Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ЗАДАЧА МИНИМАКСНОЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. Ю. Хапалов

(Свердловск)

Исследуется задача об оценке параметров состояния распределенной параболической системы по результатам наблюдения. Предполагается, что система функционирует в условиях неопределенных возмущений в канале измерения и в задании начального распределения. Задача рассматривается в минимаксной постановке [1] по схеме, принятой для обыкновенных дифференциальных уравнений [2] [1]. Получено аналитическое описание множеств $X(\vartheta, y(\cdot))$ $(\vartheta > 0)$ состояний параболической системы, совместимых в момент ϑ с реализовавшимся сигналом $y(t)$ $(t \in [0, \vartheta])$. В качестве оптимальной оценки истинного состояния в момент ϑ выбирается элемент области $X(\vartheta, y(\cdot))$, удовлетворяющий заданному минимаксному критерию. Для параметров, описывающих эволюцию областей $X(\vartheta, y(\cdot))$ во времени, выводятся интегро-дифференциальные уравнения в частных производных. На конкретном примере обсуждается один из способов аппроксимации исходной задачи наблюдения аналогичными задачами для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В иных постановках задачи наблюдения для распределенных систем приведены в [3-6].

1. Постановка задачи апостериорного наблюдения. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве R^n задана некоторая ограниченная область D с границей S, состоящей из конечного числа $(n-1)$-мерных гиперповерхностей класса $C^3(D)$ ($C^p(D)$ — множество всех функций, заданных на D и имеющих p непрерывных производных). В области D рассмотрим систему, описываемую следующей начально-краевой задачей для уравнения в частных производных параболического типа:

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \Delta u(t, x) - q(x) u(t, x) \\
& \alpha(\xi) u(t, \xi) + (1 - \alpha(\xi)) \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial \nu} = 0 \\
& \lim_{t \to 0} \| u(t, x) - u_0(x) \|_{L_2(D)} = 0, \quad u_0(x) \in L_2(D) \\
& \left(x = \operatorname{col}[x_1, \ldots, x_n] \in D,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)
\end{aligned}
$$

---

[1] Постановке и аппроксимации решений задачи минимаксной фильтрации для распределенных систем был посвящен доклад *Куржанского А. Б.* и *Осипова Ю. С.* «Управление и оценивание параметров в системах с распределёнными параметрами». Тр. VI Конгресса ИФАК, Бостон, США. (*Kurzhanskii A. B., Osipov Yu. S.* Minimax control and estimation problems in systems with distributed parameters. Preprints Internat. Federat. Automat. Control 6th triennial World Congress. Boston, 1975. Pittsburg, Pennsylvania, Instrum. Soc. Amer., 1975).

Здесь t — время, $t > 0$, $q(x)$ — функция, непрерывная по Гельдеру в компактной области $D_1 = D \cup S$; $\xi \in S$, ν — внешняя нормаль к поверхности S в точке ξ, $\alpha(\xi)$ — функция класса $C^2(S)$, удовлетворяющая условию $0 \leqslant \alpha(\xi) \leqslant 1$.

Пусть доступный измерению на отрезке $[0, \vartheta]$ $(\vartheta > 0)$ сигнал $y(t)$ представим в виде

$$(1.2) \qquad y(t) = \int_D \varkappa(x) u(t, x)\, dx + \eta(t), \quad \varkappa(x) \in L_2^m(D), \quad \eta(t) \in L_2^m(0, \vartheta)$$

Здесь $\varkappa(x)$ — известная функция; $\eta(t)$ — погрешность в канале измерения; $L_2^m(D)\,(L_2^m(0, \vartheta))$ — транспонированное прямое произведение m пространств $L_2(D)$ $(L_2(0, \vartheta))$. Таким образом, $y(t)$ — m-мерная вектор-функция из $L_2^m(0, \vartheta)$.

Используя информацию, полученную при помощи (1.2), требуется в момент ϑ оценить истинное состояние системы (1.1). При этом предполагается, что начальное состояние $u_0(x)$ и функция $\eta(t)$ заранее неизвестны, но задано условие, определяющее область их допустимых значений

$$(1.3) \qquad \beta^2 \int_D u_0(x) M(x) u_0(x)\, dx + \gamma^2 \int_0^{\vartheta} \eta'(t) N(t) \eta(t)\, dt \leqslant \mu^2$$

Здесь β, γ и μ — некоторые положительные постоянные, $M(x)$ — непрерывная в D_1 положительная функция; $N(t)$ — непрерывная, положительно-определенная для каждого $t \in [0, \vartheta]$ $m \times m$-матрица, штрих означает транспонирование.

Определение 1. (см. [2], § 13). Информационной областью $X(\vartheta, y(\cdot))$ состояний, совместимых с реализовавшимся сигналом $y(t)$ $(t \in [0, \vartheta])$, будем называть множество тех и только тех состояний $u(\vartheta, x)$ системы (1.1), для каждого из которых найдутся функции $u_0(x)$, $\eta(t)$, удовлетворяющие соотношениям (1.1)—(1.3).

Определение 2. Функцию $c(\vartheta, x)$, удовлетворяющую критерию

$$(1.4) \qquad \varepsilon = \max_{z(\cdot)} \| z(\cdot) - c(\vartheta, \cdot) \|_{L_2(D)} = \min_{v(\cdot)} \max_{z(\cdot)} \| v(\cdot) - z(\cdot) \|_{L_2(D)}$$
$$z(\cdot),\ v(\cdot) \in X(\vartheta, y(\cdot))$$

назовем оптимальной оценкой истинного состояния системы (1.1) в момент ϑ при условии (1.2), (1.3).

Отыскание множества $X(\vartheta, y(\cdot))$, функции $c(\vartheta, x)$ составляет содержание задачи апостериорного наблюдения [2].

Известно [6, 7], что единственное решение задачи (1.1) существует и выписывается в виде

$$(1.5) \qquad u(t, x) = \int_D U(t, x, y) u_0(y)\, dy, \quad 0 < t < +\infty, \quad x \in D_1$$

где $U(t, x, y)$ $(t > 0;\ x, y \in D_1)$ — фундаментальное решение системы (1.1), принадлежащее классу C^1 по t, C^2 по x, y из D_1.

Обозначим через $\{-\lambda_i, \omega_i(x), i = 1, 2, 3, \ldots\}$ совокупность собственных чисел и собственных функций эллиптического оператора, стоящего в правой части уравнения (1.1) (при выполнении краевого условия в (1.1)). Тогда

$$\text{а) } \lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty, \quad \lambda_i \geqslant \min_{x\in D_1} q(x), \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

б) $\{\omega_i(x),\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ — полная ортонормальная система в $L_2(D)$,

$$\text{в) } U(t, x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \omega_i(x) \omega_i(y)$$

где ряд в правой части сходится равномерно на произвольном множестве $[\delta, \infty) \times D_1 \times D_1$, $\delta > 0$;

$$\text{г) } \int_D U(t, x, y) h(y)\, dy = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t} h_i \omega_i(x)$$

$$\forall h(x) \in L_2(D), \quad h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \omega_i(x)$$

и ряд сходится равномерно на произвольном множестве $[\delta, \infty) \times D_1$, $\delta > 0$.

Заметим, что из формулы (1.5) и последнего свойства следует включение $u(t, x) \in L_2((0, T) \times D)$ для любого $T > 0$.

2. Решение задачи апостериорного наблюдения. Воспользуемся общей процедурой, описанной в [2]: вначале найдем в пространстве $L_2(D)$ описание области $X(\vartheta, y(\cdot))$ в терминах соответствующих опорных функционалов, далее, исходя из условия (1.4), отыщем искомую функцию $c(\vartheta, x)$.

Перепишем соотношения (1.2), (1.5) в виде

$$u(\vartheta, \cdot) = T u_0(x), \quad T : L_2(D) \to L_2(D)$$
$$y(\cdot) = T_0 u_0(\cdot) + \eta(\cdot), \quad T_0 : L_2(D) \to L_2^m(0, \vartheta)$$

Из результатов п. 1 ясно, что операторы T и T_0 линейные, непрерывные.

Введем обозначения $T_1 = T \times O$, $T_2 = T_0 \times E$ (E — тождественный, O — нулевой операторы на $L_2^m(0, \vartheta)$), $z(\cdot) = \{u_0(\cdot), \eta(\cdot)\}$. Тогда ограничения (1.3) можно записать в виде включения $z(\cdot) \in Q$.

Из определения множества $X(\vartheta, y(\cdot))$ следует, что элемент $u(\vartheta, \cdot) \in X(\vartheta, y(\cdot))$ тогда и только тогда, когда совместна следующая система операторных уравнений:

$$u(\vartheta, \cdot) = T_1 z(\cdot), \quad y(\cdot) = T_2 z(\cdot), \quad z(\cdot) \in Q$$

или, что то же, по теореме 3.1 из [2] для любых $l(x) \in L_2(D)$, $\lambda(t) \in L_2^m(0, \vartheta)$ выполнено неравенство

$$\min \{\langle T_1^* l(\cdot) + T_2^* \lambda(\cdot), z(\cdot)\rangle \mid z(\cdot) \in Q\} - \langle \lambda(\cdot), y(\cdot)\rangle \leqslant \langle l(\cdot), u(\vartheta, \cdot)\rangle \tag{2.1}$$

Здесь $\langle (\cdot), (\cdot)\rangle$ обозначает скалярное произведение в соответствующих гильбертовых пространствах, звездочка обозначает сопряженный оператор.

Теперь из (2.1) (предварительно найдя минимум, см. [2], § 13) получим формулу для опорного функционала множества $X(\vartheta, y(\cdot))$

$$\rho(l(\cdot)\,|\,X(\vartheta, y(\cdot))) = \inf_{\lambda(t)\in L_2^m(0,\vartheta)} \Big\{\int_0^\vartheta \lambda'(t)\,y(t)\,dt + \mu\Big[a^2(\vartheta) - 2\int_0^\vartheta f'(\vartheta, t)\,\lambda(t)\,dt + \int_0^\vartheta\int_0^\vartheta \lambda'(t)\,K(t,\tau)\,\lambda(\tau)\,dt\,d\tau + \frac{1}{\gamma^2}\int_0^\vartheta \lambda'(t)\,N^{-1}(t)\,\lambda(t)\,dt\Big]^{1/2}\Big\} \tag{2.2}$$

$$a^2(\vartheta) = \frac{1}{\beta^2}\iiint_{DDD} M^{-1}(y)\,U(\vartheta, x, y)\,l(x)\,U(\vartheta, \eta, y)\,l(\eta)\,d\eta\,dx\,dy$$

$$f(\vartheta, t) = \frac{1}{\beta^2}\iiint_{DDD} U(\vartheta, x, y)\,l(x)\,M^{-1}(y)\,\varkappa(\eta)\,U(t, \eta, y)\,d\eta\,dx\,dy$$

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\beta^2}\iiint_{DDD} \varkappa(x)\,\varkappa'(\eta)\,U(t, x, y)\,M^{-1}(y)\,U(\tau, \eta, y)\,d\eta\,dx\,dy$$

Рассмотрим подробнее матрицу $K(t, \tau)$. Учитывая соотношения (1.5), (1.1), можно показать, что эта матрица симметрична относительно t, τ, неотрицательно определена (по построению) и непрерывна по совокупности переменных в области $[0, \vartheta] \times [0, \vartheta]$ для произвольного положительного ϑ.

Положим

$$\langle h_1(\cdot), h_2(\cdot)\rangle_K = \int_0^\vartheta\int_0^\vartheta h_1'(t)\,K(t,\tau)\,h_2(\tau)\,dt\,d\tau + \frac{1}{\gamma^2}\int_0^\vartheta h_1'(t)\,N^{-1}(t)\,h_2(t)\,dt$$

$$\forall h_1(t),\ h_2(t) \in L_2^m(0, \vartheta)$$

и рассмотрим следующую систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода с неотрицательным ядром (которая, как известно [8, 9], однозначно разрешается в $L_2^m(0, \vartheta)$):

$$\begin{aligned} &\int_0^\vartheta K(t,\tau)\,d(\vartheta,\tau)\,d\tau + \frac{1}{\gamma^2}N^{-1}(t)\,d(\vartheta, t) = f(\vartheta, t) \\ &\int_0^\vartheta K(t,\tau)\,y^*(\vartheta,\tau)\,d\tau + \frac{1}{\gamma^2}N^{-1}(t)\,y^*(\vartheta, t) = y(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Аргумент ϑ в функциях $d(\vartheta, t)$, $y^*(\vartheta, t)$ показывает, что решения уравнений (2.3) рассматриваются на отрезке $[0, \vartheta]$.

Теперь правую часть в формуле (2.2) можно записать в виде

$$\rho(l(\cdot)\,|\,X(\vartheta, y(\cdot))) = \inf_{\lambda(t)\in L_2^m(0,\vartheta)} \{\langle\lambda(\cdot), y^*(\vartheta,\cdot)\rangle_K + \mu\,[\langle\lambda(\cdot) - d(\vartheta,\cdot), \lambda(\cdot) - d(\vartheta,\cdot)\rangle_K + g^2(\vartheta)]^{1/2}\} \tag{2.4}$$

$$g^2(\vartheta) = a^2(\vartheta) - \langle d(\vartheta,\cdot), d(\vartheta,\cdot)\rangle_K$$

Здесь $g^2(\vartheta) \geqslant 0$, так как (по построению) выражение под корнем в (2.4) определено для любой функции $\lambda(t)$ из $L_2^m(0, \vartheta)$.

Вычисляя нижнюю грань в (2.4) (см. [2], § 13), окончательно получим

$$\rho(l(\cdot) \mid X(\vartheta, y(\cdot))) = g(\vartheta)(\mu^2 - \langle y^*(\vartheta,\cdot), y^*(\vartheta,\cdot)\rangle_K)^{1/2} + \langle y^*(\vartheta,\cdot), d(\vartheta,\cdot)\rangle_K \tag{2.5}$$

Замечание 1. Положим

$$f(\vartheta, t, x) = \frac{1}{\beta^2} \int_D \int_D U(\vartheta, x, y) M^{-1}(y) \varkappa(\eta) U(t, \eta, y)\, d\eta\, dy$$

Тогда

$$f(\vartheta, t) = \int_D l(x) f(\vartheta, t, x)\, dx$$

Как следует из свойств а), в) и г) п. 1, функция $f(\vartheta, t, x)$ непрерывна по совокупности переменных в произвольной области $[\delta, \infty) \times [0, \vartheta] \times D_1$, $\delta > 0$.

Пусть $d(\vartheta, t, x)$ — решение, отличающееся от решения первого из уравнений (2.3) тем, что вместо функции $f(\vartheta, t)$ в правой части стоит $f(\vartheta, t, x)$. Это уравнение также имеет единственное решение для любого $x \in D_1$. Заметим теперь, что

$$d(\vartheta, t) = \int_D l(x) d(\vartheta, t, x)\, dx$$

(опираясь на соответствующее свойство решений уравнений указанного вида [8, 9], можно проверить, что последний интеграл существует).

Примем обозначения

$$h^2(\vartheta) = \langle y^*(\vartheta, \cdot), y^*(\vartheta, \cdot)\rangle_K = \int_0^\vartheta y'(t) y^*(\vartheta, t)\, dt \tag{2.6}$$

$$P(\vartheta, x, y) = \frac{1}{\beta^2} \int_D U(\vartheta, x, \eta) M^{-1}(\eta) U(\vartheta, y, \eta)\, d\eta - \int_0^\vartheta d'(\vartheta, t, y) f(\vartheta, t, x)\, dt$$

$$c(\vartheta, x) = \int_0^\vartheta f'(\vartheta, t, x) y^*(\vartheta, t)\, dt = \int_0^\vartheta d'(\vartheta, t, x) y(t)\, dt = \langle y^*(\vartheta, \cdot), d(\vartheta, \cdot, x)\rangle_K$$

Тогда из формулы (2.5) следует

$$\rho(l(\cdot) \mid X(\vartheta, y(\cdot))) = \left\{\int_D \int_D l(x) P(\vartheta, x, y) l(y)\, dx dy\right\}^{1/2} (\mu^2 - h^2(\vartheta))^{1/2} + \int_D l(x) c(\vartheta, x)\, dx \tag{2.7}$$

Известно [10], что множество с опорным функционалом (2.7) представляет собой эллипсоид (задаваемый в пространстве $L_2(D)$ при помощи соответствующего скалярного произведения) с центром в точке $c(\vartheta, \cdot)$.

Таким образом, справедливо утверждение:

Теорема 1. Информационная область $X(\vartheta, y(\cdot))$ состояний системы (1.1), совместимая с реализовавшимся сигналом $y(t)$ $(t \in [0, \vartheta])$, при ограничении (1.3) представляет собой эллипсоид, быть может, вырожденный, с опорным функционалом (2.7) и с центром в точке $c(\vartheta, x)$, определяемой последней формулой (2.6).

Обсудим геометрический смысл полученного решения задачи апостериорного наблюдения.

Пусть реализовался сигнал $y(t)$, порожденный парой функций

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega_k(x), \quad \eta(t)$$

т. е. (см. (1.2))

$$y(t) = \varphi(t) + \eta(t), \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} b_k a_k \quad \left(\varkappa(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \omega_k(x)\right) \tag{2.8}$$

Обозначим через L множество всех функций из $L_2^m(0, \vartheta)$ вида $\varphi(t)$, таких, что по функции $u_0(x)$ найдется некоторая функция $\eta(t)$, и пара $\{u_0(x), \eta(t)\}$ будет удовлетворять условиям (2.8), (1.3). Пусть L_1 — дополнение L до $L_2^m(0, \vartheta)$. Тогда соотношение (2.8) можно переписать в виде

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad y_1(t) = \varphi(t) + \eta_1(t) \in L,$$
$$y_2(t) = \eta_2(t) \in L_1, \quad \eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$$

Справедливо утверждение (ср. с [2], § 11).

Теорема 2. 1°. Оптимальной оценкой истинного состояния системы (1.1) в момент ϑ при условии (1.2), (1.3) будет центр эллипсоида $X(\vartheta, y(\cdot))$ — функция $c(\vartheta, x)$, задаваемая последней формулой (2.6).

Рассмотрим совокупность порожденных в силу (1.1)—(1.3) сигналов $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ $(y_1(t) \in L, y_2(t) \in L_1)$ с фиксированной первой составляющей $y_1(t)$.

2°. Если вторая составляющая сигнала — функция $y_2(t)$ из L_1 — равна нулю, то информационная область $X(\vartheta, y(\cdot))$ достигает наибольших размеров (этот случай наименее благоприятен для наблюдателя, так как ошибка оценки при этом максимальна).

3°. В наиболее благоприятном для наблюдателя случае эллипсоид $X(\vartheta, y(\cdot))$ может вырождаться в точку. При этом функции $u_0(x)$, $\eta(t)$, породившие $y(t)$, удовлетворяют ограничению (1.3) со знаком равенства.

3. **Уравнения минимаксной фильтрации.** Используя результаты теорем 1 и 2, перейдем к изучению динамики информационных областей $X(\vartheta, y(\cdot))$. Приведем вывод дифференциальных уравнений для функций $c(\vartheta, x)$, $P(\vartheta, x, y)$, $h^2(\vartheta)$, динамика изменения которых определяет эволюцию областей $X(\vartheta, y(\cdot))$. С этой целью проделаем ряд преобразований, правомерность которых будет обоснована ниже.

Введем вспомогательную функцию $B(\vartheta, x, y)$ по формуле

$$B(\vartheta, x, y) = \langle d(\vartheta, \cdot, x), d(\vartheta, \cdot, y)\rangle_K \tag{3.1}$$

Далее, дифференцируя функцию $B(\vartheta, x, y)$ по ϑ и принимая во внимание соотношения (3.1), (1.5), замечание 1, а также равенства

$$\int_0^{\vartheta} K(t, \vartheta)\, d(\vartheta, t, x)\, dt = \int_0^{\vartheta}\int_D f(\vartheta, t, z)\, \varkappa'(z)\, d(\vartheta, t, x)\, dz\, dt =$$
$$= \int_D \varkappa(y)\, B(\vartheta, x, y)\, dy$$

для функции $B(\vartheta, x, y)$ получим задачу

$$\frac{\partial B(\vartheta, x, y)}{\partial \vartheta} = \Delta B(\vartheta, x, y) - [q(x) + q(y)]\, B(\vartheta, x, y) + \tag{3.2}$$
$$+ \gamma^2 \left[f(\vartheta, \vartheta, x) - \int_D \varkappa(y)\, B(\vartheta, x, y)\, dy\right]' N(\vartheta) \left[f(\vartheta, \vartheta, y) -\right.$$
$$\left. - \int_D \varkappa(x)\, B(\vartheta, x, y)\, dx\right]$$
$$\vartheta > 0; \quad x, \ y \in D$$
$$\alpha(\xi)\, B(\vartheta, x, \xi) + (1 - \alpha(\xi))\, \frac{\partial B(\vartheta, x, \xi)}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in S$$
$$\alpha(\xi)\, B(\vartheta, \xi, y) + (1 - \alpha(\xi))\, \frac{\partial B(\vartheta, \xi, y)}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in S$$
$$\lim_{\vartheta \to 0} \| B(\vartheta, x, y) \|_{L_2(D \times D)} = 0$$

Из второй формулы (2.6) следует, что

$$P(\vartheta, x, y) = \frac{1}{\beta^2} \int_D U(\vartheta, x, \eta)\, M^{-1}(\eta)\, U(\vartheta, y, \eta)\, d\eta - B(\vartheta, x, y) \tag{3.3}$$

Поэтому функция $P(\vartheta, x, y)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial P(\vartheta, x, y)}{\partial \vartheta} = \Delta P(\vartheta, x, y) - (q(x) + q(y))\, P(\vartheta, x, y) - \tag{3.4}$$
$$- \gamma^2 \int_D \int_D \varkappa'(\eta)\, P(\vartheta, x, \eta)\, N(\vartheta)\, P(\vartheta, y, z)\, \varkappa(z)\, d\eta\, dz, \qquad \vartheta > \delta > 0$$
$$x, y \in D$$
$$\alpha(\xi)\, P(\vartheta, \xi, y) + (1 - \alpha(\xi))\, \frac{\partial P(\vartheta, \xi, y)}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in S$$
$$\alpha(\xi)\, P(\vartheta, x, \xi) + (1 - \alpha(\xi))\, \frac{\partial P(\vartheta, x, \xi)}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in S$$
$$P(\vartheta, x, y)\,|_{\vartheta=\delta} = P(\delta, x, y)$$

Здесь δ — произвольное положительное число, $P(\delta, x, y)$ вычисляется по формуле (2.6).

Аналогичным образом могут быть получены и задачи для функций $c(\vartheta, x)$ и $h^2(\vartheta)$.

$$\frac{\partial c(\vartheta, x)}{\partial \vartheta} = \Delta c(\vartheta, x) - q(x)\, c(\vartheta, x) + \gamma^2 \left[y(\vartheta) - \int_D c(\vartheta, x)\, \varkappa(x)\, dx\right]' \tag{3.5}$$
$$N(\vartheta) \left[f(\vartheta, \vartheta, x) - \int_D \varkappa(y)\, B(\vartheta, x, y)\, dy\right], \qquad \vartheta > 0, \quad x \in D$$

$$\alpha(\xi)\,c(\vartheta,\xi)+(1-\alpha(\xi))\frac{\partial c(\vartheta,\xi)}{\partial\nu}=0,\quad \xi\in S$$

$$\lim_{\vartheta\to 0}\|c(\vartheta,x)\|_{L_2(D)}=0$$

(3.6) $$\frac{\partial c(\vartheta,x)}{\partial\vartheta}=\Delta c(\vartheta,x)-q(x)\,c(\vartheta,x)+\gamma^2\Big(y(\vartheta)-\int_D c(\vartheta,x)\,\varkappa(x)\,dx\Big)'$$

$$N(\vartheta)\int_D \varkappa(y)\,P(\vartheta,x,y)\,dy,\quad \vartheta>\delta>0,\quad x\in D$$

$$\alpha(\xi)\,c(\vartheta,\xi)+(1-\alpha(\xi))\frac{\partial c(\vartheta,\xi)}{\partial\nu}=0,\quad \xi\in S$$

$$c(\vartheta,x)\big|_{\vartheta=\delta}=c(\delta,x)$$

(3.7) $$\frac{\partial h^2(\vartheta)}{\partial\vartheta}=\gamma^2\Big[y(\vartheta)-\int_D\varkappa(x)\,c(\vartheta,x)\,dx\Big]'N(\vartheta)\Big[y(\vartheta)-$$

$$-\int_D\varkappa(x)\,c(\vartheta,x)\,dx\Big]$$

Теорема 3. Функции $c(\vartheta, x)$, $P(\vartheta, x, y)$, $h^2(\vartheta)$ — решение задач (3.6), (3.4), (3.7).

Замечание 2. Функция $c(\vartheta, x)$ может быть также найдена как решение задачи (3.5), где $B(\vartheta, x, y)$ — решение задачи (3.2). Функции $B(\vartheta, x, y)$ и $P(\vartheta, x, y)$ связаны соотношением (3.3).

Справедливость выкладок, проведенных выше, можно обосновать опираясь на соответствующие свойства решений интегральных уравнений Фредгольма второго рода (2.3) [8,9]. Можно показать также, что функции $((\vartheta, x)$, $P(\vartheta, x, y)$, $B(\vartheta, x, y)$, $h^2(\vartheta)$ непрерывны по совокупности переменных при $\vartheta>0$; $x, y\in D_1$ и обладают непрерывными производными $\partial^2 c\,(\vartheta, x)/\partial x_i^2$, $\partial^2 P(\vartheta, x, y)/\partial x_i^2$, $\partial^2 P(\vartheta, x, y)/\partial y_i^2$, $\partial P(\vartheta, x, y)/\partial\vartheta$, $\partial^2 B(\vartheta, x, y)/\partial x_i^2$, $\partial^2 B(\vartheta, x, y)/\partial y_i^2$, $\partial^2 B(\vartheta, x, y)/\partial\vartheta$ $(\vartheta>0;\ x, y\in D_1,\ i=1, 2, \ldots, n)$. Функции $c(\vartheta, x)$, $h^2(\vartheta)$ дифференцируемы по ϑ для почти всех $\vartheta>0$.

Используя результаты работы [11], можно показать однозначную разрешимость начально-краевых задач (3.6), (3.4) в рассматриваемом классе функций.

4. Задача аппроксимации. Обсудим на конкретном примере один из возможных способов аппроксимации исходной задачи апостериорного наблюдения (1.1) — (1.4) аналогичными задачами для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых хорошо известны.

Рассмотрим систему, описываемую задачей Дирихле для уравнения теплопроводности

(4.1) $$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\quad x\in(0,1),\quad t>0$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0,\quad u(t,x)\big|_{t=0}=u_0(x)\in L_2(0,1)$$

Положим для определенности $M(x)=1$, $N(t)$ — единичная $m\times m$-матрица. Тогда ограничение (1.3) перепишется в виде

(4.2) $$\beta^2\int_0^1 u_0^2(x)\,dx+\gamma^2\int_0^\vartheta \eta'(t)\,\eta(t)\,dt\leqslant\mu^2$$

В качестве аппроксимирующей последовательности для задач (4.1), (1.2), (4.2) будем рассматривать следующую совокупность задач апостериорного наблюдения[1]. Для системы

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} &\frac{du_1^n}{dt} = \frac{1}{h^2}(-2u_1^n + u_2^n)\\ &\frac{du_i^n}{dt} = \frac{1}{h^2}(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n), \quad i = 2, \ldots, n-1\\ &\frac{du_n^n}{dt} = \frac{1}{h^2}(u_{n-1}^n - 2u_n^n), \quad t > 0\\ &u_i^n(0) = u_{0i}^n, \quad i = 1, \ldots, n \left(h = \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

и уравнения измерения

$$(4.4)\qquad y(t) = G^n u^n(t) + \xi(t), \quad t \in [0, \vartheta]$$

описать в пространстве R^n информационную область $X_n(\vartheta, y(\cdot))$ состояний системы (4.3), совместимую с сигналом $y(t)$ $(t \in [0, \vartheta])$, т. е. множество тех и только тех векторов $u^n(\vartheta) \in R^n$, для каждого из которых найдется пара u_0^n, $\xi(t)$, удовлетворяющая соотношениям (4.3), (4.4) при условии

$$(4.5)\qquad \beta^2 u_0^{n\prime} H^n u_0^n + \gamma^2 \int_0^{\vartheta} \xi'(t)\xi(t)\,dt \leqslant \mu^2 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0$$

Здесь G^n — матрица размерности $n \times m$ с элементами

$$g_{ji}^n = \int_{hi}^{h(i+1)} \varkappa_j(x)\,dx, \quad i = 0, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, m$$

$$u_0^n = \operatorname{col}[u_{01}^n, \ldots, u_{0n}^n], \quad H^n = \operatorname{diag}\{h, \ldots, h\}$$
$$\varkappa(x) = \operatorname{col}[\varkappa_1(x), \ldots, \varkappa_m(x)]$$

Подчеркнем, что функция $y(t)$, фигурирующая в (4.4), одна и та же для всех n и представляет собой именно тот сигнал, который реализовался на выходе системы (4.1) в силу (1.2). Возможность такой постановки задач (4.3) — (4.5) обеспечивается тем, что в правую часть неравенства (4.5) добавлено положительное число ε_1, которое выбирается произвольным образом.

Решая задачи (4.3) — (4.5) (см. [2], § 13), получим последовательность функций $h_n^2(\vartheta)$, $P^n(\vartheta)$, $c^n(\vartheta)$, которые служат параметрами соответствующих информационных областей $X_n(\vartheta, y(\cdot))$.

Примем обозначения

$$(4.6)\qquad c^n(\vartheta, x) = \begin{cases} c_1^n(\vartheta), & 0 \leqslant x \leqslant h\\ c_i^n(\vartheta), & (i-1)h < x \leqslant ih\\ 0, & nh < x \leqslant 1\end{cases}$$

Через $P^n(\vartheta, x, y)$ обозначим функцию, полученную при помощи $n \times n$-матрицы $P^n(\vartheta)$ способом, аналогичным (4.6). Справедлива следующая теорема об аппроксимации

Теорема 4. Пусть $\varkappa_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — функции, ограниченные на отрезке $[0, 1]$ $(\varkappa(x) \in L_2^m(0,1))$. Тогда функции $c^n(\vartheta, x)$, $P^n(\vartheta, x, y)$, $h_n^2(\vartheta)$ при $n \to \infty$ равномерно сходятся к функциям $c(\vartheta, x)$, $P(\vartheta, x, y)$, $h^2(\vartheta)$ соответственно при $\vartheta \in [\delta, T]$; $x, y \in [0,1]$, где δ и T — произвольные положительные числа.

Автор благодарит А. Б. Куржанского за постановку задачи и ценные замечания.

[1] См. примечание на стр. 1016.

Поступила 10 V 1978

'ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., «Наука», 1977.
3. *Бутковский А. Г.* Структурная теория распределенных систем. М., «Наука», 1977.
4. *Meditch J. S.* On state estimation for distributed parameter systems. J. Franklin Inst., 1970, vol. 290, No. 1.
5. *Sakawa Y.* Optimal filtering in linear distributed parameter systems. Internat. J. Control, 1972, vol. 16, No. 1.
6. *Sakawa Y.* Observability and related problems for partial differential equations of parabolic type. SIAM Journal Control, 1975, vol. 13, No. 1.
7. *Ito S.* Partial differential equations. Baifukan, Tokyo, 1966.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М., «Наука», 1965.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 4. М., «Наука», 1974.
10. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
11. *Da Prato G.* Equations d'évolution dans des algébres d'opérateurs et application à des équations quasi linéaires. J. math. pures et appl., 1969, t. 48, N° 1.