Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

О СЛАБОМ УПРАВЛЕНИИ СЛАБОДЕМПФИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ

В. Б. Ларин

(Киев)

Получены асимптотические соотношения, позволяющие находить в первом приближении решение матричного алгебраического уравнения Риккати специального вида. Метод базируется на использовании соотношения Басса [1] и теории возмущений [2]. Подробно исследуется задача управления слабодемпфированным осциллятором. Принятая в работе постановка задачи существенно отличается от [3] (не предполагается одночастотность колебаний, рассматривается только стационарная система на бесконечном временном интервале).

1. Постановка задачи. Движение объекта управления описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}^{\cdot} = F\mathbf{x} + G\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) \neq 0 \tag{1.1}$$

Требуется определить вектор управляющих воздействий u как функцию фазового вектора x, минимизирующий квадратичный критерий качества

$$I = \int_0^\infty (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{u}'B_\varepsilon\mathbf{u})\,dt \tag{1.2}$$

Здесь штрих означает операцию транспонирования, F, G, $Q = Q'$, $B_\varepsilon = B_\varepsilon'$ — постоянные матрицы, причем пара F, G стабилизируема [1].

Предполагается, что матрица B_ε велика. Это понятие формализируется введением малого параметра ε

$$B_\varepsilon = \varepsilon^{-2}B$$

Использование в данной задаче термина «слабое управление» связано с тем, что после формальной замены $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{v}$ система (1.1) становится слабоуправляемой в смысле [4]. Термин «слабодемпфированная система» означает, что матрица F близка к кососимметричной, т. е. $F = F_0 + \varepsilon\Phi$, $F_0 = (F - F')/2 \gg (F + F')/2 = \varepsilon\Phi$. Применение этого термина объясняется тем, что уравнения, описывающие движение недемпфированной механической системы с n степенями свободы, можно привести к системе $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка с кососимметрической матрицей (см., например, [5]).

Как известно (см., например, [1], п. 3.4), решение задачи синтеза оптимального регулятора для системы (1.1) по критерию (1.2) сводится к отысканию решения матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PF + F'P - \varepsilon PGB^{-1}G'P + \varepsilon Q = 0, \quad P = \varepsilon S \tag{1.3}$$

К исследованию подобного типа уравнений Риккати приводят также некоторые задачи определения ориентации твердого тела [6]. Далее предполагаем, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое решение (1.3), при котором корни характеристического полинома матрицы $F - \varepsilon GB^{-1}G'P$ лежат в левой полуплоскости.

2. Вывод асимптотических соотношений. Ниже для построения первого приближения по ε решения уравнения (1.3) используются соотношения Басса [1] и теория возмущений [2]. Уравнению (1.3) соответствует система дифференциальных уравнений Эйлера, матрица которой имеет вид

$$Z = \begin{Vmatrix} F_0 + \varepsilon\Phi & -\varepsilon GB^{-1}G' \\ -\varepsilon Q & F_0 - \varepsilon\Phi' \end{Vmatrix} \quad (-F_0' = F_0) \tag{2.1}$$

Пусть $\varphi(s)$ — результат факторизации характеристического полинома матрицы (2.1)

$$\det \| Z - Es \| = \varphi(s)\varphi(-s) \tag{2.2}$$

причем корни $\varphi(s)$ лежат в левой полуплоскости. Тогда, согласно [1], искомая матрица P удовлетворяет соотношению Басса

$$\varphi(Z)\begin{Vmatrix} E \\ P \end{Vmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

Представим матрицу Z и полином $\varphi(s)$ в виде

$$Z = Z_0 + \varepsilon W, \quad Z_0 = \begin{Vmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & F_0 \end{Vmatrix}, \quad W = \begin{Vmatrix} \Phi & -GB^{-1}G' \\ -Q & -\Phi' \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

$$\varphi(s) = s^n + \delta p_1 s^{n-1} + (p_{20} + \delta p_2)s^{n-2} + \delta p_3 s^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (p_{n0} + \delta p_n)$$

Учтем также, что при $\varepsilon = 0$

$$\varphi_{\varepsilon=0}(s) = \varphi_{\varepsilon=0}(-s) = \det \| F_0 - Es \| = s^n + p_{20}s^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n0}$$

(отсутствие нечетных степеней s в этом полиноме является следствием кососимметричности матрицы F_0; полином $\varphi_{\varepsilon=0}(s)$ имеет $n/2$ пар мнимых корней $\pm i\nu_j (j = 1, 2, \ldots, n/2)$). Величины δp_k $(k = 1, \ldots, n)$ в (2.4) малы при достаточно малом ε. Приняв во внимание, что

$$\varphi_{\varepsilon=0}(Z_0) = Z_0^n + p_{20}Z_0^{n-2} + \ldots + p_{n0}E = 0$$

соотношение (2.3) с точностью до малых второго порядка по ε представим в виде

$$\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} Z_0^{k-1}\varepsilon W Z_0^{n-k}\Big) + \delta p_1 Z_0^{n-1} + p_{20}\Big(\sum_{k=3}^{n} Z_0^{k-3}\varepsilon W Z_0^{n-k}\Big) +$$
$$+ \delta p_3 Z_0^{n-3} + \cdots + \delta p_n E\Big]\begin{Vmatrix} E \\ P \end{Vmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

Из (2.5) видно, что основная трудность при использовании формулы Басса (2.3) связана с необходимостью достаточно точного определения коэффициентов полинома $\varphi(s)$ (или поправок δp_k к коэффициентам). Эту задачу можно считать решенной, если достаточно точно вычислить поправки к корням $\pm i\nu_j'$ полинома $\varphi_{\varepsilon=0}(s)$. Найдем эти поправки. Корни μ_l характеристического многочлена матрицы Z будем искать в виде ряда по степеням ε

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} &l = 2k-1, \quad \mu_l = i\nu_k + \varepsilon\lambda_{1l} + O(\varepsilon^2) \\ &l = 2k, \quad \mu_l = -i\nu_k + \varepsilon\lambda_{1l} + O(\varepsilon^2) \qquad (k = 1,2,\ldots) \end{aligned}$$

Для отыскания поправок $\varepsilon\lambda_{1l}$ нельзя непосредственно применять к матрице Z результаты теории возмущений [2], так как Z_0 не является самосопряженным преобразованием. Поэтому рассмотрим матрицу

$$Z^2 = Z_0^2 + Z_0\varepsilon W + \varepsilon W Z_0 + (\varepsilon W)^2 = Z_0^2 + \varepsilon T$$

к которой уже можно применить результаты [2], так как матрица Z_0^2 симметрична. Корни характеристического полинома матрицы Z_0^2 будут $-\nu_j^2$ и соответственно матрицы Z^2 будут μ_l^2

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} &l = 2k-1, \quad \mu_l^2 = -\nu_k^2 + \varepsilon\gamma_{1l} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon\gamma_{1l} = 2i\lambda_{1l}\nu_k \\ &l = 2k, \quad \mu_l^2 = -\nu_k^2 + \varepsilon\gamma_{1l} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon\gamma_{1l} = -2i\lambda_{1l}\nu_k \end{aligned}$$

Поправки $\varepsilon\gamma_{1l}$ могут быть найдены методом теории возмущений.

Определим величины $\varepsilon\gamma_{1l}$. Пусть $-\nu_k^2$ является $2r$-кратным собственным значением] матрицы Z_0^2. Обозначим $\mathfrak{f}_1^k, \mathfrak{f}_2^k, \ldots, \mathfrak{f}_{2r}^k$ набор ортонормированных собственных векторов матрицы Z_0^2, отвечающих корню $-\nu_k^2$. Согласно [2], поправки $\varepsilon\gamma_{1k}$ будут собственными значениями матрицы $D_k = \| d_{mn}^k \|$, элементы которой являются результатом скалярного произведения векторов $\varepsilon T\mathfrak{f}_n^k$ и $\mathfrak{f}_m^k$

$$d_{mn}^k = (\varepsilon T\mathfrak{f}_n^k \cdot \mathfrak{f}_m^k)$$

Следовательно, поправки $\varepsilon\gamma_{1k}$ являются корнями уравнения

$$(2.8)\qquad \det \| D_k - \varepsilon\gamma_{1k}E \| = 0$$

Соотношения (2.6), (2.8) позволяют в первом приближении определить значения корней матрицы Z, а следовательно, и поправки δp_k коэффициентов полинома $\varphi(s)$. Если поправки первого приближения таковы, что все корни μ_l имеют ненулевые действительные части, то соотношение (2.5) позволяет найти приближенное решение уравнения (1.3). Так как корни характеристического полинома матрицы $F - \varepsilon GB^{-1}G'P$ при найденном приближенном значении P лежат в левой полуплоскости (они совпадают с теми значениями корней μ_l $(l = 1, \ldots, n)$, действительные части которых меньше нуля), то при помощи схемы Ньютона — Рафсона [1] возможно дальнейшее уточнение найденного значения P. Если же в первом приближении среди корней μ_l окажутся мнимые, то для определения P необходимо использовать следующие приближения.

3. Приближенное решение задачи управления одним осциллятором. Уравнения движения управляемого объекта имеют вид

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = -x - \varepsilon\beta y + u \tag{3.1}$$

Критерий качества определим выражением

$$I = \int_0^\infty (q_1 x^2 + q_2 y^2 + \varepsilon^{-2} u^2)\, dt \tag{3.2}$$

Матрицы, входящие в уравнение (1.3) и последующие соотношения, запишутся в виде

$$F = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon\beta \end{Vmatrix}, \quad G = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B_\varepsilon = \varepsilon^{-2}, \quad B = 1$$

$$Q = \begin{Vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{Vmatrix}, \quad GB^{-1}G' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad F_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\Phi = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\beta \end{Vmatrix}, \quad Z_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad W = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & -1 \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & \beta \end{Vmatrix}$$

Полином $\varphi(s)$ при $\varepsilon = 0$ равен

$$\varphi_{\varepsilon=0}(s) = \det \| F_0 - Es \| = s^2 + 1$$

Следовательно, $p_{20} = 1$ и $\nu = 1$, так как корни этого полинома равны $\pm i$. Определим поправки к нулевым приближениям значений корней матрицы Z.

Матрица $Z_0^2 = -E$ имеет единственное собственное число -1, кратность которого равна четырем. В качестве набора ортонормированных векторов, отвечающих этому числу, можно выбрать векторы

$$\mathrm{f}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{f}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{f}_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{f}_4 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Матрица $D = \| d_{nm} \|$ будет равна εT, которую с точностью до ε^2 можно принять в виде

$$D = \varepsilon T \approx \varepsilon W Z_0 + Z_0 \varepsilon W = \varepsilon \begin{Vmatrix} 0 & -\beta & 0 & -1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(q_1 + q_2) & 0 & \beta \\ (q_1 + q_2) & 0 & -\beta & 0 \end{Vmatrix}$$

Заметим, что матрицу D можно представить как результат кронекеровского произведения двух матриц второго порядка

$$\varepsilon W Z_0 + Z_0 \varepsilon W = \begin{Vmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \beta & 1 \\ (q_1 + q_2) & -\beta \end{Vmatrix}$$

и поэтому собственные числа матрицы D (поправки $\varepsilon\gamma_{1l}$) будут равны произведениям собственных чисел матриц-сомножителей. Эти числа, в свою очередь, равны $\pm i\varepsilon$ и $\pm\sqrt{\beta^2+q_1+q_2}$. Таким образом

$$\varepsilon\gamma_{1l}=\pm i\varepsilon\sqrt{\beta^2+q_1+q_2},\qquad \varepsilon\lambda_{1l}=\pm{}^1/_2\,\varepsilon\sqrt{\beta^2+q_1+q_2}$$

Следовательно, в первом приближении корни μ_1 и μ_2 полинома $\varphi(s)$ равны

$$\mu_{1,2}=-{}^1/_2\,\varepsilon\sqrt{\beta^2+q_1+q_2}\pm i \tag{3.3}$$

К такому же асимптотическому соотношению для корней $\mu_{1,2}$ можно прийти, воспользовавшись результатом [7]. В обозначениях рассматриваемой задачи справедливы, согласно [7], следующие соотношения между коэффициентами q_1, q_2, корнями μ_1, μ_2 полинома $\varphi(s)$ и корнями θ_1,θ_2 характеристического полинома матрицы F:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2q_1&=(\mu_1\mu_2)^2-(\theta_1\theta_2)^2\\ \varepsilon^2q_2&=(\mu_1+\mu_2)^2-(\theta_1+\theta_2)^2+2(\theta_1\theta_2-\mu_1\mu_2)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Пусть

$$\mu_{1,2}=-(\varepsilon\rho_1+\varepsilon^2\rho_2+O(\varepsilon^3))\pm i\,(1+\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+O(\varepsilon^3))$$

Так как

$$\theta_{1,2}=-\varepsilon\beta/2\pm\sqrt{\varepsilon^2\beta^2/4-1}$$

то с точностью до ε^2 из (3.4) следует

$$\eta_1=0,\quad q_1=2\rho_1^2+4\eta_2,\quad q_2=2\rho_1^2-4\eta_2-\beta^2$$

Следовательно, приближенное выражение для корней $\mu_{1,2}$ имеет с точностью до ε^2 вид (3.3).

Определим теперь поправки коэффициентов δp_1 и δp_2

$$\delta p_1=-(\mu_1+\mu_2)=\varepsilon\sqrt{\beta^2+q_1+q_2}$$

$$\delta p_2=\mu_1\mu_2-p_{20}=\mu_1\mu_2-1=\varepsilon^2(\beta^2+q+q_2)\,/\,4$$

Соотношение (2.5) с точностью до малых второго порядка имеет вид

$$[\varepsilon WZ_0+Z_0\varepsilon W+\delta p_1Z_0]\left\|\begin{matrix}E\\P\end{matrix}\right\|=0$$

Это выражение конкретизируется в виде следующих двух матричных уравнений, каждое из которых может быть использовано для нахождения матрицы P:

$$\left\|\begin{matrix}0&-\Lambda_-\\ \Lambda_-&0\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}0&-\varepsilon\\ \varepsilon&0\end{matrix}\right\|P=0$$

$$\left\|\begin{matrix}0&-\varepsilon(q_1+q_2)\\ \varepsilon(q_1+q_2)&0\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix}0&\Lambda_+\\ -\Lambda_+&0\end{matrix}\right\|P=0$$

$$\Lambda_\pm=\varepsilon\beta\pm\varepsilon\sqrt{\beta^2+q_1+q_2}$$

Следовательно, для данной задачи первое приближение искомого решения уравнения (1.3) имеет вид

$$P=-\Lambda_-E\varepsilon^{-1},\quad S=-\Lambda_-E\varepsilon^{-2}\tag{3.5}$$

Оценим качество полученной аппроксимации этими соотношениями. Пусть демпфирование в системе (3.1) фиксировано, т. е. $0 < \varepsilon\beta = \beta_0 = \mathrm{const}$. Уравнение Ляпунова, в которое переходит уравнение Риккати (1.3) при $\varepsilon = 0$, имеет решение

$$S = \frac{q_1 + q_2}{2\beta_0} E + \frac{q_1}{2} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \frac{\beta_0 q_1}{2} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Приближенное выражение (3.5) для S стремится при $\varepsilon \to 0$ к первому члену этого решения (который будет основным при малом β_0), так как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\beta_0 + \sqrt{\beta_0^2 + \varepsilon^2 q_1 + \varepsilon^2 q_2}}{\varepsilon^2} E = \frac{q_1 + q_2}{2\beta_0} E$$

Если демпфирование в системе (3.1) отсутствует, т. е. $\beta = 0$, уравнение (1.3) удовлетворяется с точностью до ε любой матрицей, кратной единичной ($P = aE$). Действительно, подставив в (2.1) вместо P матрицу aE, получим следующее выражение матрицы невязки:

$$aF + aF' - a^2 \varepsilon G B^{-1} G' + \varepsilon Q = \varepsilon \begin{Vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 - a^2 \end{Vmatrix}$$

Заметим, что соответствующее (3.5) значение коэффициента $a = \sqrt{q_1 + q_2}$, вообще говоря, не минимизирует норму матрицы невязки, хотя выражение (3.5) и в этом случае может давать хорошую аппроксимацию. Так, например, пусть $q_1 = 1$, $q_2 = 3$, $\varepsilon = 0.1$, $\beta = 0$. Согласно (3.5), находим

$$P = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

Точное решение уравнения (2.1) в этом случае имеет вид

$$P = \begin{Vmatrix} 2.01 & 4.99 \cdot 10^{-2} \\ 4.99 \cdot 10^{-2} & 2.0 \end{Vmatrix}$$

Заметим, что при $\beta = 0$ совпадающее с (3.5) асимптотическое (с точностью до ε) выражение для P можно получить из точного решения этой задачи (см. [8], пример 2)

$$P = A\{C + \alpha H\}^{-1}, \qquad A = \begin{Vmatrix} \varepsilon q_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon q_2 \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$H = \begin{Vmatrix} -q_1 a & -bd^{-1} \\ b & -q_2 a \end{Vmatrix}, \quad a = \frac{\varepsilon^2 (q_1 + q_2 d)}{4d\tau}$$

$$b = {}^1/_4 \varepsilon^2 \tau^{-2} (q_1 + q_2)(q_1 + q_2 d), \qquad \alpha = d\,[\varepsilon q_1 q_2 / 4 + {}^1/_4 \varepsilon^2 \tau^{-2} (q_1 + q_2)^2]^{-1},$$

$$\tau = \sqrt{\varepsilon^2 q_2 + 2d - 2}, \qquad d = \sqrt{1 + \varepsilon^2 q_1}$$

Поступила 27 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kwakernaak H.*, *Sivan R.* Linear optimal control systems. N. Y., Wiley, 1972. (Рус. перев.: М., «Мир», 1977.)
2. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М., «Наука», 1971.
3. *Акуленко Л. Д.* Оптимальное управление движением квазилинейной колебательной системы при помощи малых сил. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
4. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
5. *Крейн М. Г.* Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах. В сб.: Вторая летняя математическая школа, вып. 1. Киев, «Наукова думка», 1965.
6. *Завьялов П. П.*, *Константинов Г. И.*, *Кудин В. Д.* Метод определения ориентации объекта при действии на него неизвестных возмущающих моментов. В сб.: Навигационные гироскопические системы. Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1973.
7. *Ларин В. Б.* Использование интегралов уравнения Эйлера в задаче аналитического конструирования регуляторов. В сб.: Кибернетика и вычислительная техника, вып. 23. Киев, «Наукова думка», 1974.
8. *Алиев Ф. А.*, *Ларин В. Б.* О решении алгебраических уравнений Риккати. В сб.: Математическая физика, вып. 17. Киев, «Наукова думка», 1975.