}$$

где K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Если ρ_1 мало ($a\,/\,b \to 0$, $a \neq 0$), то для каждого $\mu < \mu^*$ получим, что хотя по теореме сведения имеет место неустойчивость, отклонения $P\,(t)$ от начала координат за счет выбора a и b могут быть сделаны малыми по ρ, если малы их начальные значения.

2) $a < 0$, $b > 0$

По теореме сведения невозмущенное движение асимптотически устойчиво при любых $\mu > 0$. По теоремам 1, 2 [1] имеет место то же свойство, что и в случае 1) однако область N здесь другая, в частности, она содержит начало координат. Размеры N по координате ρ также определяются величиной ρ_1. Поэтому если $a\,/\,b \to 0$, $a \neq 0$, то область притяжения начала координат будет сужаться, так что сам факт асимптотической устойчивости будет терять свое практическое значение.

Таким образом, результаты применения теорем 1,2 [1] являются определенным дополнением к результатам, которые можно получить по теореме сведения. Кроме того, они, разумеется, позволяют исследовать движения не только в окрестности положения равновесия, но и вдали от него, например при больших ρ_1.

Выше в примере речь шла лишь об оценке N по координате ρ. Полная оценка, сделанная в соответствии с теоремой 3 [1], дает следующую общую систему неравенств, которым должны удовлетворять величина μ и параметры области N:

$$L_1\,(\rho_\alpha) + \chi_\alpha < 0, \quad L_1\,(\rho_\beta) - \chi_\beta > 0$$

$$\mu A_0 < \frac{1}{2\Psi_6}\left[\left(\Psi_5^2 - 4\,\frac{q'\Psi_6}{r_{1\alpha}}\right)^{1/2} - \Psi_5\right], \quad \mu < \frac{1}{2\pi\rho_\alpha^4\,[5\sigma_{10}^{(5)} + 7\rho_\alpha^2\sigma_{10}^{(7)}]}$$

Здесь

$$\chi_\gamma = \sqrt[4]{2}A_0\rho_\gamma{}^2\Psi_1 + \mu\sqrt[4]{2}A_0{}^2 r_{1\gamma}\Psi_2 + \mu r_{2\gamma}(\Psi_{3\gamma} + \mu\Psi_{4\gamma}) \quad (\gamma = \alpha, \beta)$$

$$L_1(\rho) = g_1{}^{(5)}\rho^5 + g_1{}^{(7)}\rho^7, \qquad \rho_\alpha = \rho_j + \varepsilon_1, \quad \rho_\beta = \rho_j - \varepsilon_2,$$

$$g' = \max\{p, q\}$$

$$r_{1\gamma} = \rho_\gamma + 2\pi\mu r_{2\gamma}, \quad r_{2\gamma} = \rho_\gamma{}^5\sigma_{10}^{(5)} + \rho_\gamma{}^7\sigma_{10}^{(7)}$$

$$\sigma_{10}^{(5)} = \frac{\sqrt{2}}{A}(3|a| + |g_1^{(5)}|), \quad \sigma_{10}^{(7)} = \frac{\sqrt{2}}{A}(3\sqrt[4]{4}\,|b| + |g_1^{(7)}|)$$

$$\Psi_1 = {}^3/_2 S_1, \quad \Psi_2 = {}^3/_2 S_2, \quad \Psi_{3\gamma} = \sqrt[4]{2}\,[A_0 S_1 + 2\sqrt[4]{8}\,|a|\,r_{1\gamma}^3 +$$

$$+ 4\sqrt[4]{2}\,|b|\,r_{1\gamma}^5]\,r_{1\gamma}$$

$$\Psi_{4\gamma} = \sqrt[4]{2}A_0{}^2 S_2 r_{1\gamma}, \quad \Psi_5 = \sqrt[4]{2}\,S_3 + \sqrt{2}\,r_{1\alpha}S_4, \quad \Psi_6 = \sqrt[4]{2}\,S_5 + \sqrt{2}\,r_{1\alpha}S_6$$

$$S_1 = |a_1| + |a_2| + |b_1| + |b_2|, \quad S_2 = |a_5| + |a_6| + |b_5| + |b_6|$$

$$S_3 = |c_1| + |c_2|, \quad S_4 = |d_1| + |d_2|, \quad S_5 = |c_3| + |c_4|, \quad S_6 = |d_3| + |d_4|$$

$$g_1^{(5)} = \frac{a}{2\mathrm{K}(\sqrt{2}/2)}\left[3\mathrm{K}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right], \quad g_1^{(7)} = \frac{\pi b}{16\mathrm{K}(\sqrt{2}/2)}$$

Автор благодарит участников семинара по аналитической механике и его руководителя В. В. Румянцева за обсуждение работы.

Поступила 27 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грумондз В. Т.* Об исследовании колебаний в нелинейных механических системах произвольного порядка. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
2. *Каменков Г. В.* Исследование нелинейных колебаний с помощью функций Ляпунова. Избр. тр., т. 1. М., «Наука», 1971.
3. *Радциг А. Н.* К вопросу нелинейных колебаний автономных систем при наличии двух нулевых корней с двумя группами решений. Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, 1966, т. 15, вып. 3.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956.
5. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н.* Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, т. 26.
6. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения. Избр. тр., т. 1. М., «Наука», 1971.