УДК 531.381

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ВИДЕ СУММЫ КВАДРАТОВ ИНТЕГРАЛОВ

А. Н. Вейссенберг

(Москва)

Условия устойчивости движения системы, допускающей первые интегралы, получены как достаточные условия единственности нулевого решения нелинейной системы уравнений. Для иллюстрирующей задачи об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной закреплённой точкой найдены три достаточных условия устойчивости, два из которых совпадают с ранее найденными условиями из [1], а третье является более широким. Развиваемый подход для построения функции Ляпунова из интегралов движения является синтезом ряда известных методов [2–4]. В иллюстрирующей задаче, которая рассматривалась рядом авторов (см., например, [5–9]), новое семейство устойчивых перманентных вращений, следуя В. В. Румянцеву, указано в прямой постановке на допустимой дуге, содержащейся на конусе Штауде.

1. Пусть $U_i(x) = \text{const}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — первые интегралы движения некоторой механической системы (x — элемент n-мерного пространства), причем функции $U_i(x)$ определены в окрестности нуля и непрерывны там вместе со своими частными производными первого порядка. Если $U_i(0) = 0$, а соотношение $x \equiv 0$ определяет невозмущенное движение исходной механической системы, то для исследования его устойчивости в качестве функции Ляпунова может быть рассмотрена функция

$$V(x) = \sum_{i=1}^{k} U_i^2(x)$$

Функция $V(x)$ определённо-положительна, если и только если существует куб $S(0, a) = \{x: |x^j| < a,\ j = 1, \ldots, n;\ a > 0\}$, в котором единственно нулевое решение системы уравнений

$$U_1(x) = 0, \ldots, U_k(x) = 0 \tag{1.1}$$

Предположим, что интегралы голоморфны ($\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i, \alpha_{sj}^i$ — вещественные константы), т. е.

$$U_i(x) = \alpha_1^i x^1 + \ldots + \alpha_n^i x^n + \sum_{s,\,j=1}^{n} \alpha_{sj}^i x^s x^j + o(\|x\|^2) \tag{1.2}$$

а ранг матрицы $\|\alpha^i{}_j\|$ равен $(k - 1)$, причем отличный от нуля определитель $(k - 1)$-го порядка расположен в левом верхнем углу. Допустим, что главные диагональные миноры этого определителя отличны от нуля. В принятых предположениях найдется такой куб $S(0, a)$, что содержащееся в нем множество точек $(x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots x^n)$, удовлетворяющих первым $r \leqslant k - 1$ уравнениям системы (1.1), описывается непрерывно дифференцируемыми функциями [10]

$$x^i = \psi_r^i(x^{r+1}, \ldots, x^n), \quad \psi_r^i(0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, r \tag{1.3}$$

Из единственности решений ψ_r^i следует, что если некоторый ненулевой вектор x_0 удовлетворяет указанным уравнениям, то хотя бы одна из его компонент $x_0^{r+1}, \ldots, x_0^n$ отлична от нуля.

Укажем k достаточных условий устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений, допускающей интегралы (1.2), причем эти условия последовательно расширяются в том смысле, что при выполнении i-го условия заведомо выполнены все условия с номерами от $i + 1$ до k.

Теорема. Существуют k последовательно расширяющихся достаточных условий устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений, допускающей интегралы (1.2). Эти условия даются достаточными условиями знакоопределенности функционального определителя

$$\Delta(x) = |a_{ij}|,\ a_{ij} = \alpha_j{}^i,\ j = 1, \ldots, k-1 \qquad (1.4)$$

$$a_{ik} = U_i(x);\ i = 1, \ldots k$$

либо любого из выражений

$$f_{r+1} = \Delta[\psi_r{}^1(x^{r+1}, \ldots, x^n), \ldots, \psi_r{}^r(x^{r+1}, \ldots, x^n), x^{r+1}, \ldots, x^n] \qquad (1.5)$$

$$r = 1, \ldots, (k-1)$$

Доказательство. Запишем систему уравнений (1.1) в виде

$$\alpha_1{}^i x^1 + \ldots + \alpha_n{}^i x^n = -U_i(x) + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s{}^i x^s, \quad i = 1, \ldots, k \qquad (1.6)$$

Покажем, что при выполнении любого из k условий, фигурирующих в теореме, существует число $a > 0$, такое, что в кубе $S(0, a)$ решение $x = 0$ системы уравнений (1.1) единственно. Сопоставим ранги матрицы $\| \alpha_j{}^i \|$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$ и расширенной, элементы b^i последнего столбца которой имеют вид

$$b^i = -U_i(x) + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s{}^i x^s$$

Рассмотрим минор k-го порядка $\Delta_k(x)$ последней матрицы, составленный из ее $(k-1)$ первых и последнего столбцов. Очевидно $\Delta_k(x) = -\Delta(x)$. Если функция $\Delta(x)$ знакоопределенна, существует куб $S(0, a)$ $(a > 0)$, в котором $\Delta(x) > 0$ при $x \neq 0$, и решение $x = 0$ системы уравнений (1.1) единственно. Действительно, предполагая существование ненулевого решения $x_0 \in S(0, a)$ этой системы, рассмотрим вспомогательную линейную систему уравнений, полученную из (1.6) подстановкой x_0 в правую часть. Так как $\Delta_k(x_0) \neq 0$, на основании теоремы Кронекера — Капелли вспомогательная линейная система не имеет решения, и, следовательно, вектор x_0 не может быть решением системы уравнений (1.1).

Допустим теперь, что функция f_{r+1} знакоопределённа. Существует $(n-r)$-мерный куб $|x^{r+1}| < a, \ldots, |x^n| < a$ $(a > 0)$, в котором эта функция отлична от нуля всюду, кроме точки $x^{r+1} = \ldots = x^n = 0$. Решение $x = 0$ системы уравнений (1.1) в n-мерном кубе $S(0, a)$ единственно. Действительно, предположим, что $x_0 \neq 0$, $x_0 \in S(0, a)$ — решение системы (1.1). Тогда хотя бы одна из компонент $x_0{}^k, \ldots, x_0{}^n$ отлична от нуля и

$$\Delta(x_0) = \Delta[\psi_r{}^1(x_0^{r+1}, \ldots, x_0{}^n), \ldots, \psi_r{}^r(x_0^{r+1}, \ldots, x_0{}^n), x_0^{r+1}, \ldots, x_0{}^n]$$

Для упомянутой вспомогательной линейной системы уравнений $\Delta_k(x_0) \neq 0$, следовательно, x_0 не может быть решением систем уравнений (1.6) и (1.1).

Докажем, что условия устойчивости последовательно расширяются. Из знакоопределенности $\Delta(x)$ следует знакоопределенность функции f_2. Пусть знакоопределенна функция f_{r+1} и хотя бы одна из величин $x^{r+2}, \ldots, x^n$ отлична от нуля. Тогда функция

$$f_{r+1}[\psi_{r+1}^{r+1}(x^{r+2}, \ldots, x^n), x^{r+2}, \ldots, x^n] \qquad (1.7)$$

положительна. С учетом тождеств

$$\psi_{r+1}^i(x^{r+2}, \ldots, x^n) \equiv \psi_r{}^i[\psi_{r+1}^{r+1}(x^{r+2}, \ldots, x^n), x^{r+2}, \ldots, x^n], \qquad i = 1, \ldots, r \qquad (1.8)$$

функция (1.7) тождественно равна

$$\Delta[\psi_{r+1}^1(x^{r+2}, \ldots, x^n), \ldots, \psi_{r+1}^r(x^{r+2}, \ldots, x^n), \psi_{r+1}^{r+1}(x^{r+2}, \ldots, x^n), x^{r+2}, \ldots, x^n] = f_{r+2}$$

т. е. f_{r+2} знакоопределенна, как функция аргументов $x^{r+2}, \ldots, x^n$. Теорема доказана.

Сформулированный выше принцип восходит к Вольтерра [2], доказавшего для трёхмерного вектора x и двух интегралов $U_1(x)$ и $U_2(x)$, что все изолированные точки системы уравнений $U_1(x)=0$, $U_2(x)=0$ — положения устойчивого равновесия Функция $\Delta(x)$ — линейная связка первых интегралов, в которой отсутствуют линейные члены. Достаточные условия знакоопределенности этой связки определяют первое условие устойчивости — наиболее узкое, но наиболее удобное для анализа. Самым широким является k-е условие. Оно совпадает с условием устойчивости, вытекающим из теоремы Рауса с дополнением Ляпунова [11, 12]. Заметим, что уравнения (1.1) определяют интегральное многообразие, подобное встречающимся при решении обратных задач динамики [13].

2. Применим изложенный в п. 1 подход для отыскания области устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в прямой постановке на конусе Штауде. Уравнения движения имеют вид

$$dx/dt=Px+\chi(x) \tag{2.1}$$

$$P=\begin{Vmatrix}\omega F & -F\\ Q & H\end{Vmatrix},\quad F=\begin{Vmatrix}0 & \gamma & -\beta\\ -\gamma & 0 & \alpha\\ \beta & -\alpha & 0\end{Vmatrix}$$

$$Q=G\begin{Vmatrix}0 & z_0A^{-1} & -y_0A^{-1}\\ -z_0B^{-1} & 0 & x_0B^{-1}\\ y_0C^{-1} & -x_0C^{-1} & 0\end{Vmatrix}$$

$$H=\omega\begin{Vmatrix}0 & (B-C)\gamma\ A^{-1} & (B-C)\beta\ A^{-1}\\ (C-A)\gamma\ B^{-1} & 0 & (C-A)\alpha\ B^{-1}\\ (A-B)\beta\ C^{-1} & (A-B)\alpha\ C^{-1} & 0\end{Vmatrix}$$

$$\chi^1(x)=x^2x^6-x^5x^3,\quad \chi^2(x)=x^3x^4-x^6x^1$$

$$\chi^3(x)=x^1x^5-x^4x^2,\quad \chi^4(x)=(B-C)A^{-1}x^5x^6$$

$$\chi^5(x)=(C-A)B^{-1}x^4x^6,\quad \chi^6(x)=(A-B)C^{-1}x^4x^5$$

Здесь $A>B>C>0$ — моменты инерции, $x_0>0$, $y_0>0$, $z_0>0$ — координаты центра тяжести; величины α, β, γ, ω определяют фиксированное перманентное вращение. Уравнение (2.1) допускает интегралы

$$U_1(x)=2\alpha x^1+2\beta x^2+2\gamma x^3+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=0 \tag{2.2}$$

$$U_2(x)=A\alpha\omega x^1+B\beta\omega x^2+C\gamma\omega x^3+A\alpha x^4+B\beta x^5+$$
$$+C\gamma x^6+Ax^1x^4+Bx^2x^5+Cx^3x^6=\text{const}$$

$$U_3(x)=2Gx_0x^1+2Gy_0x^2+2Gz_0x^3+2A\alpha\omega x^4+$$
$$+2B\beta\omega x^5+2C\gamma\omega x^6+A(x^4)^2+B(x^5)^2+C(x^6)^2=\text{const}$$

Здесь U_1, U_2 и U_3 — тривиальный первый интеграл, интеграл площадей и интеграл энергии соответственно. Из (1.4) и (2.2) имеем

$$\Delta(x)=2\alpha\beta\omega(B-A)\Delta^\circ(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6)$$

$$\Delta^\circ(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6)=-G\Delta_1^\circ+\Delta_2^\circ$$

$$\Delta_1^\circ=\alpha^{-1}x_0(x^1)^2+\beta^{-1}y_0(x^2)^2+\gamma^{-1}z_0(x^3)^2$$

$$\Delta_2^\circ=A(\omega x^1-x^4)^2+B(\omega x^2-x^5)^2+C(\omega x^3-x^6)^2$$

Первые два условия устойчивости определяются достаточными условиями знакоопределенности функций $\Delta^\circ(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6)$ и $\Delta^\circ[\psi^1_1(x^2,x^3),x^2,x^3,x^4,x^5,x^6]$, где $\psi_1^1(x^2,x^3)$ — результат разрешения уравнения $U_1(x)=0$ относительно x^1. Второе из этих условий, совпадающих с условиями [1], задается неравенствами

$$-(\alpha^{-1}\beta^2x_0+\alpha^2\beta^{-1}y_0)>0 \tag{2.3}$$
$$(\alpha^{-1}\beta^2x_0+\alpha^2\beta^{-1}y_0)\gamma^{-1}z_0+\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^2x_0y_0>0$$

Третье условие дается достаточными условиями знакоопределенности функции

$$\Delta^\circ[\psi_2^1(x^3,x^4,x^5,x^6),\ \psi_2^2(x^3,x^4,x^5,x^6),\ x^3,x^4,x^5,x^6] \tag{2.4}$$

Здесь ψ_2^1 и ψ_2^2 — результат разрешения системы уравнений $U_1(x)=0$, $U_2(x)=0$ относительно x^1, x^2. Используя метод Лагранжа приведения квадратичной формы к сумме квадратов, можно показать, что третье условие устойчивости выделяет на дуге $(x, -y)$ на конусе Штауде более широкое по сравнению с [1] множество устойчивых перманентных вращений.

Заметим, что устойчивость возможна лишь в критическом случае двух пар чисто мнимых корней и двойного нулевого корня [14]. Кратному нулевому корню отвечают некратные элементарные делители матрицы P, так как для уравнения $Pu = 0$ можно указать два линейно-независимых решения.

Примечание. Функция $\Delta(x)$ — квадратичный интеграл для уравнения (2.1), единственный с точностью до постоянного множителя. Для доказательства используется уравнение

$$\sum_{i=1}^{6} [p_{i1}x^1 + \ldots + p_{i6}x^6 + \chi^i(x)] \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0$$

решение которого разыскивается в виде $V = x'Xx$, где $X = \| x_{ij} \|_1^6$ — симметрическая матрица с неопределенными коэффициентами. Для их нахождения используются соотношения $x'X\chi(x) = 0$ и $x'(P'X + XP)x = 0$, приводящие к системе алгебраических уравнений относительно x_{ij} имеющей единственное решение.

Поступила 27 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
2. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitude. Acta math., 1899, vol. 22.
3. *Пожарицкий Г. К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
4. *Рубановский В. Н., Степанов С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функций Ляпунова из интегралов уравнений движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
5. *Кузьмин П. А.* Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. Тр. межвуз. конф. по прикл. теор. устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1964.
6. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами. В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения, вып. 1. М., ВЦ АН СССР, 1975.
7. *Татаринов Я. В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1974, № 6.
8. *Сергеев В. С.* Об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
9. *Бурлакова Л. А., Иртегов В. Д.* Особенности преобразования Лежандра и стационарные движения. Всес. конф. по качественной теории дифференциальных уравнений и методике преподавания теории дифференциальных уравнений в пед. ин-те. Рязань, 1976.
10. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1—2, М., «Наука», 1975.
11. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений, т. 1. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1954.
12. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.
13. *Галиуллин А. С.* Построение уравнений движения. Дифференциальные уравнения, 1977, т. 13, вып. 2.
14. *Вейссенберг А. Н.* Исследование устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Всес. конф. по качественной теории дифференциальных уравнений и методике преподавания теории дифференциальных уравнений в пед. ин-те. Рязань, 1976.