Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

О НЕОБХОДИМОСТИ ОДНОГО ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВРЕМЕНИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

П. Б. Гусятников

(Москва)

Для одного класса линейных задач преследования, удовлетворяющих условиям локальной выпуклости, приводится необходимое и достаточное условие оптимальности времени верхнего слоя.

1. Пусть линейная задача преследования в n-мерном евклидовом пространстве R описывается линейным векторным дифференциальным уравнением [1-5]

$$dz\,/\,dt = Cz - u + v \tag{1.1}$$

(C — постоянная квадратная матрица порядка n, $u = u(t) \in P$ и $v = v(t) \in Q$ — измеримые при $t \geqslant 0$ вектор-функции, называемые управлениями игроков, $P \subset R$ и $Q \subset R$ — выпуклые компакты) и терминальным множеством $M = M_0 + W_0$, где M_0 — линейное подпространство пространства R, W_0 — компактное выпуклое множество в подпространстве L, являющемся ортогональным дополнением в R к M_0. Обозначим через π оператор ортогонального проектирования на L (предполагаем, что $\nu = \dim L \geqslant 2$), через K — единичную сферу в L, через $\Phi(t)$ — матрицу e^{tC}, через $(a \cdot b)$ скалярное произведение векторов $a \in R$ и $b \in R$. Пусть T_0 — некоторое фиксированное положительное число. Будем предполагать, что для задачи (1.1) выполнены условия 1—3 работы [3] (обозначения которой вместе с обозначениями [4] сохраним и в данной статье), при этом выполнение условия 1 потребуем только по $r \in (0, T_0] = I_0$, а условия 3 — только по $t \in [0, T_0]$. Обозначим через M_1 и M_2 линейные подпространства в R и через p_0 и q_0 — векторы из R, такие, что линейные многообразия $M_1 + p_0$ и $M_2 + q_0$ являются несущими [6] соответственно для P и Q. Положим $P_0 = P - p_0$, $Q_1 = Q - q_0$.

Условие 4. Существуют линейный гомеоморфизм $A : M_2 \to M_1$, аналитически зависящий от $r \in I_0$ линейный гомеоморфизм $\Pi(r)$: $M_1 \to L$ и аналитические по $r \in (-\infty, +\infty)$ функции $f(r)$ и $g(r)$, положительные на I_0, такие, что

$$\begin{gathered}\pi(r)u \equiv f(r)\Pi(r)u^* + p_0(r), \quad \pi(r)v \equiv g(r)\Pi(r)Av^* + q_0(r)\\ \pi(r) \equiv \pi\Phi(r), \quad u^* = u - p_0 \in P_0, \quad v^* = v - q_0 \in Q_1\\ p_0(r) = \pi(r)p_0, \quad q_0(r) = \pi(r)q_0 \quad \forall\, u \in P, \quad v \in Q, \quad r \in I_0\end{gathered} \tag{1.2}$$

Из соотношений (1.2) вытекает, что границы множеств $P_0 \subset M_1$ и $Q_0 = AQ_1 \subset M_1$ — локально выпуклые в M_1 поверхности, причем, если $\psi \in K_1$ (где K_1 — единичная сфера в M_1), а $p(\psi)$ и $q(\psi)$ — векторы, дающие максимум соответственно выражениям $(\psi \cdot p)$, $p \in P_0$ и $(\psi \cdot q)$, $q \in Q_0$, то векторы $p(\psi)$ и $q(\psi)$ единственны и

(1.3) $$u(r, \varphi) \equiv p(\Gamma(r, \varphi)) + p_0, \quad v(r, \varphi) \equiv A^{-1}q(\Gamma(r, \varphi)) + q_0$$
$$\Gamma(r, \varphi) \equiv \Pi^*(r)\varphi / |\Pi^*(r)\varphi|, \quad \Pi^*(r) : L \to M_1$$
$$\forall \varphi \in K, \quad r \in I_0$$

Здесь $\Pi^*(r)$ — аналитически зависящий от $r \in I_0$ линейный гомеоморфизм, сопряженный к $\Pi(r)$, т. е. дающий равенство

$$(x \cdot \Pi(r)\, y) \equiv (\Pi^*(r) x \cdot y), \quad \forall\, r \in I_0, \quad x \in L, \quad y \in M_1$$

Пусть

$$w_*(r) = \pi(r)P \overset{*}{-} \pi(r)Q, \quad \overline{w}(r) = f(r)P_0 \overset{*}{-} g(r)Q_0$$

Тогда (см. [7,8])

$$w_*(r) \equiv \Pi(r)\overline{w}(r) + \Delta(r), \quad \Delta(r) = p_0(r) - q_0(r)$$

Известно [9], что при выполнении условий 1—4 условие полного выметания

(1.4) $$\overline{w}(r) + g(r)Q_0 \equiv f(r)P_0, \quad r \in I_0$$

достаточно для глобальной [4] оптимальности времени $T(z) \leqslant T_0$, построенного в [5].

Условие 5. Существуют ν-мерное линейное подпространство $M_3 \subset R$, линейный гомеоморфизм $B : M_3 \to M_1$ и аналитическая по $r \in (-\infty, +\infty)$ функция $k(r)$, такая, что тройка $\varkappa = \{f(r), g(r), k(r)\}$ линейно независима на I_0, такие, что

$$\pi(t)w = k(t)\,\Pi(t)Bw, \quad \forall\, t \in I_0, \quad w \in M_3$$

2. *Теорема 1.* Пусть для задачи (1.1) выполнены условия 1—5. Тогда условие полного выметания является и необходимым условием глобальной оптимальности времени $T(z) \leqslant T_0$.

Доказательство теоремы 1 будет проведено в несколько этапов и основывается на теореме 2 из [8].

3. Положим

$$p(\varphi, \psi) = (\varphi \cdot p(\varphi) - p(\psi)), \quad q(\varphi, \psi) = (\varphi \cdot q(\varphi) - q(\psi))$$
$$h(\varphi, \psi) = q(\varphi, \psi) / p(\varphi, \psi), \quad \alpha = \sup h(\varphi, \psi)$$

(sup берется по всем $\varphi, \psi \in K_1$, $\varphi \neq \psi$). В [8] показано, что на сфере K_1 существуют точка φ_0, локальная система координат $\bar{s} = (s^2, \ldots, s^\nu)$ в ее окрестности $O_{\varphi_0} \subset K_1$ с началом O в точке φ_0, такие, что

(3.1) $$\varphi = \varphi(\bar{s}) = \varphi(s^2, \ldots, s^\nu), \quad \varphi \in O_{\varphi_0}, \quad \varphi(0) = \varphi_0$$
$$q_{22}(\varphi(0)) = \alpha p_{22}(\varphi(0))$$
$$q_{ij}(\varphi(\bar{s})) = \left(\varphi_i(\bar{s}) \cdot \frac{\partial q(\varphi(\bar{s}))}{\partial s^j}\right), \quad p_{ij}(\varphi(\bar{s})) = \left(\varphi_i(\bar{s}) \cdot \frac{\partial p(\varphi(\bar{s}))}{\partial s^j}\right);$$
$$\varphi_i(\bar{s}) = \frac{\partial \varphi(\bar{s})}{\partial s^i}, \quad i, j = 2, \ldots, \nu.$$

Там же [8] доказано, что полное выметание (1.4) имеет место тогда и только тогда, когда

$$m(r) \geqslant 1, \quad m(r) = f(r) / (\alpha g(r)), \quad r \in I_0$$

Предположение 1. Существуют $0 < \tau < \tau_1 \leqslant T_0$, такие, что $m(r) \geqslant 1$, $r \in (0, \tau]$ и $m(r) < 1$, $r \in (\tau, \tau_1]$.

Замечание 1. В силу аналитичности $m(r)$ найдется $\tau_2 \in (\tau, \tau_1)$, такое, что $m'(r) < 0$, $r \in \Gamma \equiv (\tau, \tau_2]$.

В п. 4—6 будет показано, что при выполнении предположения 1 и условий теоремы 1 в пространстве R найдется точка z_*, для которой время $T(z_*) < T_0$ неоптимально.

4. *Лемма 1.* Пусть $\theta \in (\tau, \tau_2)$. Тогда для любого достаточно малого $\tau_0 \in (0, \tau)$, $\theta + \tau_0 \in \Gamma$ определитель $\Delta = \Delta_1(\theta + \tau_0) \neq 0$ (здесь $\Delta_1(t)$ — определитель Вронского для системы функций $f(t)$, $g(t)$, $k(t)$), а функция

$$R(t) = f(t + \tau_0) g(\theta + \tau_0) - f(\theta + \tau_0) g(t + \tau_0)$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

$$R(t) > 0, \quad t \in [0, \theta), \quad R(\theta) = 0, \quad -R'(\theta) = N > 0 \tag{4.1}$$

В силу аналитичности функций, входящих в тройку $\varkappa$, первая часть леммы вытекает [10] из линейной независимости этих функций. Вторая часть следует из предположения 1, замечания 1, и представления

$$R(t) = \alpha g(\theta + \tau_0) g(t + \tau_0)(m(t + \tau_0) - m(\theta + \tau_0))$$

Следствие 1. Для любого достаточно малого $\tau_0 > 0$ существуют аналитические функции $h_1(t)$, $h_2(t)$, $H(t) = h_3(t)$, являющиеся каждая линейной комбинацией функций $f(t + \tau_0)$, $g(t + \tau_0)$ и $k(t + \tau_0)$, удовлетворяющие условиям

$$d^j h_i(\theta) / dt^j = \begin{cases} 0, & j \neq i - 1 \\ 1, & j = i - 1 \end{cases}; \quad j = 0, 1, 2; \; i = 1, 2, 3 \tag{4.2}$$

Для проверки следствия достаточно заметить, что в силу леммы 1 для определения коэффициентов каждой линейной комбинации имеем линейную систему с определителем $\Delta \neq 0$.

Зафиксируем всюду в дальнейшем $\theta \in (\tau, \tau_2)$ и число $\tau_0 > 0$ настолько малым, чтобы удовлетворить заключению леммы 1.

Положим

$$L(t) = \Pi(t + \tau_0), \quad D(t, \varphi) = (L^{-1}(t))^* \varphi \, / \, |(L^{-1}(t))^* \varphi|$$
$$M(t, \varphi) = L^{-1}(t) W(t, D(t, \varphi)), \quad C(t) z = L^{-1}(t) \pi(t) z$$
$$\forall t \in [0, \theta] = I_1, \quad \varphi \in K_1, \quad z \in R$$

Здесь $L^{-1}(t) : L \to M_1$ — оператор, обратный к $L(t)$, знак $*$ означает переход к сопряженному оператору, причем, как известно, $(L^{-1}(t))^* = (L^*(t))^{-1}$.

Оператор $L(t)$ невырожден для каждого $t \in I_1$, поэтому невырожден и оператор $L^*(t)$, а семейство поверхностей $M(t, K_1)$, $t \in I_1$ локально выпукло [5]. В связи с этим существует $c_2 > 0$, такое, что (см. лемму 2 в

[5]), что

$$(\varphi \cdot M(t, \varphi) - M(t, \psi)) \geqslant c_2(\varphi \cdot \varphi - \psi)$$
$$\forall t \in [\tau, \theta], \quad \varphi \in K_1, \quad \psi \in K_1$$

Отметим, что представление для $M(t, \varphi)$ выбрано так, что вектор φ — внешняя нормаль к поверхности $M(t, K_1)$ в точке $M(t, \varphi)$.

Замечание 2. Поскольку

$$(\psi \cdot W(t, \psi) - \pi(t)z) = (L^*(t)\psi \cdot L^{-1}(t)W(t, \psi) - C(t)z) =$$
$$= l(t, \varphi)(\varphi \cdot M(t, \varphi) - C(t)z),$$
$$\varphi = L^*(t)\psi / |L^*(t)\psi| \in K_1, \quad l(t, \varphi) = |(L^{-1}(t))^*\varphi|^{-1};$$
$$\forall \psi \in K, \ z \in R, \ t \in I_1$$

то функция $\lambda(z, t)$ имеет тот же знак и те же корни, что и функция

$$n(z, t) = \min_{\varphi \in K_1} (\varphi \cdot M(t, \varphi) - C(t)z) \tag{4.3}$$

Обозначим $\psi_*(z, t) \equiv L^*(t)\psi(z, t) / |L^*(t)\psi(z, t)|$ (вектор $\psi(z, t)$ введен в [4], стр. 205). Тогда, если $\varphi(z, t)$ — вектор, дающий минимум в (4.3), и $\lambda(z, t) = 0$, то $\varphi(z, t) = \psi_*(z, t)$.

Замечание 3. Пусть $\varphi_0 = \varphi(0)$ — вектор из (3.1). В силу следствия 1 и условий 4,5 существует вектор $z_0 \in R$, такой, что

$$C(t)z_0 = M(\theta, \varphi_1)h_1(t) + \frac{\partial M(\theta, \varphi_1)}{\partial t} h_2(t) + \frac{\partial^2 M(\theta, \varphi_1)}{\partial t^2} h_3(t), \quad t \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Так что с учетом (4.2) $M(t, \varphi_1) - C(t)z_0 = \varepsilon(t)$, $|\varepsilon(t)| \leqslant c_0^*(\theta - t)^3$, $0 \leqslant t \leqslant \theta$, где $c_0^* > 0$ — некоторая фиксированная постоянная. Для любых вещественных a, b, c существует вектор $z^*(a, b, c) \in R$, дающий равенство

$$C(t)z^*(a, b, c) = (aR(t) + bH(t))\varphi_1 + cH(t)\chi_1, \quad t \geqslant 0 \tag{4.5}$$
$$\varphi_1 = \omega(\theta, \varphi_0) \in K_1, \quad \omega(r, \varphi) \equiv \frac{N^{-1}(r)\varphi}{|N^{-1}(r)\varphi|}, \quad \varphi \in K_1, \quad r \in I_0$$
$$\chi_1 = \frac{\partial}{\partial s^2} M(\theta, \omega(\theta, \varphi(0))), \quad \psi_0 = D(\theta, \varphi_1), \quad N(r) \equiv \Pi^*(r)(L^*(r))^{-1}$$

Здесь χ_1 — ненулевой вектор, ортогональный к φ_1 (растянув, если необходимо, локальные координаты, можно считать, что $|\chi_1| = 1$).

Поясним замечание 3. Правая часть каждого из равенств (4.4), (4.5) имеет вид

$$f(t + \tau_0)u_0 + g(t + \tau_0)Av_0 + k(t + \tau_0)Bw_0,$$
$$u_0 \in M_1, \quad v_0 \in M_2, \quad w_0 \in M_3$$

Поэтому в левой части достаточно взять вектор $z = e^{\tau_0 C}(u_0 + v_0 + w_0)$. Отметим также, что отображение $N(r)\varphi$ аналитично по $r \in (0, \theta]$, $\varphi \in K_1$, так что найдется $c_3 > 0$, такое, что

$$|N(r)\varphi - N(\theta)\varphi| \leqslant c_3(\theta - r), \quad r \in [\tau, \theta], \quad \varphi \in K_1 \tag{4.6}$$

Положим $z(a, b, c) = z_0 + z^*(a, b, c)$; $\theta(t) = \theta - t$. Имеем

$$\pi(\theta)z(a, b, c) = W(\theta, \psi_0), \quad \psi(z(a, b, c), \theta) = \psi_0 \tag{4.7}$$

5. Обозначим через $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \theta$ все нули функции $H(t)$ на полуинтервале $[0, \theta)$, через $\theta_* > \tau$ — фиксированное число $\theta_* \in (\theta_m, \theta)$, настолько близкое к θ, что

$$\theta^2(t) < 4H(t) \leqslant 4\theta^2(t), \quad 1 \leqslant \frac{2R(t)}{N\theta(t)} \leqslant 2 \tag{5.1}$$

$$8\,|\,\varepsilon(t)\,| \leqslant c_2(\theta(t))^{4/3} \leqslant c_2 / 16, \quad \forall\, t \in I = [\theta_*, \theta) \subset (\tau, \theta)$$

Положим

$$E = \max_{t \in I_1,\, \varphi \in K_1} (|C(t) z_0| + |M(t, \varphi)|), \quad Y = \min_{t \in [0, \theta_*]} R(t) > 0 \tag{5.2}$$

$$a_0 = 2Y^{-1}(E + 2^8 E^2 N^2 (c_2 Y^2)^{-1} + 4c_2), \quad \theta_0 = \theta - \delta_0$$

$$\delta_0 = \min\{\theta - \theta_*, Y^3 2^{-7} N^{-3}, (4a_0 N c_2^{-1})^{3/4}, c_2^2 Y^3 4^{-7} E^{-2} N^{-3}\}$$

$$a_1 = 2a_0(N + Y) + (32EN)^2 (c_2 Y^2)^{-1} + 4c_2$$

Лемма 2. Для любого $T \in I^0 = (\theta_0, \theta)$ найдутся числа $a = a(T) \equiv \equiv a_0$, $b = b(T)$, $c = c(T) \equiv 4E(\theta - T)^{-2}$ и непустое множество $\Omega(T)$, замыкание которого содержится в интервале (T, θ), такие, что

а) $\lambda(z(a, b, c), t) < 0$, $t \in [0, T] = X$; $\lambda(z(a, b, c), t) \leqslant 0$, $t \in \in [T, \theta]$;

б) если $\lambda(z(a, b, c), t) = 0$ и $t \in [0, \theta)$, то $t \in \Omega(T)$, и наоборот;

в) $|\,aR(t) + bH(t)\,| \leqslant a_1(\theta - T)^{2/3}$; $|\,cH(t)\,| \leqslant 4E$, $t \in [T, \theta]$.

Доказательство. Положим

$$b^* = b^*(T) = -\frac{aR(r)}{H(r)} - \frac{64E^2 H(r)}{c_2 \theta^4(T)} - 4c_2(\theta(r))^{1/3}, \quad r = \theta - \frac{4N(\theta(T))^{4/3}}{Y} > T \tag{5.3}$$

$$T^* = \max\{(\theta + r)/2, \ \theta - a_0 N(2\,|\,b^*\,| + c_2)^{-1}\} \tag{5.4}$$

Для любого $\bar b \in [b^*, 0]$ через $z(\bar b)$ обозначим вектор $z(a, \bar b, c)$, где $a \equiv a(T)$ и $c \equiv c(T)$ задаются леммой 2. Тогда

$$\lambda(z(\bar b), t) < 0, \quad t \in X, \bar b \in [b^*, 0] \tag{5.5}$$

Действительно, для тех $t \in X$, для которых $4\,|\,H(t)\,| > (\theta - T)^2$, имеем ($\sigma(t) = = \operatorname{sign} H(t)$), используя ортогональность φ_1 и χ_1 и соотношения (4.5), (5.2)

$$n(z(\bar b), t) \leqslant (\sigma(t)\chi_1 \cdot M(t, \sigma(t)\chi_1) - C(t) z(\bar b)) = (\sigma(t)\chi_1 \cdot M(t, \sigma(t)\chi_1) -$$
$$- C(t) z_0) - c\,|\,H(t)\,| \leqslant E - 4E\,|\,H(t)\,|\,(\theta - T)^{-2} < 0$$

Для тех $t \in X$, для которых $4\,|\,H(t)\,| \leqslant (\theta - T)^2$, имеем в силу (5.1) включение $\in [0, \theta_*]$. Так что, используя (5.1) — (5.3) и неравенство $\theta - T < 1$, получим, как и в [8]

$$n(z(\bar b), t) \leqslant (\varphi_1 \cdot M(t, \varphi_1) - C(t) z_0) - (aR(t) + \bar b H(t)) \leqslant E -$$
$$- a_0 Y + |\,b^*\,|\,\theta^2(T) / 4 < 0$$

Неравенство (5.5) доказано (см. замечание 2).

Покажем, что

$$\lambda(z(\bar b), t) < 0, \quad t \in [T^*, \theta], \ t \neq \theta, \ \bar b \in [b^*, 0] \tag{5.6}$$

Действительно, $n(z(\bar b), t) \leqslant |\,\varepsilon(t)\,| - a_0 R(t) + |\,b^*\,|\,H(t) < 0$, $t \in [T^*, \theta)$.

Докажем неравенство

$$\lambda(z(b^*), r) > 0 \tag{5.7}$$

Положим $n_* = n(z(b^*), r)$; $l_* = aR(r) + b^* H(r)$. В силу (5.1) — (5.3)

(5.8) $$c_2 > c_2 + l_* = c_2 - 64E^2H^2(r)\,\theta^{-4}(T)\,c_2^{-1} - 4c_2\theta^{1/2}(r)\,H(r) > {}^1/_2 c_2$$

Поэтому для величины $n_* = (\varphi\cdot M(r, \varphi) - M(r, \varphi_1) + \varepsilon(r) - l_*\varphi_1 - cH(r)\chi_1)$, где $\varphi = \varphi(z(b^*), r)$, имеем оценку

$$n_* \geqslant c_2(\varphi\cdot\varphi - \varphi_1) - 8^{-1}c_2(\theta - r)^{5/2} - (\varphi\cdot l_*\varphi_1 + cH(r)\chi_1) \geqslant$$
$$\geqslant c_2 - 8^{-1}c_2(\theta(r))^{5/2} - [(c_2 + l_*)^2 + c^2H^2(r)]^{1/2}$$

Отсюда и из (5.8) получаем

$$n_* \geqslant -l_* - 8^{-1}c_2(\theta(r))^{5/2} - c^2H^2(r)\,c_2^{-1} > 0$$

В силу замечания 2 неравенство (5.7) доказано.

Покажем, наконец, что

$$\lambda(z(0), t) \equiv \lambda(z(a, 0, c), t) < 0, \quad t \in [0, \theta)$$

В соответствии с (5.5) достаточно проверить лишь $t \in [T, \theta)$. Имеем для таких t

$$n(z(0), t) \leqslant (\varphi_1\cdot M(t, \varphi_1) - C(t)\,z_0 - a_0R(t)\,\varphi_1) \leqslant |\,\varepsilon(t)\,| - a_0\,R(t) < 0$$

что и требовалось.

Завершим доказательство леммы 2. Пусть $b(T)$ — точная верхняя грань множества всех $\bar b \in [b^*, 0]$, для которых функция $\lambda(z(\bar b), t)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке интервала $t \in (T, T^*)$. Тогда соотношения а) и б) леммы 2 выполнены, а оценка в) вытекает из (5.1) — (5.3)

$$|\,a(T)\,R(t) + b(T)\,H(t)\,| \leqslant a_0R(t) + |\,b^*H(t)\,| \leqslant a_1(\theta - T)^{2/2}$$
$$t \in [T, \theta)$$

6. Завершим доказательство теоремы 1, используя предположение 1. Пусть $T_i \to \theta - 0$, $i \to \infty$. Обозначим через z_i точку $z(a(T_i), b(T_i), c(T_i))$ (см. лемму 2), через $l_i(t)$ и $c_i(t)$ — функции $a(T_i)R(t) + b(T_i)H(t)$ и $c(T_i)H(t)$, через Ω_i — множество $\Omega(T_i)$. Если $t \in \Omega_i$, то через φ_{it} обозначаем вектор $\Gamma(t, \psi(z_i, t))$. В силу замечания 2 имеем при $t \in \Omega_i$

(6.1) $$M_i(t) \equiv M(t, \omega(t, \varphi_{it})) = C(t)z_i = M(t, \omega(\theta, \varphi_0)) + l_i(t)\varphi_1 + c_i(t)\chi_1 - \varepsilon(t)$$

Умножая (6.1) скалярно на φ_1 и используя локальную выпуклость $M(t, \varphi)$, получаем

(6.2) $$0 \leqslant c_2(\varphi_1\cdot\varphi_1 - \omega(t, \varphi_{it})) \leqslant (\varphi_1\cdot M(t, \varphi_1) - M_i(t)) = -l_i(t) + (\varphi_1\cdot\varepsilon(t)) = c_2k_i^2(t)$$

Воспользовавшись неравенством $|\,a\,|\,a\,|^{-1} - b\,|\,b\,|^{-1}|^2 \leqslant |\,a - b\,|^2\cdot(|\,a\,|\,|\,b\,|)^{-1}$, имеем (в силу (6.2), (4.6), (5.1) и оценки в) леммы 2) при $t \in \Omega_i$

(6.3) $$|\,\varphi_0 - \varphi_{it}\,|^2 \leqslant (|\,N(\theta)\varphi_1\,|\,|\,N(t)\,\omega(t, \varphi_{it})\,|)^{-1}\,|\,N(\theta)\varphi_1 - N(t)\varphi_1 + N_1(t)(\varphi_1 - \omega(t, \varphi_{it}))\,|^2 \leqslant N_1^2[c_3\theta(t) + 2N_0k_i(t)]^2 \leqslant \{N_1(c_3 + N_0(2a_1 / c_2 + 1))\}^2(\theta - T_i)^{2/2}$$
$$N_1 = \sup\|\,N^{-1}(t)\,\|,\ t \in I^0; \quad N_0 = \sup\|\,N(t)\,\|,\ t \in I^0$$

Здесь $\|\cdot\|$ — нормы соответствующих линейных операторов. Поэтому для всех достаточно больших i (отбросив конечное число членов, можно считать, что для всех $i = 1, 2, \ldots$)

$$\varphi_{it} = \varphi(\bar\sigma_{it}) \in Q_{\varphi_0}, \quad N(\theta)\,\omega(t, \varphi_{it}) / |N(\theta)\,\omega(t, \varphi_{it})| = \varphi(\bar s_{it}) \in O_{\varphi_0}$$

где $\bar\sigma_{it}$ и $\bar s_{it}$ — локальные координаты соответствующих векторов. При этом в силу (6.3) существует последовательность $\varepsilon_i \to +0$, $i \to \infty$, такая, что для любого i и всех $t \in \Omega_i$

$$|\bar s_{it}| \leqslant \varepsilon_i, \quad |\bar\sigma_{it}| \leqslant \varepsilon_i \tag{6.4}$$

Из разложения по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа вытекает

$$M(r, \omega(\theta, \varphi(\bar s))) = M(r, \varphi_1) + \sum_{j=2}^{\nu} \frac{\partial M(r, \omega(\theta, \varphi(0)))}{\partial s^j} s^j + O(|\bar s|^2) \tag{6.5}$$

$$|O(|\bar s|^2)| \leqslant c_0 |\bar s|^2$$

Здесь c_0 — общая постоянная для всех $r \in [\theta_*, \theta]$ и всех $\varphi(\bar s) \in O_{\varphi_0}$. Из (6.1), (6.5) следует

$$l_i(t)\varphi_1 + c_i(t)\chi_1 - \varepsilon(t) = \sum_{j=2}^{\nu} \frac{\partial M(t, \omega(\theta, \varphi(0)))}{\partial s^j} s_{it}^j + O(|\bar s_{it}|^2) \tag{6.6}$$

$$t \in \Omega_i$$

Умножая (6.6) скалярно на $\partial\omega(\theta, \varphi(0)) / \partial s^k$, получаем

$$c_i(t) M_{k2}(\theta) + \varepsilon_k(t) = \sum_{j=2}^{\nu} M_{kj}(t) s_{it}^j + \Delta_{ki}(t); \quad t \in \Omega_i, \quad k = 2, \ldots, \nu \tag{6.7}$$

$$|\varepsilon_k(t)| \leqslant 8^{-1} c_* (\theta - t)^{1/2}, \quad |\Delta_{ki}(t)| \leqslant c_* |\bar s_{it}|^2$$

$$c_* = (1 + c_0 + c_2)\left(1 + \sum_{k=2}^{\nu} \left|\frac{\partial\omega(\theta, \varphi(0))}{\partial s^k}\right|\right)$$

$$M_{kj}(t) \equiv M_{kj}(t, \varphi_0), \quad M_{kj}(t, \varphi(\bar s)) = \left(\frac{\partial\omega(\theta, \varphi(\bar s))}{\partial s^k} \frac{\partial M(t, \omega(\theta, \varphi(\bar s)))}{\partial s^j}\right) \tag{6.8}$$

$$k, j = 2, \ldots, \nu$$

Решая систему уравнений (6.7) относительно s_{it}^m, $m = 2, \ldots, \nu$ (квадратичная форма с матрицей (6.8) положительно определена, так что обратная к матрице $M_{kj}(t)$ матрица $B_{mk}(t)$ существует и непрерывна по $t \in [\theta_*, \theta]$), имеем (см. (5.1), δ_2^m — символ Кронекера)

$$s_{it}^m + \gamma_i^m(t) = c_i(t)(\delta_2^m + \xi_*^m(t)) + \varepsilon_m^*(t), \quad t \in \Omega_i \tag{6.9}$$

$$|\xi_*^m(t)| = \left|\sum_{k=2}^{\nu} B_{mk}(t)\, m(k, t)\right| \leqslant \bar c \sup_{t \in [T_i, \theta]} \sum_{k=2}^{\nu} |m(k, t)| = \delta_i \to 0$$

$$i \to \infty$$

$$|\varepsilon_m^*(t)| = \left|\sum_{k=2}^{\nu} B_{mk}(t)\,\varepsilon_k(t)\right| \leqslant \bar c H(t)(\theta - t)^{1/2} \leqslant c_i(t)\,\delta_i^*$$

$$|\gamma_i^m(t)| = \left|\sum_{k=2}^{\nu} B_{mk}(t)\,\Delta_{ki}(t)\right| \leqslant \bar c c_* |\bar s_{it}|^2$$

$$m(k, t) = M_{k2}(\theta)-M_{k2}(t),\ \bar c = (c_* + 1)\Big(1 + \sup_{t\in[\theta_*,\theta]}\sum_{m,k=2}^{\nu}|B_{mk}(t)|\Big)$$
$$\delta_i^* = \bar c\,(4E)^{-1}(\theta - T_i)^{1/2} \to 0,\quad i\to\infty$$

Из соотношений (6.9) следует (ср. [8]), что для всех достаточно больших i

(6.10) $$s_{it}^m = c_i(t)(\delta_2^m + \alpha_i^m(t)),\quad t\in\Omega_i,\quad m = 2,\ldots,\nu$$
$$|\alpha_i^m(t)| \leqslant \delta_i + \delta_i^* + 27\nu^2\bar c c_*\varepsilon_i \to 0,\quad i\to\infty$$

Для определения локальных координат σ_{it}^m имеем соотношение

(6.11) $$\varphi_{it} = N(t)\omega(\theta, \varphi(\bar s_{it}))/|N(t)\omega(\theta, \varphi(\bar s_{it}))| =$$
$$= \varphi(\bar s_{it}) + \omega_i(t),\ i\in\Omega_i$$

где, как и в (6.3)

$$|\omega_i(t)| \leqslant N_1c_3(\theta - t) \leqslant c_i(t)(N_1c_3E^{-1})(\theta - T_i)^2(\theta - t)^{-1}$$

В силу (5.4), (5.6) имеем

$$\theta - t \geqslant \theta - T_i^* = \min\{\theta - r_i,\ a_0N(2|b_i^*| + c_2)^{-1}\}$$

Учитывая вытекающее из (5.3) неравенство

$$|b_i^*| \leqslant (\theta - r_i)^{-1}(8a_0N + 4^6E^2N^3 + c_2)$$

раскладывая (6.11) по формуле Тейлора и проводя рассуждения, аналогичные (6.6) — (6.10), получаем

(6.12) $$\sigma_{it}^m = c_i(t)(\delta_2^m + \beta_i^m(t)),\quad t\in\Omega_i,\quad m = 2,\ldots,\nu$$
$$|\beta_i^m(t)| \leqslant \beta_i \to 0,\quad i\to\infty$$

причем все β_i не зависят ни от m, ни от $t\in\Omega_i$.

Вычислим (ср. п. 2[8]) величину $\mu_i(t) = \mu(t, \psi(z_i, t), \theta, \psi(z_i, \theta))$. В силу (1.3), (6.1), (4.7) и замечания 2 для любого $t\in\Omega_i$ имеем

$$\eta_i(t) = \mu_i(t)\,|\Pi_i^*(t)\psi_-(z_i, t)| = f(t)(\varphi_{it}\cdot p(\varphi_{it}) - p(\varphi_0)) -$$
$$- g(t)(\varphi_{it}\cdot q(\varphi_{it}) - q(\varphi_0))$$

Раскладывая выражения, стоящие в скобках, по формуле Тейлора, получим

$$\eta_i(t) = \frac{1}{2}f(t)\sum_{m,k=2}^{\nu}p_{mk}(\varphi_0)\sigma_{it}^m\sigma_{it}^k -$$
$$-\frac{1}{2}g(t)\sum_{m,k=2}^{\nu}q_{mk}(\varphi_0)\sigma_{it}^m\sigma_{it}^k + o_t(|\bar\sigma_{it}|^2),\quad t\in\Omega_i$$

где $o_t(|\bar s|^2)/|\bar s|^2 \to 0$, $|\bar s|\to 0$ равномерно по $t\in[\theta_*, \theta]$.

Подставляя значения для локальных координат из (6.12), имеем (см. (3.1), включение $t\in[\theta_*, \theta]$ и замечание 1)

(6.13) $$c_i^{-2}(t)\eta_i(t) = {}^1\!/_2\alpha g(t)[m(t) - 1]p_{22}(\varphi(0)) + \sigma(i, t) \leqslant$$
$$\leqslant {}^1\!/_2\alpha g^*[m(\theta_*) - 1]p_{22}(\varphi(0)) + \sigma(i, t),\quad t\in\Omega_i$$

где (см. (6.12)) $g^* = \min t\in[\theta_*, \theta]\,g(t) > 0$, $|\sigma(i, t)| \to 0$, $i\to\infty$ равномерно по $t \in \Omega_i$. Поэтому $\mu_i(t) < 0$ для любого $t \in \Omega_i$ при всех достаточно больших i. В силу утверждений а) и б) леммы 2 это означает, что для точки z_i выполнены все условия теоремы 2 [8]. Теорема 1 доказана, если выполнено предположение 1.

7. *Предположение 2.* Существует $0 < \tau_1 < T_0$, такое, что $m(r) < 1$, $0 < r < \tau_1$.

Чтобы провести доказательство теоремы 1 в условиях предположения 2, достаточно положить $\tau = 0$, выбрать $\tau_2 \in (\tau, \tau_1)$ таким, чтобы $m'(r) = (f(r) \,/\, (\alpha g(r)))' \neq 0$, $r \in \Gamma = (\tau, \tau_2]$ (это возможно в силу того, что в окрестности $r = 0$ функции $f(r)$ и $g(r)$ раскладываются в степенные ряды по параметру r), выбрать $\theta \in \Gamma$ и $\tau_0 > 0$ так, чтобы удовлетворить заключению следствия 1 и соотношениям (4.2), а также так, чтобы функция

$$R(t) = (f(t+\tau_0)g(\theta+\tau_0) - f(\theta+\tau_0)g(t+\tau_0))\omega$$

$$\omega = \operatorname{sign} m'(s), \quad s \in \Gamma$$

удовлетворяла (4.1), и дословно повторить рассуждения п. 4—6 вплоть до формулы (6.13).

8. Приведем пример, показывающий, что условие A работы [2] в общем случае не является небходимым условием глобальной оптимальности времени верхнего слоя

$$dz_1 \,/\, dt = z_2 - u, \quad dz_2 \,/\, dt = v; \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1 \tag{8.1}$$

где z_1, z_2, u, v — двумерные векторы. Терминальное множество M есть подпространство $\{z : z_1 = 0\}$. Здесь $\pi z = z_1$; $W(t, \varphi) = h(t)\varphi$, $h(t) = t - t^2/2$, $0 \leqslant t \leqslant 2$. Время $T(z)$ — наименьший положительный корень уравнения $F(t, z) = -|z_1 + tz_2|^2 + (t - t^2/2)^2 = 0$. Если $T(z) \leqslant 1$, то оптимальность $T(z)$ следует из [2]. Покажем, что время $T(z) \in (1, 2)$ также оптимально, хотя на всем отрезке $[0,2)$ условие A места не имеет.

Предлагаем для убегания, начинающегося из точки z_0, $T(z_0) = T_0 \in (1,2)$ полагать

$$\bar v(s) = (T_0 - s)^{-1}u(s) + (1 - (T_0 - s)^{-1})\varphi_0, \quad 0 \leqslant s \leqslant T_0 - 1$$

$$\bar v(s) = u(s), \quad 0 \leqslant T_0 - s \leqslant 1$$

где $\varphi_0 = \varphi(z_0)$ дается равенством (ср. [4]) $h(T_0)\varphi_0 = z_{10} + T_0 z_{20}$. Тогда для движения $z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant T_0$, $z(0) = z_0$ имеем

$$F(T_0 - s, z(s)) = -\Big| z_{10} + sz_{20} + \int_0^s (s-r)\bar v(r)\,dr - \int_0^s u(r)\,dr + (T_0 - s)z_{20} + (T_0 - s)\int_0^s \bar v(r)\,dr\Big|^2 + h^2(T_0 - s) = h^2(T_0 - s) - \Big|\Big(T_0 - s - \frac{(T_0 - s)^2}{2}\Big)\varphi_0\Big|^2 = 0$$

для всех $s \in [0, T_0 - 1]$. Покажем, что для всех таких s выполнено $T(z(s)) \equiv T_0 - s$. От противного. Пусть $0 < T(z(s)) < T_0 - s$. В силу определения T_0 имеем $0 \leqslant k = \partial F(T_0, z_0) \,/\, \partial t$, причем, если $k = 0$, то $n = \partial^2 F(T_0, z_0) \,/\, \partial t^2 \leqslant 0$. Используя неравенство $k \geqslant 0$, непосредственными вычислениями получаем

$$\frac{\partial F(T_0 - s, z(s))}{\partial t} \geqslant (T_0 - s)(2 - T_0 + s)\Big(s - \Big(\varphi_0 \cdot \int_0^s \bar v(r)\,dr\Big)\Big) \geqslant 0$$

причем равенство нуля возможно лишь если $k = 0$ и $u(r) \equiv \varphi_0$ почти всюду на $[0, s]$.

Но в этом последнем случае

$$\frac{\partial^2 F(T_0 - s, z(s))}{\partial t^2} = n + s(2 + s - 2T_0) < 0$$

Из сказанного вытекает, что функция $p(t) = F(t, z(s))$ имеет на отрезке $(0, T_0 - s]$ по крайней мере три нуля (с учетом их кратности), если $k \neq 0$, и четыре нуля, если $k = 0$. В последнем случае получаем противоречие с тем, что поскольку $p(0) < 0$ и $p(-\infty) > 0$, то многочлен четвертой степени имеет пять нулей. Если же $k \neq 0$, то $p(t) > 0$ для всех $t > T_0 - s$ достаточно близких к $T_0 - s$; $p(2) \leqslant 0$, что дает четвертый корень на $(T_0 - s, 2]$. Пятый корень на отрицательной полуоси обнаруживаем, как и ранее. Противоречие.

Пусть теперь $T(z(s_0)) = 0$, $s_0 \in (0, T_0 - 1]$. Не ограничивая общности, можно считать, что s_0 — наименьший из всех таких моментов. По доказанному $T(z(s)) \equiv T_0 - s$, $0 \leqslant s < s_0$, так что $F(0, z(s_0)) = 0$; $F(T_0 - s_0, z(s_0)) = 0$; $F(t, z(s_0)) \leqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant T_0 - s_0$. Поскольку $z_1(s_0) = 0$, то $F(t, z(s_0)) = t^2(-|z_2(s_0)|^2 + (1 - t/2)^2)$. Отсюда

$$|z_2(s_0)|^2 = (1 - (T_0 - s_0)/2)^2$$

$$F(t, z(s_0)) = {}^1/_4 t^2 (T_0 - s_0 - t)(2 - t + 2 - (T_0 - s_0)) > 0$$

$$0 < t < T_0 - s_0$$

Противоречие. Неравенство $T(z(s)) \geqslant T_0 - s$, $0 \leqslant T_0 - s \leqslant 1$ следует из [2].

Пусть теперь $\delta > 0$. Выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым и полагая $v(s) \equiv \varphi_0$, $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$; $v(s) \equiv \bar{v}(s - \varepsilon)$, $s > \varepsilon$, гарантируем уклонение от встречи в течение времени $T_0 - \delta$ (доказательство см. в [2]).

9. Большой класс задач преследования, удовлетворяющих условиям 1—5 данной статьи (напомним, что условия 1—3 взяты из [3]), приведен в п. 5 [9]. Для этого класса, таким образом, получено необходимое и достаточное условие глобальной оптимальности времени первого поглощения.

Автор благодарит Н. Н. Красовского и Е. Ф. Мищенко за внимание к работе.

Поступила 6 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
2. *Гусятников П. Б., Никольский М. С.* Об оптимальности времени преследования. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3.
3. *Гусятников П. Б.* Необходимые условия оптимальности в линейной задаче преследования. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
4. *Гусятников П. Б.* Необходимое условие оптимальности времени первого поглощения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
5. *Гусятников П. Б.* Об одной постановке линейных задач преследования. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 8.
6. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972.
7. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изомериметрии. М., «Наука», 1966.
8. *Гусятников П. Б.* Необходимость одного достаточного условия оптимальности времени преследования. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1978, № 1.
9. *Гусятников П. Б.* Об одном критерии оптимальности времени преследования ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.