Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 521.13

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОСТОЯННЫХ ЛАПЛАСОВЫХ РЕШЕНИЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

В. Н. Тхай

(Москва)

Показывается, что в случае отсутствия резонансов третьего порядка [1] постоянные лапласовы решения сохраняют устойчивость во втором порядке в области необходимых условий устойчивости Рауса — Жуковского. В случае, когда в системе имеют место резонансы третьего порядка и взаимодействие резонансов третьего порядка, работа [2] вместе с данным исследованием полностью решает вопрос об устойчивости во втором порядке и неустойчивости по Ляпунову.

1. Основываясь на исследованиях Ляпунова [3], выведем уравнения возмущенного движения задачи с учетом в их правых частях членов с точностью до второго порядка малости включительно.

Пусть три точечные массы M_0, M_1, M_2 притягиваются по закону

$$F_{ij} = fM_iM_jr_{ij}^n \quad (i, j = 0, 1, 2;\ i \neq j) \tag{1.1}$$

где f — постоянная, M_i, M_j — массы точек, r_{ij} — их взаимное расстояние, а n — действительное число.

Следуя Ляпунову, введем подвижную систему координат с началом в в точке M_0. Примем за ось абсцисс $M_0\xi$ — направление, идущее от начала M_0 к точке M_1, за ось ординат $M_0\eta$ — направление перпендикулярное к $M_0\xi$ в плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$, составляющее острый угол с направлением M_0M_2, и за ось аппликат $M_0\zeta$ — направление, перпендикулярное к плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$, притом такое, чтобы система $M_0\xi\eta\zeta$ была правой.

В переменных $r_1, r_2, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, где $r_1 = r_{01}, r_2 = r_{02}, \psi$ — угол между направлениями M_0M_1 и M_0M_2, а $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции угловой скорости подвижной системы координат $M_0\xi\eta\zeta$ на оси $M_0\xi$, $M_0\eta$, $M_0\zeta$ соответственно, Ляпунов получил дифференциальные уравнения движения неограниченной задачи трех тел [3]. Эти уравнения допускают частные решения, в которых три точки M_0, M_1, M_2, двигаясь в неизменной плоскости, образуют равносторонний треугольник (лапласовы решения [3]) или располагаются на одной прямой.

Будем рассматривать только постоянные лапласовы решения, когда

$$r_1 = \rho,\ r_2 = \rho,\ \psi = \pi/3,\ \omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega \tag{1.2}$$

$$(\rho\omega^2 = f(M_0 + M_1 + M_2)\rho^n,\ \rho^2\omega = c_*)$$

(постоянные ρ и ω связаны соотношениями, указанными в скобках, c_* — произвольная постоянная).

Положим

$$
(1.3)\qquad \begin{array}{l} r_1=\rho\,(1+\xi),\quad r_2=\rho\,(1+\xi+x),\quad \psi=\pi/3+y \\ \omega_3=\omega\quad(1+\eta) \end{array}
$$

и будем считать величины x, y, ξ, η, ω_1, ω_2 и их производные малыми одного и того же порядка [3].

Очевидно, в невозмущенном движении (1.2) имеем

$$
(1.4)\qquad x=0,\ y=0,\ \xi=0,\ \eta=0,\ \omega_1=0,\ \omega_2=0
$$

вследствие чего задача устойчивости частного решения (1.2) сводится к устойчивости в смысле Ляпунова нулевого решения (1.4) дифференциальных уравнений, которые получаются из уравнений Ляпунова неограниченной задачи трех тел [3] после подстановки (1.3).

Сделаем эту подстановку, разлагая нелинейные члены уравнений в ряды по степеням возмущений (1.4). Тогда после необходимых преобразований, которые опущены вследствие громоздкости, получим систему уравнений возмущенного движения в виде

$$
(1.5)\qquad \begin{array}{l}
d\eta_*/d\theta=0 \\
\dfrac{d\xi}{d\theta}=\xi_1,\qquad \dfrac{d\xi_1}{d\theta}=2\eta_*-(n+3)\,\xi+\left[\dfrac{3}{4}(1-n)\,m_2-2\alpha_m\right]x+ \\
+\left[\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-n)\,m_2-2\beta_m\right]y+\beta_m x_1-\alpha_m y_1+\Phi_1+\dots \\
\dfrac{dx}{d\theta}=x_1,\qquad \dfrac{dx_1}{d\theta}=2y_1+(1-n)\,[(1-\mu)\,x+\mu' y]+\Phi_2+\dots \\
\dfrac{dy}{d\theta}=y_1,\qquad \dfrac{dy_1}{d\theta}=-2x_1+(1-n)\,[\mu' x+\mu y]+\Phi_3+\dots \\
\dfrac{d\Omega_1}{d\theta}=-\Omega_2+\Phi_4+\dots,\qquad \dfrac{d\Omega_2}{d\theta}=\Omega_1+\Phi_5+\dots
\end{array}
$$

Здесь

$$
\begin{array}{l}
\Phi_1=\dfrac{n\,(1-n)}{2}\,\xi^2+(1-n)\,m_2\left(\dfrac{5n-3}{16}x^2+P_-\right)+\Omega_2^2+\eta^2+2\xi\eta+ \\
+2\left(\eta-\eta_*+2\xi+\alpha_m x+\beta_m y-\dfrac{\beta_m}{2}\,x_1+\dfrac{\alpha_m}{2}\,y_1\right) \\
\Phi_2=\dfrac{n\,(1-n)}{2}\,(m_0+m_2)\,(x^2+2\xi x)+(1-n)\,m_2\left(\dfrac{n+9}{16}x^2+P_+\right)- \\
-(1-n)\,m_2\left(\dfrac{5n-3}{16}\,x^2+P_-\right)+2x\eta+y_1^2+2\,(\xi+x+\eta)\,y_1+ \\
+\dfrac{3}{4}\,\Omega_1^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega_1\Omega_2-\dfrac{3}{4}\,\Omega_2^2 \\
\Phi_3=(1-n)\,m_1\left(\dfrac{\sqrt{3}\,(n+1)}{16}\,x^2+Q_-\right)+ \\
+(1-n)\,m_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}\,(3n+5)}{16}\,x^2+Q_+\right)+2\,(\xi+x)\,x_1-2x_1\eta- \\
-2\,(\xi_1+x_1)\,y_1-(1-n)\,(\mu' x+\mu y)\,(\xi+x)- \\
-2x\left[-\xi_1+(1-n)\,m_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,x-\dfrac{3}{4}\,y\right)\right]+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega_1^2+\dfrac{3}{4}\,\Omega_1\Omega_2- \\
-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\Omega_2^2
\end{array}
$$

$$\Phi_4 = -\eta\Omega_2 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\Omega_1 + \sqrt{3}\Omega_2) y_1 +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3}\Omega_1 + \Omega_2) x_1 - 2\Omega_1\xi_1, \qquad \Phi_5 = \eta\Omega_1 - 2\Omega_2\xi_1$$
$$P_\pm = \frac{3n+5}{16} y^2 + \frac{3(n-1)}{4}\xi x + \frac{\sqrt{3}n}{4}\xi y + \frac{\sqrt{3}(n\pm 5)}{8} xy$$
$$Q_\pm = \frac{3\sqrt{3}(n-1)}{16} y^2 \mp \frac{\sqrt{3}(n-1)}{4}\xi x + \frac{3n}{4}\xi y + \frac{3n\pm 1}{8} xy$$
$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega}, \qquad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega}, \qquad d\theta = \omega\, dt$$
$$m_i = \frac{M_i}{M_0 + M_1 + M_2} \quad (i = 0, 1, 2), \quad \mu = \frac{3}{4}(m_1 + m_2)$$
$$\mu' = \frac{\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2)$$
$$\alpha_m = \frac{(2M_0 + M_1) M_2}{M_0M_1 + M_0M_2 + M_1M_2}, \qquad \beta_m = \frac{\sqrt{3}M_1M_2}{M_0M_1 + M_0M_2 + M_1M_2}$$

Невыписанные члены имеют порядок выше второго относительно переменных, t — время, а η_* — произвольная постоянная интеграла энергии, который запишем в виде

$$\eta = \eta_* - \left\{R + \frac{n+1}{2}\xi^2 + \frac{[4(n+1)m_0 + (n+7)m_1]m_2}{8\nu} x^2 + \right.$$
$$+ \frac{3n-1}{8\nu} m_1 m_2 y^2 + \frac{\xi_1^2}{2} + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{2\nu}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{n+1}{2}\alpha_m \xi x +$$
$$+ \frac{n+3}{2}\beta_m \xi y + \frac{\beta_m}{2} y y_1 + \frac{\alpha_m}{2}\xi_1 x_1 + \frac{\beta_m}{2}\xi_1 y_1 - \frac{\beta_m}{2}\xi x_1 +$$
$$+ \alpha_m \xi y_1 + \frac{\beta m}{2} x\xi_1 \frac{n+3}{4}\beta_m xy - \frac{m_1 m_2}{2\nu} y x_1 + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{2\nu} \times$$
$$\left.\times \left(\frac{3}{4}\Omega_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_1\Omega_2 + \frac{1}{4}\Omega_2^2\right) + \frac{m_1 m_2}{2\nu}(\sqrt{3}\Omega_1 - \Omega_2)\Omega_2\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\eta_* + \ldots$$
$$R = 2\xi + \alpha_m x + \beta_m y - \frac{\beta_m}{2} x_1 + \frac{\alpha_m}{2} y_1, \quad \nu = m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2$$

Характеристическое уравнение системы (1.5) имеет один нулевой и четыре пары чисто мнимых корней [1]

$$\varkappa_s = \pm i\lambda_s \; (s = 1, \ldots, 4)$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = (n+3)^{1/2}, \qquad \lambda_{3,4} = \left[\frac{n+3}{2}(1 \pm \sqrt{1-\chi})\right]^{1/2}$$
$$\chi = 3\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^2 \nu$$

В работе [1] показано, что в области необходимых условий устойчивости Рауса — Жуковского существует восемь резонансов третьего порядка

$$\lambda_1 = \lambda_3 \pm \lambda_4, \; \lambda_1 = 2\lambda_2, \; \lambda_1 = 2\lambda_3, \; \lambda_1 = 2\lambda_4 \tag{1.6}$$
$$\lambda_4 = 2\lambda_1, \; \lambda_2 = 2\lambda_4, \; \lambda_3 = 2\lambda_4$$

причем при $n = -2$, $\nu = 1/36$ возникает взаимодействие резонансов $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda_4$ [2].

Исследование устойчивости на резонансных кривых (1.6) в нелинейной постановке проводилось в [2]. При этом рассматривались только такие возмущения, для которых $\eta_* = 0$.

2. Можно подметить, что в линейном приближении система (1.5) распадается на две системы второго порядка (по ξ, ξ_1 и Ω_1, Ω_2), систему четвертого порядка (по x, x_1, y, y_1) и уравнение для η_*. Поэтому после преобразований

$$\xi = \frac{\zeta}{\lambda_2} + \frac{2\eta_*}{\lambda_2} - \frac{1}{2}(\alpha_m x + \beta_m y), \qquad \xi_1 = \zeta_1 - \frac{1}{2}(\alpha_m x_1 + \beta_m y_1)$$

$$z_1 = \Omega_1 + i\Omega_2, \ \bar z_1 = \Omega_1 - i\Omega_2, \ z_2 = \zeta_1 + i\zeta, \ \bar z_2 = \zeta_1 - i\zeta$$

$$(x, x_1, y, y_1) = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{i}{\lambda_3} a_3^- & -\dfrac{i}{\lambda_4} a_4^- & \dfrac{i}{\lambda_3} a_3^+ & \dfrac{i}{\lambda_4} a_4^+ \\ a_3^- & a_4^- & a_3^+ & a_4^+ \\ -\dfrac{t}{\lambda_3} & -\dfrac{i}{\lambda_4} & \dfrac{i}{\lambda_3} & \dfrac{i}{\lambda_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} z_3 \\ z_4 \\ \bar z_3 \\ \bar z_4 \end{matrix} \right\|$$

$$a_j^{\pm} = [-(1-n) \pm 2\lambda_j i]/L_j, \quad L_j = (1-n)(1-\mu) + \lambda_j^2$$
$$(j = 3, 4)$$

где z_s, $\bar z_s$ $(s = 1, \ldots, 4)$ — комплексно-сопряженные переменные, система (1.5) приобретает вид

$$\eta_*^{\cdot} = 0 \tag{2.1}$$

$$z_s^{\cdot} = i\lambda_s z_s + \eta_* \sum_{j=1}^{4} (A_{sj} z_j + \bar B_{sj} \bar z_j) + \sum C_s^* \prod_{j=1}^{4} z_j^{k_{sj}} \bar z_j^{l_{sj}} + \ldots$$

$$\bar z_s^{\cdot} = -i\lambda \bar z_{ss} + \eta_* \sum_{j=1}^{4} (\bar A_{sj} \bar z_j + B_{sj} z_j) + \sum \bar C_s^* \prod_{j=1}^{4} \bar z_j^{k_{sj}} z_j^{l_{sj}} + \ldots$$

$$(s = 1, \ldots, 4)$$

Здесь A_{sj}, $\bar A_{sj}$, B_{sj}, $\bar B_{sj}$, C_s^*, $\bar C_s^*$ — комплексно-сопряженные коэффициенты квадратичных членов; звездочка заменяет индекс $(k_{s1}, \ldots, k_{s4}, l_{s1}, \ldots, l_{s4})$, а суммирование проводится по всем целым неотрицательным числам $k_{s1}, \ldots, k_{s4}, l_{s1}, \ldots, l_{s4}$, дающим в сумме два.

Пусть в системе (2.1) $\operatorname{Re} A_{ss} = 0$ $(s = 1, \ldots, 4)$. Тогда справедливы теоремы.

Теорема 1. Пусть в системе (2.1) имеет место резонанс вида $\lambda_\alpha = 2\lambda_\beta$. Рассмотрим в правых частях соответствующих уравнений (2.1) члены $C_\alpha^* z_\beta^2$, $C_\beta^* z_\alpha \bar z_\beta$. Тогда, если не выполняется условие

$$\operatorname{Re} C_\alpha^* C_\beta^* \leqslant 0, \ \operatorname{Im} C_\alpha^* C_\beta^* = 0 \tag{2.2}$$

то тривиальное решение (2.1) неустойчиво по Ляпунову. При выполнении условия (2.2) устойчивость гарантируется для укороченной до кубических членов системы.

Теорема 2. Пусть в системе (2.1) имеет место взаимодействие резонансов $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 2\lambda_\gamma$. Рассмотрим в правых частях соответствующих уравнений системы (2.1) члены $C_\alpha^* z_\gamma^2$, $C_\beta^* z_\gamma^2$, $(C_\gamma^* \to \alpha)\, z_\alpha \bar z_\gamma$, $(C_\gamma^* \to \beta)\, z_\beta \bar z$ и составим выражение $C^* = C_\alpha^* \, (C_\gamma^* \to \alpha) + C_\beta^* \, (C_\gamma^* \to \beta)$. Тогда, если не выполняется условие

$$\operatorname{Re} C^* \leqslant 0, \ \operatorname{Im} C^* = 0 \tag{2.3}$$

то тривиальное решение (2.1) неустойчиво по Ляпунову. При выполнении условия (2.3) устойчивость гарантируется для укороченной до кубических членов системы, если только $C^* \neq 0$.

Здесь $(C_\gamma^* \to \varkappa)$ есть коэффициент C_γ^* уравнения по z_γ системы (2.1) при $z_\varkappa \bar{z}_\gamma$.

Доказательства этих утверждений не приводим, так как теоремы 1, 2 являются лишь модификацией теорем из [4–6] к нужной форме. Отметим только, что наличие нулевого корня, отвечающего первому уравнению (2.1), не меняет рассуждений [4–6] о неустойчивости по Ляпунову и устойчивости укороченной системы при условии $\operatorname{Re} A_{ss} = 0$ $(s = 1, \ldots, 4)$.

При резонансе вида $\lambda_\gamma = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$ и условии $\operatorname{Re} A_{ss} = 0$ $(s = 1, \ldots, 4)$ задачу устойчивости решают, как и в [5–7], коэффициенты следующих членов правых частей уравнений системы (2.1): $C_\alpha^* \bar{z}_\beta z_\gamma$, $C_\beta^* \bar{z}_\alpha z_\gamma$, $C_\gamma^* z_\alpha z_\beta$.

Исследуем сначала случай, когда отсутствуют резонансы третьего порядка, определяемые (1.6). Подстановки и преобразования, которые опущены вследствие их громоздкости, дают уравнения (2.1) в явном виде. Далее, выполнив полиномиальное преобразование к новым комплексно-сопряженным переменным u_j, v_j $(j = 1, \ldots, 4)$ $(z_s, \bar{z}_s$ в виде полиномов второго порядка от η_*, u_j, $v_j)$ [8], получим окончательно

$$\begin{aligned}
&\eta_*^{\bullet} = 0 \\
&u_1^{\bullet} = i\lambda_1 u_1 + \frac{n-1}{n+3} iu_1\eta_* + \ldots, \qquad u_2^{\bullet} = i\lambda_2 u_2 + \\
&+ \frac{n-1}{\sqrt{n+3}} iu_2\eta_* + \ldots \\
&u_3^{\bullet} = i\lambda_3 u_3 - \frac{n-1}{n+3} K_3 iu_3\eta_* + \ldots, \\
&u_4^{\bullet} = i\lambda_4 u_4 + \frac{n-1}{n+3} K_4 iu_4\eta_* + \ldots \\
&K_j = \{(1-n)(1-\mu)[(1-n)^2\mu'^2 + 4\lambda_j^2] - [2(1-n)^2\mu'^2 + \lambda_j^2] \times \\
&\times L_j + (1-n)\mu L_j^2\} [\lambda_j L_j (\lambda_3^2 - \lambda_4^2)]^{-1} \qquad (j = 3, 4)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Невыписанные члены имеют порядок не ниже третьего относительно η_*, u_j, v_j $(j = 1, \ldots, 4)$; дифференцирование проводится по $d\theta = \omega dt$. Комплексно-сопряженная система и ее решения здесь и далее для краткости опущены.

Система, полученная из (2.4) отбрасыванием членов выше второго порядка относительно переменных, легко интегрируется.

Получаем

$$\begin{aligned}
&\eta_* = c \\
&u_1 = c_1 \exp\left\{\left(\lambda_1 + c\frac{n-1}{n+3}\right) i\omega t\right\} \\
&u_2 = c_2 \exp\left\{\left(\lambda_2 + c\frac{n-1}{\sqrt{n+3}}\right) i\omega t\right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$u_3 = c_3 \exp\left\{\left(\lambda_3 - cK_3 \frac{n-1}{n+3}\right) i\omega t\right\}$$

$$u_4 = c_4 \exp\left\{\left(\lambda_4 + cK_4 \frac{n-1}{n+3}\right) i\omega t\right\}$$

где c — действительная, c_j, $\bar{c}_j$ $(j = 1, \ldots, 4)$ — комплексно-сопряженные постоянные интегрирования.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. Постоянные лапласовы решения неограниченной задачи трех тел сохраняют устойчивость во втором порядке всюду в области необходимых условий устойчивости Рауса — Жуковского, если только нет резонансов (1.6), причем решение укороченной до кубических членов системы (2.1) дается полиномами второго порядка от периодических функций (2.5).

Исследуем теперь случай наличия резонансов (1.6).

Анализ структуры квадратичных членов системы (2.1) для резонансов $\lambda_1 = \lambda_3 \pm \lambda_4$ показывает, что они в рассматриваемой задаче обращаются в нуль (резонанс вырожденный). Действительно, выражения для Φ_2 и Φ_3 не содержат членов, линейных относительно Ω_1 и Ω_2, в то время как Φ_4 и Φ_5 линейны относительно Ω_1 и Ω_2.

Аналогично вырожденными являются резонансы $\lambda_1 = 2\lambda_2$, $\lambda_1 = 2\lambda_3$, $\lambda_1 = 2\lambda_4$.

Вычисление резонансных коэффициентов для резонанса $\lambda_4 = 2\lambda_1$ дает

$$C_1{}^* = \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\frac{(1-n)\mu' + (2\lambda_4 - L_4)\, i}{L_4}$$

$$C_4{}^* = \frac{3}{16}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\frac{(1-n)\mu' - (2\lambda_4 - L_4)\, i}{\lambda_3{}^2 - \lambda_4{}^2}$$

Учитывая, что при резонансе $\lambda_4 = 2\lambda_1$ имеем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_3 = n - 3$, $n \geqslant 17$, получаем $C_1{}^* C_4{}^* = (1-n)/[(n-3)(n+1)] < 0$, т. е. условие (2.2) теоремы 1 выполняется.

Проверка условий теоремы 1 для оставшихся двух резонансов $\lambda_2 = 2\lambda_4$, $\lambda_3 = 2\lambda_4$ требует настолько громоздких вычислений, что осуществить их практически удается только на ЭВМ, что и было выполнено [2] для случая $\eta_* = 0$. Теорема 1 говорит, что выводы [2] справедливы и при $\eta_* \neq 0$.

При $n = -2$, $\nu = 1/36$ возникает, как указывалось выше, взаимодействие резонансов $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda_4$, при этом резонанс $\lambda_1 = 2\lambda_4$ — вырожденный, а резонанс $\lambda_2 = 2\lambda_4$ — сильный [2] (терминология [9]). Иными словами, условие (2.3) теоремы 2 нарушается, и, значит, взаимодействие резонансов $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda_4$ приводит к неустойчивости.

Суммируем результаты приведенных рассуждений и работы [2].

Теорема 4. Постоянные лапласовы решения неограниченной задачи трех тел неустойчивы по Ляпунову, если показатель n и массы трех тел удовлетворяют соотношениям

$$-3 < n \leqslant -\frac{7}{9}, \quad \nu = \frac{16}{75}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^2;$$

$$-3 < n \leqslant 13 - 8\sqrt{3}, \quad \nu = \frac{1}{4}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^2$$

Для остальных значений масс и показателя n, удовлетворяющих соотношениям (1.6), лапласовы решения сохраняют устойчивость и во втором порядке.

Заметим, что теоремы 3, 4 полностью решают вопрос устойчивости постоянных лапласовых решений во втором порядке.

В частном случае, когда одна из масс пренебрежимо мала по сравнению с другими и $n = -2$, обнаруженная неустойчивость подтверждает вывод [10] о неустойчивости треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел при $m_1 = 0.024294 \ldots$.

Автор благодарит В. В. Румянцева и А. Л. Куницына за внимание к работе.

Поступила 11 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kunitsyn A. L.* On the stability of Laplace's solutions of the unrestricted three body problem. Celestial Mech., 1974, vol. 8, No. 9.
2. *Куницын А. Л., Тхай В. Н.* О неустойчивости лапласовых решений неограниченной задачи трех тел. Письма в Акуст. ж., 1977, т. 3, № 8.
3. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, вып. 9.
5. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
6. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
7. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
8. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
9. *Куницын А. Л., Медведев С. В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
10. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.