Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ

А. Л. Куницын

(Москва)

Рассматривается задача об устойчивости тривиального решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx \, / \, dt \equiv x^{\cdot} = X(x), \quad X(0) = 0, \quad x \in R^{2N} \tag{0.1}$$

где $X(x)$ — голоморфная вектор-функция, а матрица $(\partial X / \partial x)_{x=0}$ имеет лишь чисто мнимые и различные собственные значения $\pm \lambda_s$ ($\lambda_s^2 < 0$; $s = 1, 2, \ldots, N$), удовлетворяющие условию внутреннего резонанса четвертого порядка

$$\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_N p_N = 0, \quad p_1 + \ldots + p_N = 4$$

Здесь $p_1, \ldots, p_N$ — взаимно-простые неотрицательные целые числа.

Указанная задача детально исследовалась лишь для гамильтоновых систем [1 2], для которых удалось получить необходимые и достаточные условия устойчивости. При рассмотрении систем общего вида задача существенно усложняется и даже в простейших случаях может стать алгебраически неразрешимой [1]. Однако для приложений важно иметь хотя бы достаточные, но конструктивные критерии устойчивости и неустойчивости. Один критерий неустойчивости был предложен в [3].

В данной работе даются достаточные условия как асимптотической устойчивости, так и неустойчивости непосредственно по коэффициентам нормальной формы.

1. Как было показано в [4], с помощью нормализующего преобразования Ляпунова исходную систему (0.1) можно записать в следующем виде, используя полярные координаты r_j, θ_j ($j = 1, 2, \ldots, N$):

$$\frac{1}{2} r_s^{\cdot} = \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2} Q_s(\theta) + r_s \sum_{\nu=1}^{N} a_{s\nu} r_\nu + \ldots \tag{1.1}$$

$$\theta^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} p_s \Big(\prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2 - \delta_{sj}} \frac{dQ_s}{d\theta} + \sum_{\nu=1}^{N} b_{s\nu} r_\nu \Big) + \ldots$$

$$s = 1, 2, \ldots, n; \; 2 \leqslant n \leqslant 4$$

$$r_\alpha^{\cdot} = 2 r_\alpha \sum_{\nu=1}^{N} a_{\alpha\nu} r_\nu + \ldots, \quad r_\alpha \theta_\alpha^{\cdot} = - i \lambda_\alpha r_\alpha + r_\alpha \sum_{\nu=1}^{N} b_{\alpha\nu} r_\nu + \ldots;$$

$$\alpha = n+1, \ldots, N$$

$$\theta = p_1\theta_1 + \ldots + p_n\theta_n, \quad Q_s(\theta) = a_s \cos\theta + b_s \sin\theta, \quad i = \sqrt{-1}$$

[1] *Шноль Э. Э., Хазин Л. Г.* Несуществование алгебраического критерия асимптотической устойчивости при резонансе 1 : 3. М. Препринт Ин-та матем. АН СССР, № 45, 1977.

Здесь принято, что $p_{n+1} = \ldots = p_N = 0$, т. е. резонирует лишь часть собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из общего числа N; δ_{sj} — символ Кронекера, а невыписанные члены имеют более высокий порядок малости относительно $r_1, \ldots, r_N$.

При $a_s = b_s = 0$ имеем нерезонансный случай, в основном рассмотренный в [5, 6]. Если же положить все $a_{s\nu} = b_{s\nu} = 0$, то задача будет решаться так же, как и в случае резонанса третьего порядка [4].

Цель данной работы — получение достаточных условий асимптотической устойчивости и неустойчивости в общем случае, т. е. когда присутствуют как члены внутреннего резонанса ($a_s \neq 0$, $b_s \neq 0$), так и члены тождественного резонанса ($a_{s\nu} \neq 0$, $b_{s\nu} \neq 0$).

Рассмотрим матрицу

$$C = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_1 & b_2 \ldots b_n \end{Vmatrix}$$

и соответствующие ей всевозможные пары векторов $a = (a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)$ и $b = (b_\alpha, b_\beta, b_\gamma)$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma$; $n > 2$. Пусть $D_{\beta\gamma}$, $D_{\gamma\alpha}$, $D_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты векторного произведения $a \times b$, не равные нулю. Тогда справедлива лемма (аналогичное по существу утверждение было приведено (без доказательства) в [5]).

Лемма. Чтобы система линейных уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} a_s\gamma_s = 0, \quad \sum_{s=1}^{n} b_s\gamma_s = 0 \tag{1.2}$$

имела строго положительное (отрицательное) решение относительно γ_s, необходимо и достаточно существования хотя бы одной пары векторов a и b, для которой в ряду чисел $D_{\beta\gamma}$, $D_{\gamma\alpha}$, $D_{\alpha\beta}$ отсутствует перемена знака.

Достаточность докажем непосредственным построением указанного решения. Очевидно, не нарушая общности, можно считать, что условию леммы удовлетворяет, например, пара векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда из (1.2) найдем

$$\gamma_1 = D_{12}^{-1}\Big(D_{23}\gamma_3 - \sum_{j=4}^{n} D_{j2}\gamma_j\Big), \quad \gamma_2 = D_{12}^{-1}\Big(D_{31}\gamma_3 - \sum_{j=4}^{n} D_{1j}\gamma_j\Big) \tag{1.3}$$

$$D_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_\mu & a_\nu \\ b_\mu & b_\nu \end{vmatrix}$$

В силу произвольности значений γ_3, γ_j их можно считать положительными. Подчиняя их еще неравенствам

$$\Big|\sum_{j=4}^{n} D_{j2}\gamma_j\Big| < |D_{23}\gamma_3|, \quad \Big|\sum_{j=4}^{n} D_{1j}\Big| < |D_{13}\gamma_3| \tag{1.4}$$

видим, что при выполнении условия леммы будет $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, что и доказывает достаточность.

Для доказательства необходимости вначале покажем, что при отсутствии указанной пары векторов a и b возможна такая нумерация элементов матрицы C, что все определители D_{1j} ($j = 2, \ldots, n$) будут одного знака. Для этого переставим столбцы матрицы C так, чтобы было

$$D_{1i} > 0, \; i = 2, \ldots, l; \; D_{1j} < 0, \; j = l+1, \ldots, n$$

При этом вследствие невыполнения условия леммы для всякой пары векторов a и b можно убедиться в справедливости неравенств $D_{ij} < 0$ при $i = 1, \ldots, l$; $j = l + 1, \ldots$ $\ldots, n$. Меняя затем местами первый и l-й столбцы матрицы c, с одной стороны, получим $D_{l1} < 0$, а с другой сохраним отрицательность всех определителей D_{lj} ($j = l + 1, \ldots$ $\ldots, n$). Проводя подобную перестановку столбцов необходимое число раз, в конце концов получим $D_{1j} < 0$ ($j = 2, \ldots, n$).

Но при доказанном свойстве определителей D_{1j} из второго уравнения (1.3) видно, что, каковы бы ни были $\gamma_\alpha > 0$ ($\alpha = 3, \ldots, n$), всегда будет $\gamma_2 < 0$ и, таким образом, система (1.2) не имеет строго положительного (отрицательного) решения.

2. Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$2V = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s r_s + \sum_{\alpha=n+1}^{N} r_\alpha \tag{2.1}$$

где постоянные γ_s подчинены уравнениям (1.2). Очевидно при выполнении условий доказанной выше леммы все величины γ_s могут быть взяты положительными, а $n - 2$ из них должны удовлетворять двум неравенствам (1.4).

Замечание. При $n = 3$ на постоянную γ_3 не накладывается никаких ограничений. При $n = 2$ условия леммы теряют смысл, но как легко убедиться, в этом случае необходимые и достаточные условия существования строго положительного (отрицательного) решения уравнений (1.2) имеют вид

$$a_1 / a_2 = -b_1 / b_2 < 0 \tag{2.2}$$

откуда $\gamma_1 = -a_1 / a_2\gamma_2$, и, следовательно, одна из постоянных опять может быть произвольной положительной величиной.

Дифференцируя (2.1) в силу системы (1.1) и учитывая (1.2), получим

$$V^\cdot = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s r_s (a_{s1} r_1 + \ldots + a_{sN} r_N) + \sum_{\alpha=n+1}^{N} r_\alpha (a_{\alpha 1} r_1 + \ldots + a_{\alpha N} r_N) + \ldots \tag{2.3}$$

где невыписанные члены имеют не ниже, чем третий порядок малости относительно переменных $r_1, \ldots, r_N$, решающих задачу устойчивости.

Матрицу M квадратичной формы, с которой начинается разложение (2.3), можно записать в виде

$$M = \left\| \begin{array}{c:c} A_1 + A_1' & B' \\ \hdashline B & A_2 + A_2' \end{array} \right\| \tag{2.4}$$

$$A_1 = \| \gamma_i a_{ij} \|_{i,\, j=1}^{n}, \quad A_2 = \| a_{ij} \|_{i,\, j=n+1}^{N}$$

$$B = \| \gamma_i a_{ij} \|_{i=1,\, j=n+1}^{i=n,\, j=N} + \| a_{ij}' \|_{i=n+1,\, j=1}^{i=N,\, j=n}$$

Здесь A_1, A_2 — квадратные матрицы $n \times n$ и $(N - n) \times (N - n)$ соответственно, B — прямоугольная матрица; штрихом обозначена транспонированная матрица.

На основании изложенного можно сформулировать следующую теорему, справедливость которой вытекает из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [7].

Теорема 1. Пусть система (1.1) такова, что матрица C удовлетворяет условию леммы. Тогда если $n-2$ $(n \neq 2)$ положительными постоянными из числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, удовлетворяющих уравнениям (1.2), можно распорядиться так, чтобы квадратичная форма, входящая в (2.3), была определенно-отрицательной, то тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Замечание. При $n = 4$ указанные постоянные должны еще удовлетворять неравенствам (1.4), а при $n = 2$ должно выполняться условие (2.2).

С помощью функции V в виде (2.1) можно получить и достаточные условия неустойчивости. При этом неустойчивость может иметь место как при выполнении, так и при невыполнении условия леммы. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Тривиальное решение системы (1.1) будет неустойчиво, если:

а) для матрицы C не выполняется условие леммы, а постоянные $\gamma_1, \ldots$ $\ldots, \gamma_n$, удовлетворяющие уравнениям (1.2), можно выбрать так, чтобы квадратичная форма, входящая в (2.3), была знакоопределенной;

б) для матрицы C выполняется условие леммы и вышеупомянутая квадратичная форма выбором $n-2$ отрицательных постоянных из совокупности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, удовлетворяющих уравнениям (1.2), может быть сделана знакоопределенной;

в) для матрицы C выполняется условие леммы и вышеупомянутая квадратичная форма выбором $n-2$ положительных постоянных из совокупности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, удовлетворяющих уравнениям (1.2), может быть сделана определенно-положительной.

В каждом из перечисленных случаев функция V в виде (2.1) будет удовлетворять условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости [7]. Действительно, в случае а), как следует из леммы, постоянные $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ не могут быть одновременно положительными, а, следовательно, V будет знакопеременной. Такой же будет V и в случае б), так как при выполнении условий леммы и неравенств (1.4) все $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ могут быть сделаны отрицательными.

Наконец, в случае в) функция V будет определенноположительной, как и ее производная.

3. Для выяснения конструктивности полученного критерия рассмотрим некоторые частные случаи системы (1.1).

Случай 1. Положим в (1.1) $n = N = 2$. Тогда уравнениями (1.1) может описываться, например, возмущенное движение негамильтоновой механической системы с двумя степенями свободы.

Условия строгой положительности (отрицательности) решения системы (1.2) имеют вид (2.2), и, следовательно, одна из постоянных γ_1, γ_2 может быть произвольной положительной величиной. Если выбором этой постоянной матрицу M (2.4) удастся сделать положительно-определенной, то функция V в виде (2.1) будет удовлетворять теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.

При $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ необходимые и достаточные условия отрицательной определенности матрицы M в конусе $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$ имеют вид

$$a_{11} < 0, \quad a_{12} < \frac{a_1}{a_2} a_{21} + 2 \sqrt{-\frac{a_1}{a_2} a_{11} a_{22}} \tag{3.1}$$

При этом V и $V^{\boldsymbol{\cdot}}$ будут знакоопределенными разных знаков, и следовательно, при выполнении (2.2) и (3.1) тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Если взять $\gamma_1 > 0$ ($\gamma_2 < 0$), а знак в первом из неравенств изменить на противоположный, то при выполнении (2.2) V и $V^{\boldsymbol{\cdot}}$ будут определенно-отрицательными, а тривиальное решение неустойчивым. Оно будет также неустойчивым при любом знаке a_{11}, если при $-a_1/a_2 = b_1/b_2 < 0$ выполняется второе неравенство (3.1) либо неравенство

$$a_{12} > \frac{a_1}{a_2} a_{21} - 2 \left(-\frac{a_1}{a_2} a_{11} a_{22}\right)^{1/2}$$

Действительно, в этих случаях производная $V^{\boldsymbol{\cdot}}$ будет определенно-положительной или определенно-отрицательной, а сама функция V знакопеременной, так как $\gamma_1 \gamma_2 < 0$.

Интересная особенность рассмотренного в этом примере класса систем (он выделяется условием (2.2)) состоит в том, что здесь асимптотическая устойчивость возможна при сколь угодно больших значениях коэффициентов резонансных членов a_s и b_s. Это можно усмотреть из второго неравенства (3.1), если в нем положить

$$a_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2} \sin \psi_s, \quad b_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2} \cos \psi_s, \quad s = 1, 2$$

Случай 2. Положим теперь в (1.1) $n = N = 3$, т. е. рассмотрим систему с тремя степенями свободы. Составим матрицу M (2.4)

$$M = \begin{Vmatrix} 2\gamma_1 a_{11} & \gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{21} & \gamma_1 a_{13} + \gamma_3 a_{31} \\ \gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{21} & 2\gamma_2 a_{22} & \gamma_2 a_{23} + \gamma_3 a_{32} \\ \gamma_1 a_{13} + \gamma_3 a_{31} & \gamma_2 a_{23} + \gamma_3 a_{32} & 2\gamma_3 a_{33} \end{Vmatrix}$$

Здесь на основании (1.3)

$$\gamma_1 = \frac{D_{23}}{D_{12}} \gamma_3, \quad \gamma_2 = \frac{D_{31}}{D_{12}} \gamma_3$$

где γ_3 — произвольная постоянная, которую можно считать положительной. Если коэффициенты a_s и b_s удовлетворяют условиям леммы, то будем иметь $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$.

С помощью критерия Сильвестра получим следующие условия определенной отрицательности матрицы M:

$$\begin{aligned} & a_{11} > 0, \quad F \equiv 4D_{23}D_{31}a_{11}a_{22} - \delta_1^2 > 0 \\ & G \equiv Fa_{33} - \frac{D_{23}}{D_{12}} a_{11}\delta_3^2 + \delta_1\delta_2\delta_3 - \frac{D_{31}}{D_{12}} a_{22}\delta_2^2 < 0 \\ & \delta_1 = D_{23}a_{12} + D_{31}a_{21}, \quad \delta_2 = D_{23}a_{13} + D_{12}a_{31} \\ & \delta_3 = D_{23}a_{13} + D_{12}a_{31} \end{aligned} \tag{3.2}$$

На основании теоремы 1 заключаем, что неравенства (3.1) вместе с условиями леммы дают достаточные условия асимптотической устойчивости. Очевидно полученные неравенства совместны, так как коэффициент a_{11} не входит ни в одно из последних неравенств (3.2), а в третье неравенство входит слагаемое, содержащее коэффициенты, отсутствующие во втором неравенстве. Таким образом в случае системы шестого порядка условия асимптотической устойчивости удается получить, не прибегая к подбору значения произвольной постоянной γ_3.

При изменении знаков первого и последнего неравенства (3.2) на противоположные тривиальное решение системы (1.1) будет неустойчиво на основании теоремы 2 (случай в). Видно, что тривиальное решение будет также неустойчиво (вне зависимости от выполнения условия леммы), если только удовлетворяются неравенства

$$F > 0, \quad a_{11}G < 0$$

так как при этом справедливы случаи а) и б) теоремы 2.

Заметим, что условия (3.2) могут быть, вообще говоря, расширены, поскольку достаточно потребовать знакоопределенности $V^{\cdot}$ лишь в положительном конусе $r_s \geqslant 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Однако аналитическая запись этих условий при $n \geqslant 3$ — трудно выполнимая задача, сводящаяся к вопросу о совместности системы неравенств [8].

Поступила 9 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. *Хазин Л. Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
3. *Каменков Г. В.* Избр. труды, т. 1, М., «Наука», 1971.
4. *Гольцер Я. М.*, *Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
5. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1.
6. *Веретенников В. Г.* Об устойчивости движения в случае трех пар чисто мнимых корней. Тр. Ун-та дружбы народов, Сер. теор. механ., 1965, т. 15, вып. 3.
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956.
8. *Gaddum J. W.* Linear inequalities and quadratic forms. Pacific J. Math., 1958, vol. 8, No 411—414.