

Аппроксимируем характеристику двигателя кубической параболой

$$M(v) = mv^3 + nv^2 + pv + r, \quad m < 0, \quad n < 0, \quad p > 0, \quad r > 0$$

Соответствующая уравнению система примет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -m(\omega - y)^3 - n(\omega - y)^2 - p(\omega - y) - r, \quad x > 0$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = m(y - \omega)^3 + n(y - \omega)^2 + p(y - \omega) + r, \quad x < 0$$

Если ω не слишком велико, то она имеет на линии сшивания состояние равновесия $(0, 0)$.

Границей области устойчивости на плоскости параметров ω^2, p будет кривая

$$p = (mn\omega^4 + 3mr^2\omega^2) / (n\omega^2 - r)$$

Сверху от границы имеем $d\alpha_2 < 0$, состояние равновесия есть спитый неустойчивый фокус, снизу от нее $d\alpha_2 > 0$ — фокус устойчив. На границе области устойчивости будет

$$d\alpha_4 = -2(nr + 3mr) / M(\omega) > 0$$

Граница безопасна.

Автор благодарит Н. Н. Баутина за обсуждение работы.

Поступила 23 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1976.
2. Губарь Н. А. О бифуркациях в окрестности «спитого фокуса». ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
4. Рабинович Л. В. Методы фазовой плоскости в теории и практике релейных следящих систем. М.—Л., «Энергия», 1965.

УДК 532.516

К РАСЧЕТУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПЕЛЬ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. З. Зинченко

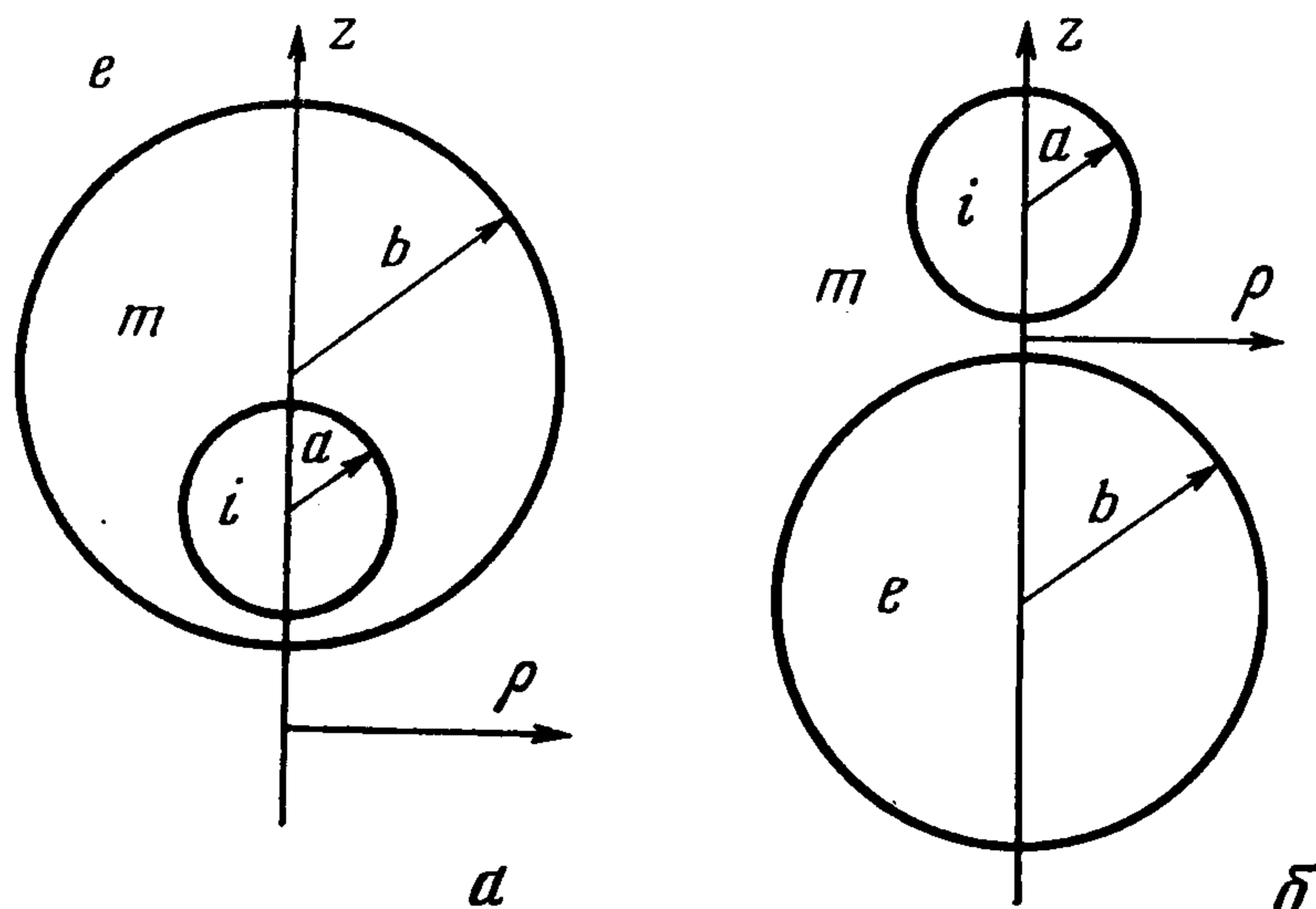
(Москва)

В стоксовом приближении рассматривается осесимметричная задача о движении двух жидких сфер в вязкой среде. При малой величине зазора между поверхностями сфер строится асимптотическое решение. Рассмотрен также случай, когда одна из сфер является твердой.

Осесимметричная задача о медленном движении двух сферических капель в вязкой среде решена в работе [1]. Решение [1] обобщает результаты исследований [2–5]. Гидродинамические силы представлены в [1] бесконечными рядами. Эти ряды медленно сходятся и практически непригодны для численного счета, если зазор между поверхностями сфер мал. В данной работе строится асимптотическое решение, применимое также в случае жидких сфер, расположенных одна внутри другой, что представляет интерес, например, при изучении движения капли, содержащей газовый пузырь.

Найденное решение существенно отличается от известного асимптотического решения [6] для твердых сфер.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим жидкие сферы радиусов a и b , движущиеся со скоростями V_a и V_b соответственно. На фигуре представлены два возможных случая взаимного расположения сфер. Числа Рейнольдса и относительная скорость движения сфер предполагаются малыми и задача исследуется в приближении Стокса.



В качестве граничных условий предполагаем непротекание жидкостей через поверхности контакта, непрерывность скорости и касательного напряжения на поверхностях сфер. Поверхностное натяжение на границах раздела жидкостей будем считать достаточно большим, что позволяет пренебречь отклонением формы частиц от сферической и не рассматривать граничное условие непрерывности нормальных напряжений.

В приближении Стокса силу, действующую на сферу радиуса a , в силу линейности задачи можно представить в виде

$$F_a = -6\pi\mu_m a [\Lambda_{11}(V_a - V_b) + \Lambda_{12}V_b]$$

В случае расположения сферы a внутри сферы b (см. фиг. а) силу, действующую на внешнюю сферу, запишем в виде

$$F_b = -6\pi\mu_e b [\Lambda_{21}(V_a - V_b) + \Lambda_{22}V_b]$$

Здесь μ_m, μ_e — вязкости жидкостей в областях m и e (см. фигуру); индексами m, e, i отмечаются величины, относящиеся к указанным на фигуре областям.

Применяя теорему взаимности [7] и учитывая граничные условия, можно показать, что

$$(1.1) \quad \Lambda_{21} = ab^{-1}\mu_m\mu_e^{-1}\Lambda_{12}$$

При касании сфер величины $\Lambda_{12}, \Lambda_{22}, \Lambda_{21}$ остаются конечными; для Λ_{21} это следует из (1.1). Предельное значение Λ_{12} в случае б найдено для твердых и для жидких сфер в работах [1, 8, 9].

Целью предлагаемой работы является отыскание асимптотики Λ_{11} при малой величине зазора между поверхностями сфер.

2. **Решение.** Используя бисферическую систему координат

$$(2.1) \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \mu}, \quad \rho = \frac{c \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \mu}, \quad \mu = \cos \xi$$

можно добиться того, что сфера радиуса a станет координатной поверхностью $\eta = \operatorname{const} = \eta_1 > 0$, а сфера радиуса b — поверхностью $\eta = \operatorname{const} = \eta_0$. Величины c, η_1, η_0 определяются из соотношений

$$(2.2) \quad \operatorname{ch} \eta_1 = \frac{(1 + \varepsilon)(1 - k) - k\varepsilon^2/2}{1 - k - k\varepsilon}, \quad \operatorname{sh} \eta_0 = k \operatorname{sh} \eta_1, \quad c = a \operatorname{sh} \eta_1$$

Здесь εa — зазор между сферами, $k = \pm a/b$, знак минус соответствует случаю внешнего расположения сфер (см. фиг. б).

Для этого случая при $V_b = 0$ функция тока найдена в [1] во всех областях течения в виде

$$(2.3) \quad \Psi = 2^{-1/2}c^2V_a (\operatorname{ch} \eta - \mu)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \varphi_n(\eta) Q_n(\mu)$$

$$\varphi_n^m(\eta) = E_n \operatorname{ch}(n - 1/2)\eta + F_n \operatorname{sh}(n - 1/2)\eta + G_n \operatorname{ch}(n + 3/2)\eta + H_n \operatorname{sh}(n + 3/2)\eta$$

$$\begin{aligned}\varphi_n^e(\eta) &= C_n \exp(n - 1/2)\eta + D_n \exp(n + 3/2)\eta \\ \varphi_n^i(\eta) &= A_n \exp[-(n - 1/2)\eta] + B_n \exp[-(n + 3/2)\eta]\end{aligned}$$

Здесь V_a — проекция скорости V_a на отрицательное направление оси z , $Q_n(\mu)$ — полином Гегенбауэра, связанный с полиномами Лежандра соотношением

$$Q_n(\mu) = [P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)] / (2n + 1)$$

Как следует из результатов [1], граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned}(2.4) \quad \eta = \eta_0, \quad \varphi_n^m &= \varphi_n^e = 0, \quad d\varphi_n^m / d\eta = d\varphi_n^e / d\eta \\ d^2\varphi_n^m / d\eta^2 &= \lambda_e d^2\varphi_n^e / d\eta^2, \quad \lambda_e = \mu_e / \mu_m \\ \eta = \eta_1, \quad \varphi_n^m &= \varphi_n^i = R_n, \quad d\varphi_n^m / d\eta = d\varphi_n^i / d\eta \\ d^2\varphi_n^m / d\eta^2 - \lambda_i d^2\varphi_n^i / d\eta^2 &= (1 - \lambda_i) d^2R_n / d\eta^2, \quad \lambda_i = \mu_i / \mu_m\end{aligned}$$

$$(2.5) \quad R_n(\eta) = \frac{\exp[-(n + 3/2)\eta]}{2n + 3} - \frac{\exp[-(n - 1/2)\eta]}{2n - 1}$$

При $V_b = 0$ соотношения (2.3) — (2.5) справедливы и для случая a , что оправдывает единое обозначение областей течения в случаях a и b и дает возможность исследовать асимптотику Λ_{11} для любого взаимного расположения сфер.

Найдем внутреннее разложение для функции тока Ψ^m , справедливое в области малого зазора между поверхностями сфер, так как эта область определяет сингулярную часть Λ_{11} . Используя (2.5) и два последних соотношения (2.3), исключим из равенств (2.4) функции $\varphi_n^i(\eta)$ и $\varphi_n^e(\eta)$ и получим замкнутую систему граничных условий для $\varphi_n^m(\eta)$

$$\begin{aligned}(2.6) \quad \eta = \eta_0, \quad \varphi_n^m &= 0, \quad d^2\varphi_n^m / d\eta^2 = \lambda_e (2n + 1) d\varphi_n^m / d\eta \\ \eta = \eta_1, \quad \varphi_n^m &= R_n, \quad d^2\varphi_n^m / d\eta^2 + \lambda_i (2n + 1) d\varphi_n^m / d\eta = \\ &= d^2R_n / d\eta^2 + \lambda_i (2n + 1) dR_n / d\eta\end{aligned}$$

Случай касания соответствует предельному переходу

$$(2.7) \quad \eta_0 \rightarrow 0, \quad \eta_1 \rightarrow 0$$

Здесь $\text{sh } \eta_0 / \text{sh } \eta_1 = k$ фиксировано. Из (2.7) следует, что $\eta_0 / \eta_1 = k + k(1 - k^2)\eta_1^2 / 6 + O(\eta_1^4)$. Вводя переменную $\sigma = \eta / \eta_1$, заметим, что внутренняя область соответствует $\sigma \sim 1$, $1 - \mu \sim 1$. Фиксируя значения σ , n , λ_i , λ_e и применяя предельный переход (2.7) к соотношениям (2.5), (2.6) и дифференциальному уравнению для $\varphi_n^m(\eta)$, следующему из второго равенства (2.3), получим

$$\begin{aligned}(2.8) \quad \varphi_n^m(\eta) &= \alpha_n(\sigma) + \eta_1 \beta_n(\sigma) + \eta_1^2 \gamma_n(\sigma) + O(\eta_1^3) \\ \alpha_n(\sigma) &= - \frac{4(\sigma - k)}{(2n - 1)(2n + 3)(1 - k)}, \\ \beta_n(\sigma) &= \frac{(2n + 1)(A_1\sigma^3 + B_1\sigma^2 + C_1\sigma + D_1)}{(2n - 1)(2n + 3)} \\ \gamma_n(\sigma) &= \frac{2k(1 + k)(1 - \sigma)}{3(1 - k)(2n - 1)(2n + 3)} + A_2\sigma^3 + B_2\sigma^2 + C_2\sigma + D_2 + \\ &+ \frac{(2n + 1)^2(A_3\sigma^3 + B_3\sigma^2 + C_3\sigma + D_3)}{(2n - 1)(2n + 3)}\end{aligned}$$

Величины A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2, 3$) зависят от λ_i, λ_e, k . Сингулярная часть Λ_{11} определяется лишь коэффициентами A_1, A_2, A_3

$$(2.9) \quad A_1 = \frac{2(\lambda_i + \lambda_e)}{3(1 - k)^2}, \quad A_2 = \frac{1}{6(1 - k)}, \quad A_3 = \frac{2(\lambda_i\lambda_e - \lambda_i^2 - \lambda_e^2)}{9(1 - k)}$$

Подставляя (2.8) в ряд (2.3), можно непосредственно найти первые два члена внутреннего разложения для Ψ^m . Для отыскания третьего члена предварительно суммируем ряд (2.3) по частям, выразив полиномы Гегенбауэра через полиномы Лежандра.

В результате найдем

$$(2.10) \quad \Psi^m \simeq V_a c^2 [\Psi_0(\sigma, \mu) + \eta_1 \Psi_1(\sigma, \mu) + \eta_1^2 \Psi_2(\sigma, \mu) + O(\eta_1^3)]$$

$$\Psi_0 = \frac{(\sigma - k)(1 + \mu)}{2(1 - k)(1 - \mu)}, \quad \Psi_1 = 2^{-1/2}(A_1 \sigma^3 + B_1 \sigma^2 + C_1 \sigma + D_1) T(\mu)$$

$$\Psi_2 = \frac{k(1 + k)(\sigma - 1)(1 + \mu)}{12(1 - k)(1 - \mu)} - \frac{(A_2 \sigma^3 + B_2 \sigma^2 + C_2 \sigma + D_2)(1 + \mu)}{4(1 - \mu)^2} +$$

$$+ \frac{(A_3 \sigma^3 + B_3 \sigma^2 + C_3 \sigma + D_3)(1 + \mu)(2\mu - 3)}{4(1 - \mu)^2} - \frac{3\sigma^2(\sigma - k)(1 + \mu)}{8(1 - \mu)^2(1 - k)}$$

$$T(\mu) = 6(1 - \mu)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\mu)}{(2n - 3)(2n + 1)(2n + 5)}$$

Из последнего соотношения (2.10) следует, что при $\mu \rightarrow +1$

$$(2.11) \quad T(\mu) = -1/2(1 - \mu)^{-3/2} + O[(1 - \mu)^{-1/2} \ln(1 - \mu)]$$

Как видно из (2.10), (2.11), пригодность внутреннего разложения нарушается при $1 - \mu \sim \eta_1^2$. Вводя переменную $\tau = \eta_1^{-1} \sqrt{2(1 - \mu)}$, из (2.1) заметим, что в первом приближении σ, τ являются тангенциально-сферическими координатами

$$z/a = 2\sigma / (\sigma^2 + \tau^2), \quad \rho/a = 2\tau / (\sigma^2 + \tau^2)$$

Используя общее решение уравнения Стокса для функции тока в координатах σ, τ , найденное в [6, 8], и удовлетворяя граничным условиям, можно построить первый член внешнего разложения для Ψ^m и с помощью (2.11) показать, что внешнее разложение сращивается со внутренним.

Силу, действующую на сферу радиуса a , найдем согласно [2] в виде

$$(2.12) \quad F_a = \pi \mu_m \int \rho^3 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{E^2 \Psi^m}{\rho^2} \right) ds$$

Здесь интегрирование ведется по дуге, составляющей половину меридионального сечения сферы, n — направление внешней нормали; оператор Стокса E^2 в бисферических координатах

$$(2.13) \quad E^2 = \frac{(\operatorname{ch} \eta - \mu)}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left((\operatorname{ch} \eta - \mu) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left((\operatorname{ch} \eta - \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right]$$

Согласно (2.10) — (2.13) вклад внутренней области в коэффициент Λ_{11} равен

$$(2.14) \quad -\frac{1}{6} \int_{-1}^{\mu_0} d\mu \left[\eta_1^{-1} (1 - \mu) \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \sigma^3} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial \sigma} + (1 - \mu) \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial \sigma^3} + \right. \\ \left. + (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu) \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \sigma \partial \mu} \right) \right]$$

Значение μ_0 лежит в области перекрытия внешнего и внутреннего разложений. В (2.14) опущены члены, стремящиеся к нулю при $\eta_1 \rightarrow 0$. Из (2.10) следует

$$(2.15) \quad \int_{-1}^1 (1 - \mu) T(\mu) d\mu = -\frac{3\pi^2 \sqrt{2}}{32}$$

Используя (2.10), (2.11), (2.15), выражение (2.14) представим в виде

$$\frac{3}{32\pi^2} A_1 \eta_1^{-1} = [1/4(1 - k)^{-1} + 1/2(A_2 + A_3)] [\ln(\eta_1^2/2) + \ln(\tau_0^2)] - \\ = A_1 \tau_0 / 2 + O[\eta_1^{-1}(1 - \mu_0)^{3/2} \ln(1 - \mu_0)] + O(1)$$

При учете вклада внешней области в коэффициент Λ_{11} члены, содержащие τ_0 , сокращаются. Кроме этих членов, внешняя область дает вклад лишь порядка $O(1)$.

С учетом (2.2) и (2.9) окончательный результат принимает вид

$$(2.16) \quad \Lambda_{11} = (1/32)\pi^2 \sqrt{2}(1 - k)^{-3/2} (\lambda_i + \lambda_e) \varepsilon^{-1/2} - 1/3(1 - k)^{-1} [1 + (\lambda_i \lambda_e - \lambda_i^2 - \\ - \lambda_e^2) / 3] \ln \varepsilon + O(1)$$

Формула (2.16) получена в предположении, что $\varepsilon \rightarrow 0$ при конечных фиксированных λ_i, λ_e и, как видно из (2.16), область применимости найденного решения ограничивается условием

$$(2.17) \quad \max(\lambda_i, \lambda_e) \ll (\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|)^{-1}$$

Ограничение (2.17) делает невозможным переход от (2.16) к асимптотической формуле [6] для твердых сфер.

В работе [1] величина Λ_{11} определена суммой бесконечного ряда, медленно сходящегося при малых ε . Результаты численных расчетов по формулам [1] при $k = 1/2$ сравниваются ниже со значениями Λ_{11}^* , найденными по асимптотической формуле (2.16)

$\lambda_i = \lambda_e$	ε	Λ_{11}	$(\Lambda_{11}^* - \Lambda_{11})/\Lambda_{11}$
$\sqrt{3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2.565 \cdot 10$	$1.8 \cdot 10^{-1}$
$\sqrt{3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2.967 \cdot 10^2$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
$\sqrt{3}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$3.016 \cdot 10^3$	$1.9 \cdot 10^{-3}$
3	$2 \cdot 10^{-2}$	$3.890 \cdot 10$	$2.1 \cdot 10^{-1}$
3	$2 \cdot 10^{-4}$	$5.019 \cdot 10^2$	$2.0 \cdot 10^{-2}$
3	$2 \cdot 10^{-6}$	$5.206 \cdot 10^3$	$2.0 \cdot 10^{-3}$

Применяя изложенный метод, можно рассмотреть случай, когда одна из сфер является твердой. Функция $\alpha_n(\sigma)$ из (2.8) будет полиномом третьей степени, поэтому к (2.14) нужно прибавить выражение

$$(2.18) \quad -\frac{1}{6} \int_{-1}^{\mu_0} d\mu \left[\frac{(1-\mu)}{\eta_1^2} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial \sigma^3} + 5 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \sigma} \right]$$

Все производные в (2.18) и (2.14) вычисляются при $\sigma = 1$. В остальном этот случай мало отличается от рассмотренного. В результате при $\lambda_e = \infty$ имеем

$$(2.19) \quad \Lambda_{11} = \frac{1}{4(1-k)^2\varepsilon} + \frac{9\pi^2\sqrt{2}}{128} (1-k)^{1/2} \lambda_i \varepsilon^{-1/2} + \left[\frac{3\lambda_i^2}{16(1-k)} - \frac{9k^2 - 18k + 4}{20(1-k)^3} \right] \ln \varepsilon + O(1)$$

Если считать $1 - k \sim 1$, то, как видно из (2.19), найденное решение применимо при $\lambda_i \ll (\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|)^{-1}$.

Поступила 12 VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Haber S., Hetsroni G., Solan A. On the low Reynolds number motion of two droplets. *Internat. J. Multiphase Flow*, 1973, vol. 1, No. 1, p. 57—71.
2. Stimson M., Jeffery G. B. The motion of two spheres in a viscous fluid. *Proc. Roy. Soc. A*, 1926, vol. 111, No. 757, p. 110—116.
3. Brenner H. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane wall. *Chem. Engng Sci.*, 1961, vol. 16, No. 3/4, p. 242—251.
4. Bart E. The slow unsteady settling of a fluid sphere toward a flat fluid interface. *Chem. Engng Sci.*, 1968, vol. 23, No. 3, p. 193—210.
5. Wacholder E., Weihs D. Slow motion of a fluid sphere in the vicinity of another sphere or a plane boundary. *Chem. Engng Sci.*, 1972, vol. 27, No. 10, p. 1817—1828.
6. Cooley M. D. A., O'Neill M. E. On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere. *Mathematika*, 1969, vol. 16, No. 1, p. 37—49.
7. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
8. Goren S. L. The normal force exerted by creeping flow on a small sphere touching a plane. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 41, pt 3, p. 619—625.
9. Reed L. D., Morrison F. A., Jr. The slow motion of two touching fluid spheres along their line of centers. *Internat. J. Multiphase Flow*, 1974, vol. 1, No. 4, p. 573—584.