

После подстановки выражений (5) и (6) с учетом соотношения (2) получаем окончательное выражение для первой ляпуновской величины на границе устойчивости  $S$

$$(7) \quad g = \frac{1}{2} b \pi [p q^{1/2} (p^2 + q) (p^2 + 4q) (\sigma - b - 1)]^{-1} [9\sigma^4 + \\ + (-18b + 20)\sigma^3 + (20b^2 + 2b + 10)\sigma^2 + (-2b^3 + 12b^2 + 10b - 4)\sigma - \\ - b^4 - 6b^3 - 12b^2 - 10b - 3]$$

Полученное выражение значительно облегчает задачу определения знака ляпуновской величины для любых фиксированных значений параметров, взятых на границе устойчивости, но не позволяет еще сделать необходимых общих утверждений по этому вопросу. Чтобы избавиться от этого недостатка, воспользуемся некоторыми простыми соображениями и приведем более удобную форму записи выражения (7).

По физическому смыслу задачи представляет интерес участок границы устойчивости, для которого все три параметра  $b$ ,  $\sigma$  и  $r$  положительны. Поэтому из рассмотрения значения параметра  $r$  на границе устойчивости  $r = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$  следует, что достаточно рассмотреть область параметров  $\sigma$  и  $b$ , выделяемую условием  $0 < b < \sigma - 1$ . Тогда после замены  $\sigma = \sigma_* + b + 1$  в (7) видно, что первая ляпуновская величина  $g$  для  $b > 0$  и  $\sigma_* > 0$  положительна. Это доказывает утверждение об опасном характере границы области устойчивости в модели Лоренца.

Автор благодарит Л. П. Шильникова за внимание к работе.

Поступила 30 I 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.—М., Гостехиздат, 1949.
2. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmosph. Sci., 1963, vol. 20, No. 2.
3. Ruelle D. Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence. Lect. Notes Phys., 1975, vol. 12.
4. Афраймович В. С., Бьков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2.
5. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 5.
6. McLaughlin J. B., Martin P. C. Transition to turbulence in a statically stressed fluid system. Phys. Rev., Ser. A, 1975, vol. 12, No. 1.
7. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. N. Y., Springer-Verlag, 1976.
8. Ораевский А. Н., Успенский А. В. Режим пульсаций мощности излучения квантовых генераторов. Тр. Физ. ин-т АН СССР. Квантовая радиофизика, 1965, т. 31.
9. Haken H. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. Phys. Letter. Ser. A., 1975, vol. 53, No. 1.

УДК 531.36 : 534

#### РОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОТ «СПИТОГО ФОКУСА»

Б. Н. С к р я б и н

(Горький)

Приводятся формулы, позволяющие проследить рождение предельного цикла от спитого фокуса по коэффициентам правых частей динамической системы.

У «спитых» динамических систем, заданных различными аналитическими выражениями по разные стороны от некоторой линии на фазовой плоскости, возможны [1] на «линии сшивания» точки, окрестности которых сходны с окрестностями состояний равновесия гладких систем. Одна из таких точек — спитый фокус, спирали которого состоят из дуг, расположенных по разные стороны от линии сшивания. Подобно фоку-

су гладкой системы сшитый фокус при изменении входящих в систему параметров может менять устойчивость. И так же как в случае гладкой системы, граница области устойчивости в пространстве параметров может быть [1] «безопасной», если при переходе через нее из области устойчивости в область неустойчивости от фокуса рождается устойчивый предельный цикл, и «опасной», если к нему стягивается неустойчивый цикл. В случае, когда могут быть найдены общие интегралы сшиваемых систем, вид границы определяется способом, изложенным в [2]. Ниже приводится процедура, использующая для этой цели лишь несколько первых членов разложений в ряды правых частей сшиваемых систем.

Рассмотрим систему, сшитую по оси  $y$  из двух аналитических систем

$$\begin{aligned} x' &= P_1(x, y), & y' &= Q_1(x, y), & x > 0 \\ x' &= P_2(x, y), & y' &= Q_2(x, y), & x < 0 \end{aligned}$$

Условия

$$\begin{aligned} P_1(0, 0) = P_2(0, 0) = 0, & \quad Q_1(0, 0) Q_2(0, 0) < 0 \\ \frac{\partial P_1(0, 0)}{\partial y} Q_1(0, 0) < 0, & \quad \frac{\partial P_2(0, 0)}{\partial y} Q_2(0, 0) > 0 \end{aligned}$$

обеспечивают в окрестности начала координат структуру типа сшитого фокуса и, кроме того, выделяют основной случай — точка  $(0, 0)$  не является состоянием равновесия ни для одной из сшиваемых систем и изоклины вертикальных наклонов обеих систем входят в начало координат, не касаясь оси  $y$ .

Эти условия позволяют записать систему в виде

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + P_1'(x, y), & y' &= b + Q_1'(x, y), & x > 0 \\ x' &= c_1x + c_2y + P_2'(x, y), & y' &= d + Q_2'(x, y), & x < 0 \\ (a_2b < 0, c_2d > 0, & \quad bd < 0) \end{aligned}$$

Здесь функции  $P_1', Q_1', P_2', Q_2'$  разлагаются в ряды, начинающиеся членами более высокого порядка, чем выписанные.

После замены

$$(1) \quad \begin{aligned} x^\circ &= -(b/a_2)x, & y^\circ &= (a_1/a_2)x + y, & x > 0 \\ x^\circ &= (d/c_2)x, & y^\circ &= (c_1/c_2)x + y, & x < 0 \end{aligned}$$

система примет вид (индексы у новых переменных отброшены)

$$\begin{aligned} x' &= -by + P_1''(x, y), & y' &= b + Q_1''(x, y), & x > 0 \\ x' &= dy + P_2''(x, y), & y' &= d + Q_2''(x, y), & x < 0 \end{aligned}$$

Здесь функции  $P_1'', Q_1'', P_2'', Q_2''$  разлагаются в ряды, начинающиеся членами более высокого порядка, чем выписанные.

Заменив каждую систему одним уравнением и разложив правые части в ряды, получим (выписаны лишь члены, коэффициенты которых участвуют в окончательных формулах)

$$(2) \quad \begin{aligned} dx/dy &= -y + g_{20}x^2 + g_{11}xy + g_{02}y^2 + \dots + g_{12}xy^2 + g_{03}y^3 + \dots + \\ &+ g_{04}y^4 + \dots, & x > 0 \\ dx/dy &= y + h_{20}x^2 + h_{11}xy + h_{02}y^2 + \dots + h_{12}xy^2 + h_{03}y^3 + \dots + \\ &+ h_{04}y^4 + \dots, & x < 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим точечное отображение  $y_1 = y_1(y_0)$  (см. фигуру) отрицательной полуоси  $y$  в положительную, осуществляемое траекториями «правой» системы, и отображение  $y_2 = y_2(y_0)$  — по траекториям «левой» системы. Для построения отображений найдем решения уравнений (2), начинающиеся на оси  $y$  при малых по абсолютной величине  $y = y_0$ , в виде рядов по степеням  $y$  и  $y_0$ . Положив затем в них  $x = 0$ , получим уравнения, из которых определим функции  $y_1(y_0)$  и  $y_2(y_0)$  в виде рядов по степе-

ням  $y_0$

$$y_1 = -y_0 + \frac{2}{3}g_{02}y_0^2 + \dots + \frac{2}{135}(40g_{02}^3 + 45g_{02}g_{03} + 9g_{11}g_{02} + 18g_{20} + 9g_{12} + 27g_{04})y_0^4 + \dots$$

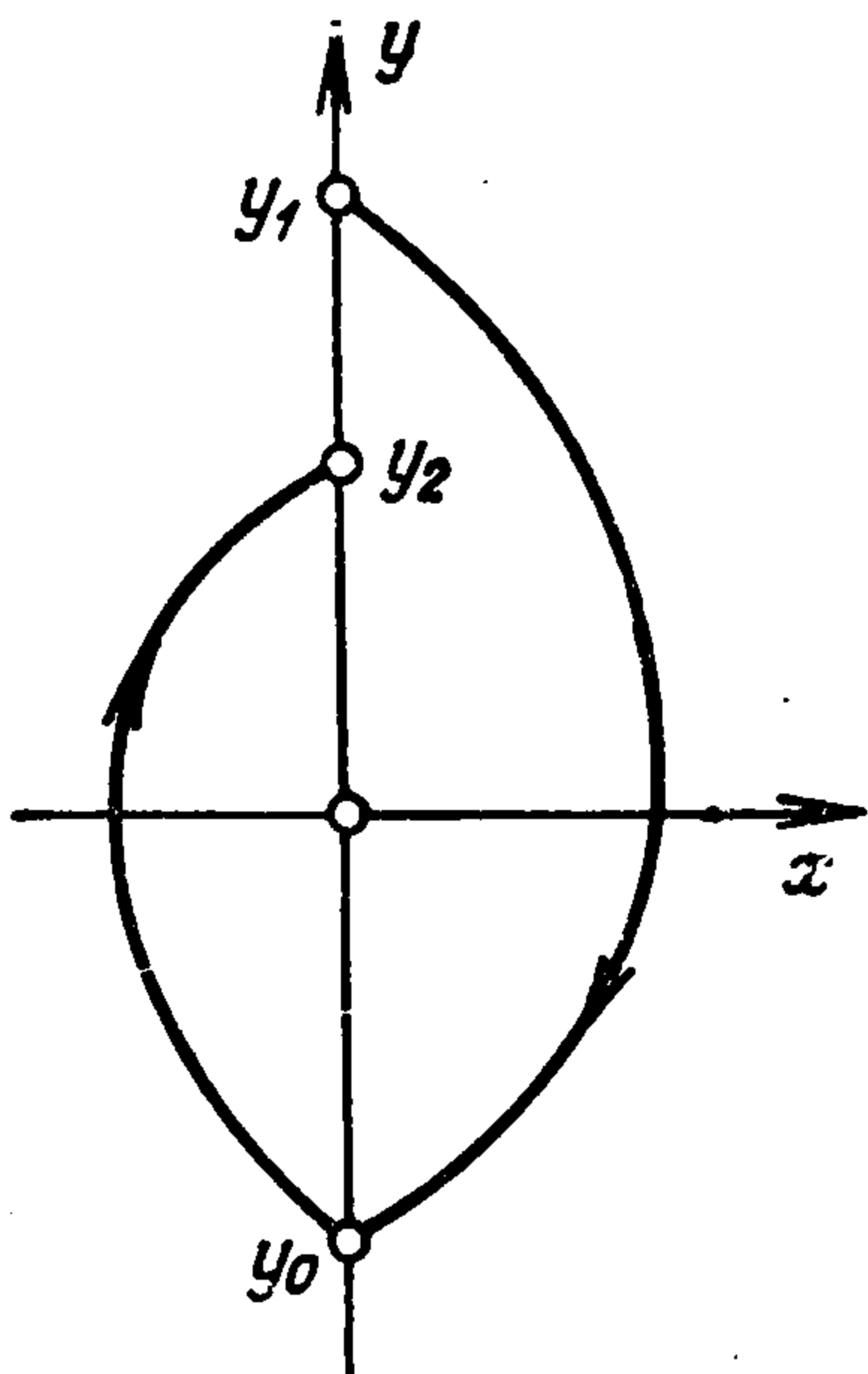
$$y_2 = -y_0 - \frac{2}{3}h_{02}y_0^2 + \dots + \frac{2}{135}(-40h_{02}^3 + 45h_{02}h_{03} - 9h_{11}h_{02} - 18h_{20} + 9h_{12} - 27h_{04})y_0^4 + \dots$$

Составим разность

$$f(y_0) \equiv y_1(y_0) - y_2(y_0) = \frac{2}{3}\alpha_2 y_0^2 + \dots + \frac{2}{135}\alpha_4 y_0^4 + \dots$$

Здесь коэффициенты при  $y_0^2, \dots, y_0^4, \dots$  — разности соответствующих коэффициентов рядов  $y_1$  и  $y_2$ .

Из простых геометрических соображений следует, что функция  $f(y_0)$  имеет одинаковые знаки при  $y_0 > 0$  и при  $y_0 < 0$ . Поэтому первый отличный от нуля коэффициент имеет четный номер. Если он положителен, то при малых  $|y_0|$  будет  $f(y_0) > 0$  — фокус устойчив. Если отрицателен, то неустойчив. Это справедливо при движении вокруг фокуса по часовой стрелке ( $d > 0$ ). При движении в обратном направлении ( $d < 0$ ) выводы будут противоположными. Когда все коэффициенты ряда  $f(y_0)$  — нули, то  $f(y_0) \equiv 0$ , и состояние равновесия будет «сшитым центром».



Пусть теперь система зависит от параметров (правые части обеих сшиваемых систем — аналитические функции  $x, y$  и параметров). Коэффициенты ряда  $f(y_0)$  будут тогда функциями этих параметров. Так как при изменении знака  $\alpha_2$  меняется устойчивость, то условием  $\alpha_2 = 0$  определяется в пространстве параметров поверхность, являющаяся границей области устойчивости (вместе с  $\alpha_2$  на границе обращается в нуль и  $\alpha_3$ ).

Пусть для значений параметров на самой границе будет  $\alpha_4 \neq 0$ . Тогда для этих значений состояние равновесия будет фокусом, устойчивость которого определяется знаком  $\alpha_4$  и направлением движения по траекториям. Если он устойчив, то подобно тому, как это имеет место для гладкой системы, граница безопасна. При неустойчивости — опасна. Соответствующие доказательства аналогичны проведенным в [3] для аналитической системы.

Таким образом, для определения границы области устойчивости и ее вида следует: 1) выполнить преобразование (1); 2) заменить каждую из сшиваемых систем одним уравнением и разложить правые части в ряды, ограничиваясь членами, выписанными в (2); 3) найти  $\alpha_2 = g_{02} + h_{02}$

$$\alpha_4 = (5g_{02}g_{03} + g_{11}g_{02} + 2g_{20} + g_{12} + 3g_{04}) - (5h_{02}h_{03} - h_{11}h_{02} - 2h_{20} + h_{12} - 3h_{04})$$

(в запись  $\alpha_4$  внесены очевидные упрощения, вытекающие из того, что эта величина нужна только при  $\alpha_2 = 0$ ).

Граница области устойчивости определится равенством  $\alpha_2 = 0$ , область устойчивости (неустойчивости) — неравенством  $d\alpha_2 > 0$  ( $< 0$ ). Если на границе  $d\alpha_4 > 0$  ( $< 0$ ), то она безопасна (опасна).

*Пример.* Рассмотрим релейную следящую систему в режиме отработки постоянной скорости входной оси [4].

Уравнения движения

$$x'' = -M(\omega - x'), \quad x > 0; \quad x'' = M(x' - \omega), \quad x < 0$$

Здесь  $M(v)$  — механическая характеристика двигателя (зависимость развиваемого им момента от скорости  $v$ ),  $\omega > 0$  — скорость входной оси,  $x$  — рассогласование.

Аппроксимируем характеристику двигателя кубической параболой

$$M(v) = mv^3 + nv^2 + pv + r, \quad m < 0, \quad n < 0, \quad p > 0, \quad r > 0$$

Соответствующая уравнению система примет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -m(\omega - y)^3 - n(\omega - y)^2 - p(\omega - y) - r, \quad x > 0$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = m(y - \omega)^3 + n(y - \omega)^2 + p(y - \omega) + r, \quad x < 0$$

Если  $\omega$  не слишком велико, то она имеет на линии шивания состояние равновесия  $(0, 0)$ .

Границей области устойчивости на плоскости параметров  $\omega^2, p$  будет кривая

$$p = (mn\omega^4 + 3mr^2\omega^2) / (n\omega^2 - r)$$

Сверху от границы имеем  $d\alpha_2 < 0$ , состояние равновесия есть спитый неустойчивый фокус, снизу от нее  $d\alpha_2 > 0$  — фокус устойчив. На границе области устойчивости будет

$$d\alpha_4 = -2(nr + 3mr) / M(\omega) > 0$$

Граница безопасна.

Автор благодарит Н. Н. Баутина за обсуждение работы.

Поступила 23 XI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1976.
2. Губарь Н. А. О бифуркациях в окрестности «спитого фокуса». ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
4. Рабинович Л. В. Методы фазовой плоскости в теории и практике релейных следящих систем. М.—Л., «Энергия», 1965.

УДК 532.516

#### К РАСЧЕТУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПЕЛЬ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. З. Зинченко

(Москва)

В стоксовом приближении рассматривается осесимметричная задача о движении двух жидких сфер в вязкой среде. При малой величине зазора между поверхностями сфер строится асимптотическое решение. Рассмотрен также случай, когда одна из сфер является твердой.

Осесимметричная задача о медленном движении двух сферических капель в вязкой среде решена в работе [1]. Решение [1] обобщает результаты исследований [2–5]. Гидродинамические силы представлены в [1] бесконечными рядами. Эти ряды медленно сходятся и практически непригодны для численного счета, если зазор между поверхностями сфер мал. В данной работе строится асимптотическое решение, применимое также в случае жидких сфер, расположенных одна внутри другой, что представляет интерес, например, при изучении движения капли, содержащей газовый пузырь.

Найденное решение существенно отличается от известного асимптотического решения [6] для твердых сфер.