УДК 531.36:534

ОПАСНЫЕ ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ В МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Н. В. Рощин

(Горький)

Методами качественной теории дифференциальных уравнений, развитыми Н. Н. Баутиным [1], изучается характер границы устойчивости в модели Лоренца. Показано, что для положительных значений физических параметров граница области устойчивости является опасной.

Модель Лоренца [2], описываемая системой уравнений

$$x^{\cdot} = -\sigma (x - y),\ y^{\cdot} = -xz + rx - y,\ z^{\cdot} = xy - bz \tag{1}$$

где b, σ, r — положительные физические параметры, привлекает внимание в связи с вопросом о существовании устойчивых предельных множеств сложной природы, так называемых «странных аттракторов» [3,4], и вытекающей отсюда новой интерпретацией турбулентности. Система (1) может иметь три состояния равновесия

$$O_1\ (x = y = z = 0),\quad O_2\ (x = y = +[b\,(r-1)]^{1/2},\ z = r - 1)$$
$$O_3\ (x = y = -[b\,(r-1)]^{1/2},\ z = r - 1)$$

Состояние равновесия O_1 существует при любых значениях параметров и является устойчивым узлом при $r < 1$ и седлом при $r > 1$. При $r > 1$ в результате бифуркации состояния равновесия O_1 ($r = 1$) появляются устойчивые состояния равновесия O_2 и O_3. Ниже изучается характер границы области устойчивости состояний равновесия O_2 и O_3 в критическом случае двух чисто мнимых корней характеристического уравнения. Интерес к этому вопросу связан с новыми результатами [4], которые указывают на жесткий режим возникновения стохастичности и явление гистерезиса при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r = 24.74$, когда происходит потеря устойчивости состояниями равновесия O_2 и O_3.

Из условий Рауса — Гурвица следует, что граница устойчивости в пространстве параметров для состояний равновесия O_2 и O_3 определяется соотношением

$$S = b\,(\sigma + b + 1)\,(r + \sigma) - 2\sigma b\,(r - 1) = 0 \tag{2}$$

При переходе через границу устойчивости от положительных значений S к отрицательным характер состояний равновесия O_2 и O_3 меняется от устойчивого фокуса к седло-фокусу, а на самой границе характеристическое уравнение для этих состояний равновесия имеет чисто мнимые корни. В этом случае все варианты поведения фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия достаточно хорошо изучены и определяются знаком фокусных или ляпуновских величин [1, 5].

Проводимый ниже анализ позволяет утверждать, что для положительных значений параметров ляпуновская величина положительна, т. е. граница устойчивости в модели Лоренца является опасной. Следует отметить, что полученная в [6] для предельного случая $\sigma \to \infty$ оценка знака ляпуновской величины согласуется с данным выше утверждением. (Приведенный в [7] численный результат Йорка и Рюэля, согласно которому ляпуновская величина может менять знак для положительных значений параметров, не подтверждается непосредственным расчетом фазовых траекторий на ЭВМ вблизи границы устойчивости; наиболее детально такие расчеты проведены для значений параметров $\sigma = 100$, $b = 75$, $r \approx 741.66$ и $\sigma = 100$, $b = 1$, $r \approx 106.12$.) Этот результат справедлив также и для аналогичной с математической точки зрения задачи о колебаниях одномодового квантового генератора [4, 8, 9].

Исчерпывающий и достаточно удобный для практического применения алгоритм определения первой ляпуновской величины через коэффициенты исходной системы (1) был дан Н. Н. Баутиным [1]. Этот алгоритм и будет использоваться в дальнейшем.

Для того чтобы прийти к максимально упрощенному выражению для ляпуновской величины, систему (1) представим в виде

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & x_1^{\cdot} = -(\sigma + b + 1)\,x_1 - b\,(1 + \sigma)\,x_2 + b\sigma\,(r - 1)\,x_3 + x_1x_2 / x_3 + \\
& + (\sigma + 1)\,x_2^2 / x_3 - x_3^2x_2 - \sigma x_3^3 = P_1\,(x_1, x_2, x_3) \\
& x_2^{\cdot} = x_1 = P_2\,(x_1, x_2, x_3), \quad x_3^{\cdot} = x_2 = P_3\,(x_1, x_2, x_3) \\
& x_1 = x^{\cdot\cdot}, \quad x_2 = x^{\cdot}, \quad x_3 = x
\end{aligned}
$$

Затем, следуя [1], приведем систему (3) к стандартной форме, раскладывая $P_i\,(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ в ряды по степеням новых переменных $x_j' = x_j - x_j^{\circ}$, $j = 1, 2, 3$. Через x_j° обозначены координаты одного из состояний равновесия O_2 или O_3. Ограничиваясь членами разложения до третьего порядка включительно и опуская штрихи в обозначениях новых переменных, получим следующую систему:

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & x_j^{\cdot} = a_1^{(j)}x_1 + a_2^{(j)}x_2 + a_3^{(j)}x_3 + a_{11}^{(j)}x_1^2 + a_{22}^{(j)}x_2^2 + a_{33}^{(j)}x_3^2 + \\
& + 2a_{12}^{(j)}x_1x_2 + 2a_{13}^{(j)}x_1x_3 + 2a_{23}^{(j)}x_2x_3 + a_{111}^{(j)}x_1^3 + a_{222}^{(j)}x_2^3 + {}_{333}^{(j)}x_3^3 + \\
& + 3a_{112}^{(j)}x_1^2x_2 + 3a_{113}^{(j)}x_1^2x_3 + 3a_{122}^{(j)}x_1x_2^2 + 3a_{223}^{(j)}x_2^2x_3 + 3a_{133}^{(j)}x_1x_3^2 + \\
& + 3a_{233}^{(j)}x_2x_3^2 + 6a_{123}^{(j)}x_1x_2x_3, \; j = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Отличными от нуля будут следующие коэффициенты разложения:

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad & a_1^{(1)} = -p = -\sigma - b - 1, \quad a_2^{(1)} = -q = -b\,(\sigma + r), \quad a_3^{(1)} = \\
& = -2b\sigma\,(r - 1) \\
& a_{22}^{(1)} = (\sigma + 1)\,[b\,(r - 1)]^{-1/2}, \quad a_{33}^{(1)} = -3\sigma[b(r - 1)]^{1/2}, \\
& a_{12}^{(1)} = {}^1/_2\,[b\,(r - 1)]^{-1/2} \\
& a_{23}^{(1)} = -[b\,(r - 1)]^{1/2}, \quad a_{333}^{(1)} = -\sigma, \quad a_{223}^{(1)} = -(\sigma + 1)\,[3b\,(r - 1)]^{-1} \\
& a_{233}^{(1)} = -{}^1/_3, \; a_{123}^{(1)} = -{}^1/_6\,[b(r - 1)]^{-1}, \; a_1^{(2)} = 1, \; a_2^{(3)} = 1
\end{aligned}
$$

Для первой ляпvновской величины имеем следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & g = {}^1/_4\pi\,[2\,(A_{33}^{(2)}A_{33}^{(3)} - A_{22}^{(2)}A_{22}^{(3)}) + 2A_{23}^{(2)}\,(A_{22}^{(2)} + A_{33}^{(2)}) - 2A_{23}^{(3)}(A_{22}^{(3)} + A_{33}^{(3)}) + \\
& + 3q^{1/2}\,(A_{222}^{(2)} + A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{223}^{(3)})] + {}^1/_4\,\pi\,[pq^{1/2}\,(p^2 + 4q)]^{-1}\times \\
& \times \{p^2\,[2A_{22}^{(1)}\,(3A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) + 2A_{33}^{(1)}\,(A_{12}^{(2)} + 3A_{13}^{(3)})] + 4A_{23}^{(1)}\,(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)})] + \\
& + 4pq^{1/2}\,[(A_{22}^{(1)} - A_{33}^{(1)})\,(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) + 2A_{23}^{(1)}\,(A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(2)})] + \\
& + 16q\,(A_{22}^{(1)} + A_{33}^{(1)})\,(A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)})\}
\end{aligned}
$$

В данном случае на границе устойчивости $A_{kl}^{(j)}$ и $A_{kls}^{(j)}$ выражаются через коэффициенты системы (4) по формулам

$$
A_{12}^{(j)} = \frac{\alpha_{j1}'q}{\Delta_0}\,(a_{33}^{(1)} - pa_{23}^{(1)} + pqa_{12}^{(1)}), \quad A_{13}^{(j)} = \frac{\alpha_{j1}'q^{3/2}}{\Delta_0}\,(pa_{22}^{(1)} - a_{23}^{(1)} - p^2a_{12}^{(1)}),
$$

$$
A_{23}^{(j)} = \frac{\alpha_{j1}'q^{1/2}}{\Delta_0}\,(qa_{12}^{(1)} - \alpha_{23}^{(1)})
$$

$$
A_{22}^{(j)} = \frac{\alpha_{j1}'}{\Delta_0}\,a_{33}^{(1)}, \quad A_{33}^{(j)} = \frac{\alpha_{j1}'q}{\Delta_0}\,a_{22}^{(1)},
$$

$$
A_{222}^{(2)} = \frac{\alpha_{21}'}{\Delta_0}\,a_{333}^{(1)}, \quad A_{233}^{(2)} = \frac{\alpha_{21}'q}{\Delta_0}\,a_{223}^{(1)},
$$

$$
A_{333}^{(3)} = 0, \quad A_{223}^{(3)} = \frac{\alpha_{31}'q^{1/2}}{\Delta_0}\,(-a_{223}^{(1)} + 2qa_{123}^{(1)})
$$

$$
\alpha_{11}' = q^{1/2}, \quad \alpha_{21}' = -q^{3/2}, \quad d_{31}' = -pq, \quad \Delta_0 = q^{3/2}\,(p^2 + q), \quad j = 1, 2, 3
$$

После подстановки выражений (5) и (6) с учетом соотношения (2) получаем окончательное выражение для первой ляпуновской величины на границе устойчивости S

$$g = {}^1/_2 b\pi[pq^{1/2}(p^2+q)(p^2+4q)(\sigma-b-1)]^{-1}[9\sigma^4 + (-18b+20)\sigma^3+(20b^2+2b+10)\sigma^2+(-2b^3+12b^2+10b-4)\sigma - b^4-6b^3-12b^2-10b-3] \tag{7}$$

Полученное выражение значительно облегчает задачу определения знака ляпуновской величины для любых фиксированных значений параметров, взятых на границе устойчивости, но не позволяет еще сделать необходимых общих утверждений по этому вопросу. Чтобы избавиться от этого недостатка, воспользуемся некоторыми простыми соображениями и приведем более удобную форму записи выражения (7).

По физическому смыслу задачи представляет интерес участок границы устойчивости, для которого все три параметра b, σ и r положительны. Поэтому из рассмотрения значения параметра r на границе устойчивости $r=\sigma(\sigma+b+3)(\sigma-b-1)^{-1}$ следует, что достаточно рассмотреть область параметров σ и b, выделяемую условием $0<b<\sigma-1$. Тогда после замены $\sigma=\sigma_*+b+1$ в (7) видно, что первая ляпуновская величина q для $b>0$ и $\sigma_*>0$ положительна. Это доказывает утверждение об опасном характере границы области устойчивости в модели Лоренца.

Автор благодарит Л. П. Шильникова за внимание к работе.

Поступила 30 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.— М., Гостехиздат, 1949.
2. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow. J. Atmosph. Sci., 1963, vol. 20, No. 2.
3. *Ruelle D.* Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence. Lect. Notes Phys., 1975, vol. 12.
4. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2.
5. *Шильников Л. П.* Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 5.
6. *McLauglin J. B., Martin P. C.* Transition to turbulence in a statically stressed fluid system. Phys. Rev., Ser. A, 1975, vol. 12, No. 1.
7. *Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf bifurcation and its applications. N. Y., Springer-Verlag, 1976.
8. *Ораевский А. Н., Успенский А. В.* Режим пульсаций мощности излучения квантовых генераторов. Тр. Физ. ин-т АН СССР. Квантовая радиофизика, 1965, т. 31.
9. *Haken H.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. Phys. Letter. Ser. A., 1975, vol. 53, No. 1.

УДК 531.36 : 534

РОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ОТ «СШИТОГО ФОКУСА»

Б. Н. Скрябин

(Горький)

Приводятся формулы, позволяющие прослеживать рождение предельного цикла от сшитого фокуса по коэффициентам правых частей динамической системы.

У «сшитых» динамических систем, заданных различными аналитическими выражениями по разные стороны от некоторой линии на фазовой плоскости, возможны [1] на «линии сшивания» точки, окрестности которых сходны с окрестностями состояний равновесия гладких систем. Одна из таких точек — сшитый фокус, спирали которого состоят из дуг, расположенных по разные стороны от линии сшивания. Подобно фоку-