Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕЛ ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ СЖАТИИ

А. Н. Гузь

(Киев)

Исследована устойчивость при всестороннем равномерном сжатии односвязных изотропных сжимаемых упругих тел с произвольной формой упругого потенциала. Привлечена трехмерная линеаризированная теория упругой устойчивости при конечных и малых докритических деформациях. Рассмотрен случай, когда поверхность тела состоит из двух частей, одна из которых жестко защемлена или шарнирно оперта. Доказано, что состояние равновесия будет устойчивым, если на второй части поверхности давление приложено в виде «следящей» нагрузки, и неустойчивым, если на этой части поверхности давление приложено в виде «мертвой» нагрузки. В последнем случае критическая нагрузка для тонкостенных тел приблизительно в два раза меньше эйлеровой силы. Рассмотрены примеры для прямоугольной и круговой пластины, а также для стержня кругового поперечного сечения в случае материалов с различными формами упругого потенциала.

После публикации работы [1] вопрос об устойчивости изотропных сжимаемых односвязных тел при всестороннем сжатии рассматривался в многочисленных работах с различных позиций трехмерной теории устойчивости при малых и конечных докритических деформациях. Несовпадение результатов по этим теориям объяснялось неточностями теории малых докритических деформаций. В работах [2, 3] получены результаты в общей форме для теорий конечных и малых докритических деформаций, в [2] приведен обзор работ по рассмотренной проблеме.

1. Постановка задачи. Рассмотрим два типа задач теории упругости. К первому типу отнесем задачи с одинаковыми граничными условиями на всей поверхности тела. В этом случае при действии следящих нагрузок в [2] показано, что состояние равновесия будет устойчивым, если выполняются условия

$$\lambda_0 + {}^2/_3\, \mu_0 > 0, \quad \mu_0 > 0$$

Величины λ_0 и μ_0 выражаются [2, 4] через упругий потенциал. Так как приведенные неравенства обеспечивают объяснение экспериментально наблюдаемых явлений, будем считать, что они выполняются всегда, и будем рассматривать их как ограничения на форму упругого потенциала.

Такого рода условия получены также в [5] и в ряде других работ. Особенностью результатов [2] является то обстоятельство, что условия устойчивости получены в общей форме для теорий конечных и малых докритических деформаций, для чего в последнем случае необходимо было использовать при определении следящих нагрузок более точное выражение [2], чем принято обычно [6, 8] в теории малых докритических деформаций. В случае действия мертвых нагрузок в [3] на примерах плоской задачи для

кругового сплошного цилиндра и осесимметричной задачи для сплошного шара показано, что существуют критические нагрузки, не противоречащие приведенным неравенствам.

Ко второму типу отнесем задачи с различными граничными условиями на отдельных частях граничной поверхности тела. В этом случае на примере шарнирно-опертой полосы в [2] показано, что состояние равновесия будет устойчивым, если к боковым поверхностям приложены следящая нагрузка, и неустойчивым, если к боковым поверхностям приложена мертвая нагрузка. В последнем случае вычисленная критическая нагрузка для тонкостенной полосы оказалась значительно меньше эйлеровой силы при осевом сжатии.

Рассмотрим пространственные задачи об устойчивости пластин и цилиндрических тел при всестороннем равномерном сжатии, когда на отдельных частях граничной поверхности заданы различные граничные условия. Тела будем считать сжимаемыми изотропными с произвольной формой упругого потенциала и односвязными, что обеспечивает существование однородного докритического состояния. Будем использовать лагранжевы системы координат, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми (x_1, x_2, x_3), или круговыми цилиндрическими (r, θ, x_3). Величины, относящиеся к докритическому состоянию, будем указывать верхним индексом нуль. Исследование проведем в общей форме для трехмерных линеаризированных теорий упругой устойчивости при конечных и малых докритических деформациях [8, 9].

Согласно [2, 3], линеаризированные уравнения движения при отсутствии возмущений объемных сил для рассматриваемого случая можно представить в следующей форме:

$$(\lambda_0 + 2\mu_0)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu_0\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \rho\mathbf{u}^{\cdot\cdot} = 0 \tag{1.1}$$

Граничные условия в напряжениях на части S_1 поверхности тела можно записать в виде

$$\mathbf{Q}|_{S_1} = \mathbf{P};\ \mathbf{Q} \equiv \mathbf{N}(\lambda_0 + \sigma_0^*)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + (2\mu_0 - \sigma_0^*)(\mathbf{N}\nabla)\,\mathbf{u} + (\mu_0 - \sigma_0^*)\,\mathbf{N} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{N}$ — орт нормали к поверхности тела в недеформированном состоянии, $\mathbf{P}$ — возмущения внешних нагрузок, действующих на S_1.

Граничные условия в перемещениях на части S_2 поверхности тела можно записать в виде

$$\mathbf{u}|_{S_2} = 0 \tag{1.3}$$

В случае действия мертвых нагрузок $\mathbf{P} = 0$, в случае действия следящих нагрузок в [2] получено выражение

$$\mathbf{P} = \sigma_0^*\,[\mathbf{N}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - (\mathbf{N}\nabla)\,u - \mathbf{N} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{u}]\,|_{S_1} \tag{1.4}$$

Выражения для определения величин λ_0, μ_0 и σ_0^* через упругий потенциал приведены в [2, 4] для различных постановок задач.

Общее решение уравнения (1.1) без инерционных членов с учетом результатов [8] для рассматриваемого случая можно представить в форме

$$
(1.5) \qquad u_n = \frac{\partial}{\partial S}\psi - \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_3}\chi, \quad u_S = -\frac{\partial}{\partial n}\psi - \frac{\partial^2}{\partial S \partial x_3}\chi
$$

$$
u_3 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}\left(\Delta - \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi
$$

где ψ и χ соответственно гармоническая и бигармоническая функции.

Выражения (1.5) записаны для цилиндрического тела, ось которого совпадает с осью Ox_3; n и s — нормаль и касательная к контуру поперечного сечения.

Необходимо отметить, что выражение (1.4) для определения следящей нагрузки в случае теории малых докритических деформаций отличается от соответствующих выражений [6–8]. Выражение (1.4) в [2] найдено для теории малых докритических деформаций из соответствующих линеаризированных соотношений, следующих из теории конечных докритических деформаций.

2. Некоторые общие вопросы. Рассмотрим некоторые общие вопросы, относящиеся к рассматриваемому классу трехмерных задач устойчивости.

О применимости метода Эйлера. Рассмотрим вопрос о возможности применения метода Эйлера для исследования устойчивости упругих изотропных тел при всестороннем сжатии, когда граничные условия различны на отдельных частях граничной поверхности (задачи второго типа). Очевидно, этот вопрос не возникает в случае действия мертвых нагрузок. Рассмотрим случай, когда следящая нагрузка задана на части S_1 поверхности тела, ограниченной кривой L. В [10] с применением выражения (1.4) для определения следящей нагрузки показано, что достаточные условия применимости метода Эйлера выполняются, если на кривой L обращается в нуль одна из следующих величин: 1) перемещение, направленное по нормали к поверхности S_1; 2) перемещение, направленное по нормали к кривой L на поверхности S_1.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда поверхность тела состоит из двух частей $S = S_1 + S_2$, причем на поверхности S_1 действует следящая нагрузка, т. е. правые части граничных условий (1.2) имеют вид (1.4). Будем также считать, что поверхности S_1 и S_2 пересекаются по кривой L.

Заметим, что известно два случая, когда можно применять метод Эйлера: первый — когда действует мертвая нагрузка; второй — когда на всей поверхности тела действует следящая нагрузка. Укажем еще два случая применимости метода Эйлера при всестороннем равномерном сжатии, когда следящая нагрузка действует на части S_1 поверхности тела.

Первый – часть S_2 поверхности тела жестко защемлена, т. е. выполняются условия (1.3). Эти условия выполняются также на кривой L, следовательно, выполняются и условия, полученные в [10]. Таким образом, для рассматриваемой задачи метод Эйлера можно применять независимо от формы тела.

Второй — поверхности S_1 и S_2 ортогональны и на части S_2 поверхности тела выполняются условия шарнирного опирания в интегральном смысле, т. е.

$$(2.1) \qquad \mathbf{u}_s = 0, \quad Q_n = 0$$

Здесь $\mathbf{u}_s$ — составляющая вектора перемещений, лежащая в касательной плоскости к S_2, Q_n — составляющая вектора напряжений, направленная по нормали к S_2. В силу ортогональности S_1 и S_2 первое из условий (2.1) обеспечивает выполнение первого условия, полученного в [10].

Заметим, что при условиях (2.1), когда на кривой L нормали к поверхностям S_1 и S_2 совпадают, выполняются также достаточные условия применимости метода Эйлера [10]. В этом случае первое условие (2.1) обеспечивает выполнение второго условия [10], однако этот случай не имеет четкой физической интерпретации.

Необходимо отметить, что в [7] исследован также случай, когда следящая нагрузка в виде равномерного давления задана на части поверхности тела. Однако в [7] для определения следящей нагрузки применялось менее точное по сравнению с (1.4) выражение, поэтому необходимо было применять гипотезу Кирхгофа — Лява. В связи с этим результаты [7] относятся только к теориям устойчивости тонкостенных систем, построенным с привлечением гипотезы Кирхгофа — Лява.

Устойчивость при жестком защемлении части граничной поверхности. Рассмотрим случай, когда часть S_1 поверхности $S = S_1 + S_2$ тела загружена следящей нагрузкой, а часть S_2 жестко защемлена. Тогда на S_1 выполняются условия (1.2) с учетом (1.4), а на S_2 выполняются условия (1.3). В данном случае применим метод Эйлера. Таким образом рассматриваемая задача сводится к уравнению (1.1) без инерционных членов и к граничным условиям (1.2) и (1.3) с учетом (1.4). Задача (1.1) — (1.4) переходит в классическую линейную однородную задачу теории упругости, если в последней заменить λ и μ параметрами λ_0 и μ_0. В этом случае, как известно [5], линейная однородная задача классической теории упругости имеет тривиальное решение, если выполняются указанные выше условия устойчивости; положение равновесия будет устойчивым независимо от формы тела. В случае, когда на S_1 действует мертвая нагрузка, нельзя получить условие устойчивости в виде, не зависящем от формы тела, поскольку граничные условия (1.2) при нулевых правых частях не совпадают с соответствующими однородными граничными условиями линейной теории упругости.

Устойчивость при шарнирном опирании части граничной поверхности. Рассмотрим цилиндр произвольного поперечного сечения, ось которого направлена вдоль Ox_3. Будем считать, что боковая поверхность загружена следящей нагрузкой, а торцы ($x_3 = 0$; $x_3 = l$) шарнирно оперты. В этом случае, согласно (1.2) и (2.1), получим при $x_3 = 0$ и $x_3 = l$ условия

$$(2.2) \qquad u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad (\lambda_0 + \sigma_0^*) \operatorname{div} \mathbf{u} + (2\mu_0 - \sigma_0^*)\partial u_3 / \partial x_3 = 0$$

На боковой поверхности получим граничные условия (1.2) при условии (1.4). В рассматриваемом случае применим метод Эйлера. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к уравнению (1.1) без инерционных членов, к граничным условиям (1.2) при учете (1.4) на боковой поверхности и граничным условиям (2.2) на торцах при $x_3 = 0$ и $x_3 = l$. Задачу (1.1), (1.2), (1.4) и (2.2) путем замены параметров λ и μ на λ_0 и μ_0 нельзя свести к линейной однородной задаче классической теории упругости в силу структуры последнего условия (2.2). В связи с этим представим перемещения в виде

$$u_1 = w_1(x_1, x_2)\sin(\pi m l^{-1} x_3), \quad u_2 = w_2(x_1, x_2)\sin(\pi m l^{-1} x_3) \tag{2.3}$$
$$u_3 = w_3(x_1, x_2)\cos(\pi m l^{-1} x_3)$$

Перемещения (2.3) удовлетворяют условиям шарнирного опирания в виде (2.2), (2.3). Из (1.1), (1.2), (1.4) и (2.3) получаем двумерную однородную задачу относительно $w_i(x_1, x_2)$, совпадающую с соответствующей однородной линейной задачей классической теории упругости при замене параметров λ и μ на λ_0 и μ_0. Последняя задача, как известно, имеет единственное тривиальное решение. Следовательно, рассматриваемое состояние равновесия является устойчивым для цилиндра произвольного поперечного сечения.

В случае действия на S_1 мертвых нагрузок необходимо выполнить исследование с учетом конкретной формы тела.

3. Устойчивость пластин. Рассмотрим устойчивость прямоугольных и круговых пластин при шарнирном опирании, а также в случае жесткого защемления.

Прямоугольные пластины. Рассмотрим прямоугольную пластину ($0 \leqslant x_1 \leqslant a$; $0 \leqslant x_2 \leqslant b$; $-h \leqslant x_3 \leqslant +h$) при всестороннем сжатии, когда она шарнирно оперта при $x_1 = 0$, $x_1 = a$, $x_2 = 0$ и $x_2 = b$, а при $x_3 = \pm h$ загружена мертвой нагрузкой. Согласно (2.1), (1.2) и (2.2), получим граничные условия в виде

$$x_1 = 0; \quad x_1 = a, \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0; \quad (\lambda_0 + \sigma_0^*)\operatorname{div}\mathbf{u} + (2\mu_0 - \sigma_0^*)\partial u_1 / \partial x_1 = 0 \tag{3.1}$$

$$x_2 = 0; \quad x_2 = b, \quad u_1 = 0; \quad u_3 = 0; \quad (\lambda_0 + \sigma_0^*)\operatorname{div}\mathbf{u} + (2\mu_0 - \sigma_0^*)\partial u_2 / \partial x_2 = 0 \tag{3.2}$$

$$x_3 = \pm h, \quad (2\mu_0 - \sigma_0^*)\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0^*)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = 0 \tag{3.3}$$
$$(2\mu_0 - \sigma_0^*)\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + (\mu_0 - \sigma_0^*)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 0$$
$$(\lambda_0 + \sigma_0^*)\operatorname{div}\mathbf{u} + (2\mu_0 - \sigma_0^*)\partial u_3 / \partial x_3 = 0$$

В рассматриваемом случае применим метод Эйлера. Общее решение (1.5) имеет вид

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\chi; \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\chi \tag{3.4}$$
$$u_3 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}\left(\Delta - \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi$$

Гармоническую и бигармоническую функции ψ и χ, удовлетворяющие условиям (3.1) и (3.2), представим для изгибной формы потери устойчивости в виде

$$\psi = A\,\mathrm{sh}\,\gamma x_3 \cos(\pi m a^{-1} x_1)\cos(\pi n b^{-1} x_2) \tag{3.5}$$
$$\gamma^2 = (\pi m / a)^2 + (\pi n / b)^2$$
$$\chi = (B\,\mathrm{ch}\,\gamma x_3 + C\gamma x_3\,\mathrm{sh}\,\gamma x_3)\sin(\pi m a^{-1} x_1)\sin(\pi n b^{-1} x_2)$$

Для потери устойчивости с образованием шейки функции ψ и χ, удовлетворяющие условиям (3.1) и (3.2), представим в следующей форме:

$$\psi = A \operatorname{ch} \gamma x_3 \cos (\pi m a^{-1} x_1) \cos (\pi n b^{-1} x_2) \tag{3.6}$$
$$\chi = (B \operatorname{sh} \gamma x_3 + C\gamma x_3 \operatorname{ch} \gamma x_3) \sin (\pi m a^{-1} x_1) \sin (\pi n b^{-1} x_2)$$

Из (3.3) и (3.5) получим характеристическое уравнение в виде

$$\det \| \alpha_{ij} \| = 0 \quad (i,\ j = 1, 2, 3) \tag{3.7}$$
$$\alpha_{11} = -\mu_0 \pi n b^{-1} \gamma \operatorname{ch} \gamma h, \quad \alpha_{12} = -\mu_0 \pi m a^{-1} \gamma^2 (2\mu_0 - \sigma_0^*) \operatorname{ch} \gamma h$$
$$\alpha_{13} = -\pi m a^{-1} \gamma^2 \left[(2\mu_0 - \sigma_0^*) \gamma h \operatorname{sh} \gamma h + 2\mu_0 \frac{\lambda_0 + \sigma_0^*}{\lambda_0 + \mu_0} \operatorname{ch} \gamma h \right]$$
$$\alpha_{21} = -\alpha_{11} m n^{-1} a^{-1} b; \quad \alpha_{22} = \alpha_{12} n m^{-1} b^{-1} a; \quad \alpha_{23} = \alpha_{13} n m^{-1} b^{-1} a$$
$$\alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{32} = -(2\mu_0 - \sigma_0^*) \gamma^3 \operatorname{sh} \gamma h; \quad \alpha_{33} = -(2\mu_0 - \sigma_0^*) \times$$
$$\times \gamma^3 \gamma h \operatorname{ch} \gamma h + \frac{2\mu_0^2 + \sigma_0^* (\lambda_0 + \mu_0)}{\lambda_0 + \mu_0} \gamma^3 \operatorname{sh} \gamma h$$

Из (3.7) найдем

$$\det \| \alpha_{ij} \| = -\gamma^8 \mu_0 (2\mu_0 - \sigma_0^*)^2 \gamma h \times \tag{3.8}$$
$$\times \left\{ 1 - \frac{2(\lambda_0 + \mu_0)\mu_0 + \sigma_0^* (\lambda_0 + 3\mu_0)}{(\lambda_0 + \mu_0)(2\mu_0 - \sigma_0^*)} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h} \right\}$$

Из (1.2) и (1.4) следует, что граничные условия в случае следящей нагрузки формально получаются из граничных условий при мертвой нагрузке (условия (1.2) при $\mathbf{P} = 0$), если в последних положить $\sigma_0^* = 0$. В этом случае из (3.8) получаем

$$\det \| \alpha_{ij} \| = -4\gamma^8 \mu_0^3 \gamma h \,[1 - \operatorname{sh} 2\gamma h \,/\, 2\gamma h] \tag{3.9}$$

Поскольку $\operatorname{sh} 2\gamma h > 2\gamma h$, то из (3.9) получим $\det \| \alpha_{ij} \| < 0$. Следовательно, в случае действия следящей нагрузки состояние равновесия является устойчивым. Полученный вывод иллюстрирует общий результат п. 2, полученный для тела произвольной формы.

Для мертвой нагрузки из (3.8) получим характеристическое уравнение, корни которого имеют физический смысл, в виде

$$1 - \frac{2\mu_0 (\lambda_0 + \mu_0) + \sigma_0^* (\lambda_0 + 3\mu_0)}{(\lambda_0 + \mu_0)(2\mu_0 - \sigma_0^*)} \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h} = 0 \tag{3.10}$$

Необходимо отметить, что уравнение (3.10) совпадает по форме с соответствующим уравнением [2] для полосы, однако в рассматриваемом случае величины λ_0, μ_0, и σ_0^* выражаются через упругий потенциал при помощи соотношений для пространственной задачи. Заметим, что в случае потери устойчивости с образованием шейки также получим уравнение в виде (3.10).

Круговые пластины. Рассмотрим круговую пластину ($0 \leqslant r \leqslant R$; $-h \leqslant x_3 \leqslant +h$) при всестороннем сжатии, когда она жестко защемлена при $r = R$, а при $x_3 = \pm h$ загружена мертвой нагрузкой. Условия жесткого защемления при $r = R$ поставим для осесимметричной задачи в интегральном смысле в следующем виде:

$$u_r = 0, \quad \partial u_3 \,/\, \partial r = 0 \tag{3.11}$$

В дальнейшем ограничимся исследованием только осесимметричной формы пластины. В этом случае, согласно (1.2), получим при $x_3 = \pm h$ граничные условия

$$(3.12)\qquad (2\mu_0 - \sigma_0^*)\partial u_r / \partial x_3 + (\mu_0 - \sigma_0^*)(\partial u_3 / \partial r - \partial u_r / \partial x_3) = 0$$
$$(\lambda_0 + \sigma_0^*)(\partial u_r / \partial r + u_r / r + \partial u_3 / \partial x_3) + (2\mu_0 - \sigma_0^*)\partial u_3 / \partial x_3 = 0$$

В рассматриваемом случае граничных условий также применим метод Эйлера. Воспользуемся представлением (1.5) решения уравнений (1.1) без инерционных членов. Для осесимметричной задачи из (1.5) получаем представление

$$(3.13)\qquad u_r = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3}\chi, \quad u_\theta = 0$$
$$u_3 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi$$

Здесь χ — бигармоническая функция. Бигармоническую функцию, удовлетворяющую условиям (3.11), выберем в случае изгибной формы потери устойчивости в виде

$$(3.14)\qquad \chi = (A \operatorname{ch} \gamma x_3 + B\gamma x_3 \operatorname{sh} \gamma x_3) J_0(\gamma r), \quad \gamma = \varkappa_k / R, \quad J_0'(\varkappa_k) = 0$$

а в случае потери устойчивости с образованием шейки в виде

$$(3.15)\qquad \chi = (A \operatorname{sh} \gamma x_3 + B\gamma x_3 \operatorname{ch} \gamma x_3) J_0(\gamma r)$$

Здесь $J_0(\gamma r)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Рассмотрим вначале изгибную форму потери устойчивости. Из (3.14) и (3.12) получим характеристическое уравнение в виде (3.7) при $i, j = 1, 2$. Элементы характеристического определителя имеют вид

$$(3.16)\qquad \alpha_{11} = -\gamma^3(2\mu_0 - \sigma_0^*) \operatorname{ch} \gamma h, \quad \alpha_{12} = -\gamma^3[(2\mu_0 - \sigma_0^*)\gamma h \operatorname{sh} \gamma h + 2\mu_0(\lambda_0 + \sigma_0^*)(\lambda_0 + \mu_0)^{-1} \operatorname{ch} \gamma h], \quad \alpha_{21} = -\gamma^3 (2\mu_0 - \sigma_0^*) \operatorname{sh} \gamma h$$
$$\alpha_{22} = -\gamma^3[(2\mu_0 - \sigma_0^*)\gamma h \operatorname{ch} \gamma h - [2\mu_0^2 + \sigma_0^*(\lambda_0 + \mu_0)] \times (\lambda_0 + \mu_0)^{-1} \operatorname{sh} \gamma h]$$

Из (3.7) и (3.16) получим следующее выражение:

$$(3.17)\qquad \det \| \alpha_{ij} \| = \gamma^6 (2\mu_0 - \sigma_0^*)^2 \gamma h \times \left[1 - \frac{2(\lambda_0 + \mu_0)\mu_0 + \sigma_0^*(\lambda_0 + 3\mu_0)}{(\lambda_0 + \mu_0)(2\mu_0 - \sigma_0^*)} \frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right]$$

Необходимо отметить, что решение (3.15) в случае потери устойчивости с образованием шейки можно получить из решения (3.14) в случае изгибной формы потери устойчивости, если в последнем поменять местами sh и ch, что позволяет получить из (3.17) характеристическое уравнение для потери устойчивости с образованием шейки. Поскольку эти функции входят в (3.17) симметрично, выражение (3.17) относится к двум рассматриваемым случаям.

Полагая в (3.17) $\sigma_0^* = 0$, получим характеристический определитель для следящей нагрузки в виде

$$(3.18)\qquad \det \| \alpha_{ij} \| = \gamma^6 4\mu_0^2 \gamma h (1 - \operatorname{sh} 2\gamma h / 2\gamma h))$$

По аналогии с прямоугольной пластиной найдем, что при действии следящей нагрузки состояние равновесия является устойчивым. Полученный вывод иллюстрирует общий результат п. 2, полученный для тела произвольной формы.

Для случая мертвой нагрузки из (3.17) получим уравнение в виде (3.10), корни которого имеют физический смысл.

Рассмотрим теперь примеры для тел с упругими потенциалами конкретной формы.

Пример 1. В рамках второго варианта теории малых докритических деформаций рассмотрим пример тела с упругим потенциалом в виде

$$\Phi^\circ = {}^1/_2\lambda A_1^{\circ 2} + \mu A_2^\circ \tag{3.19}$$

Потенциал (3.19) соответствует линейно-упругому телу, где λ и μ — постоянные Ляме. Из (3.19) и [2] получим

$$\lambda_0 = \lambda - \sigma_0, \quad \mu_0 = \mu + \sigma_0 \tag{3.20}$$

Из (3.20) и (3.10) аналогично [2] определим два корня

$$p_{1,2} = G \pm [G^2 - \mu(\lambda + \mu)(1 - 2\gamma h/\operatorname{sh} 2\gamma h)]^{1/2} \tag{3.21}$$
$$G = {}^1/_4 [3\lambda + 5\mu - 2\gamma h(\lambda + \mu)/\operatorname{sh} 2\gamma h]$$

Здесь $p = -\sigma_0$ — интенсивность сжимающей нагрузки. Для длинноволновой формы потери устойчивости (для тонкостенных пластин) из (3.21) найдем

$$p_c \approx \frac{1}{2} p_e \left[1 - (\gamma h)^2 \frac{14 - 23\nu + 14\nu^2}{30(1-\nu)^2}\right], \quad p_e = \frac{1}{3}(\gamma h)^2 \frac{E}{1-\nu^2}$$

Здесь p_c — критическая нагрузка, p_e — значение критической нагрузки, вычисленной с привлечением гипотезы Кирхгофа — Лява, при сжатии пластины в ее плоскости равномерно распределенной нагрузкой (эйлерова сила); для прямоугольной пластины $\gamma_1^2 = \pi^2(a^{-2} + b^{-2})$, для круговой пластины $\gamma_1 = \varkappa_1 R^{-1}$.

Пример 2. В рамках теории конечных докритических деформаций рассмотрим пример для тела с потенциалом гармонического типа [11]

$$\Phi^\circ = {}^1/_2\lambda S_1^{\circ 2} + \mu S_2^\circ, \quad S_1^\circ = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1) \tag{3.22}$$
$$S_2^\circ = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2$$

Здесь λ_i — коэффициенты удлинения вдоль главных осей. Из (3.22) и [4] получим

$$\lambda_0 = \lambda - (3\lambda + 2\mu)(\lambda_1 - 1)/\lambda_1, \quad \mu_0 = [2\mu + (3\lambda + 4\mu)(\lambda_1 - 1)]/(2\lambda_1) \tag{3.23}$$
$$\sigma_0^* = (3\lambda + 2\mu)(\lambda_1 - 1)/\lambda_1$$

Из (3.23) и (3.10) найдем два корня

$$(\lambda_1)_1 = 0, \quad (\lambda_1)_2 = \left[(3\lambda + 2\mu)\,2(\lambda + 2\mu)\frac{\operatorname{sh} 2\gamma n}{2\gamma h}\right] \times$$
$$\times \left[\mu\lambda + (6\lambda^2 + 8\mu^2 + 15\lambda\mu)\frac{\operatorname{sh} 2\gamma h}{2\gamma h}\right]^{-1}$$

Первый корень не имеет физического смысла. В случае длинноволновой формы потери устойчивости из второго выражения получим

$$\lambda_1 = (\lambda_1)_c \approx 1 - {}^2/_3(\gamma_1 h)^2 \mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}(3\lambda + 2\mu)^{-1}$$

Следовательно, при действии мертвой нагрузки возможна потеря устойчивости.

4. Устойчивость кругового цилиндра. Рассмотрим устойчивость кругового цилиндра ($0 \leqslant r \leqslant R$; $0 \leqslant x_3 \leqslant l$) при всестороннем сжатии, когда он при $x_3 = 0$ и $x_3 = l$ шарнирно оперт, а при $r = R$ загружен мертвой нагрузкой. Условия шарнирного опирания будем понимать в интегральном смысле. Граничные условия при $x_3 = 0$ и $x_3 = l$ имеют вид (2.2), а при $r = R$ — вид (1.2) при $\mathbf{P} = 0$. В рассматриваемом случае применим метод Эйлера. Из (1.5) получим общее решение в следующей форме:

$$(4.1)\qquad u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\psi - \frac{\partial^2}{\partial r\partial x_3}\chi, \quad u_\theta = -\frac{\partial}{\partial r}\psi - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_3}\chi$$

$$u_3 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}\left(\Delta - \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\chi$$

Выберем функции ψ и χ, удовлетворяющие условиям (2.2), в виде

$$(4.2)\qquad \psi = \sin(\pi m l^{-1} x_3)\, A I_n(m\pi l^{-1} r)\sin n\theta$$

$$\chi = \cos\pi\frac{m}{l}x_3\left[B I_n\left(m\frac{\pi}{l}r\right) + Cm\frac{\pi}{l} r I_{n+1}\left(m\frac{\pi}{l}r\right)\right]\cos n\theta$$

Из (4.2), (4.1) и (1.2) найдем характеристический определитель

$$(4.3)\qquad \delta = (2\mu_0 - \sigma_0^*)R^{-7} m^3\alpha^3 \det\|\alpha_{ij}\| \quad (i,\ j = 1, 2, 3), \quad \alpha = \pi R / l$$

$$\alpha_{11} = n(2\mu_0 - \sigma_0^*)[m\alpha I_n'(m\alpha) - I_n(m\alpha)]$$

$$\alpha_{12} = m^2\alpha^2 I_n''(m\alpha)$$

$$\alpha_{13} = -2\mu_0\frac{\lambda_0 + \sigma_0^*}{\lambda_0 + \mu_0} I_n(m\alpha) + (2\mu_0 - \sigma_0^*)\times$$

$$\times[m\alpha I_{n+1}''(m\alpha) + 2I_{n+1}'(m\alpha)]$$

$$\alpha_{21} = -m^2\alpha^2(2\mu_0 - \sigma_0^*)I_n''(m\alpha) + (\mu_0 - \sigma_0^*)m^2\alpha^2 I_n(m\alpha)$$

$$\alpha_{22} = n[-m\alpha I_n'(m\alpha) + I_n(m\alpha)], \quad \alpha_{23} = -n(2\mu_0 - \sigma_0^*)I_{n+1}'(m\alpha)$$

$$\alpha_{31} = m\alpha n(\mu_0 - \sigma_0^*)I_n(m\alpha), \quad \alpha_{32} = m^2\alpha^2 I'_n(m\alpha)$$

$$\alpha_{33} = 2\mu\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} I'_n(m\alpha) + (2\mu_0 - \sigma_0^*)[I_{n+1}(m\alpha) + m\alpha I_{n+1}'(m\alpha)]$$

Рассмотрим стержневую форму потери устойчивости, когда $n = m = 1$) Для длинноволновой формы потери устойчивости (длинный стержень) $\alpha < 1$. В этом случае получим [4] характеристический определитель с точностью до двух членов в виде

$$(4.4)\qquad \delta = \frac{2\mu_0 - \sigma_0^*}{\lambda_0 + \mu_0}\frac{\alpha^9}{16R^7}\Big\{[\mu_0(\lambda_0 + \sigma_0^*)(\mu_0 + 2\sigma_0^*) + \mu_0(\mu_0 + \sigma_0^*)\times$$

$$\times(\lambda_0 + 2\mu_0) - (\lambda_0 + \sigma_0^*)(\lambda_0 + \mu_0)(2\mu_0 - \sigma_0^*)] + \frac{\alpha^2}{24}[2\mu_0(\lambda_0 + \sigma_0^*)\times$$

$$\times(12\mu_0 + 11\sigma_0^*) + 2\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)(9\mu_0 + 7\sigma_0^*) -$$

$$-(2\mu_0 - \sigma_0^*)(\lambda_0 + \mu_0)(12\mu_0 + 9\sigma_0^*)]\Big\}$$

Рассмотрим примеры для упругих тел с потенциалами конкретной формы.

Пример 1. В рамках второго варианта теории малых докритических деформаций рассмотрим пример для тела с упругим потенциалом в виде (3.19). В этом случае из (3.19) (3.20) и (4.4) получаем

$$(4.5)\qquad p_c \approx {}^1/_2 p_e, \quad p_e = {}^1/_4\alpha^2\mu\,(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$$

Здесь p_e — эйлерова сила при осевом сжатии стержня кругового поперечного сечения.

Пример 2. В рамках теории конечных докритических деформаций рассмотрим пример для тела с потенциалом гармонического типа (3.22.) В этом случае имеют место соотношения (3.23). Из (3.22), (3.23) и (4.4) для длинноволновой формы потери устойчивости получаем

(.6) $(\lambda_1)_c \approx 1 - {}^1/_8\alpha^2\mu \,/\, (\lambda + \mu)$

Обозначим через p^* интенсивность сжимающей нагрузки на единицу площади в момент потери устойчивости. Из [2] следует

(4.7) $p^* = -\sigma_0{}^*\lambda_1{}^{-1}$

Из третьего выражения (3.23), (4.6) и (4.7) получим

(4.8) $p_c{}^* \approx {}^1/_2 p_e$

Выражения (4.8) и (4.5) совпадают. Таким образом, если измерять критическую нагрузку на единицу площади в момент потери устойчивости, то результаты, полученные по теории конечных докритических деформаций и по второму варианту теории малых докритических деформаций, в случае длинноволновой формы потери устойчивости (для длинного стержня) совпадают. Аналогичные результаты получаются для полосы и пластин.

Полученные результаты дают возможность сделать общий вывод, относящийся к проблеме устойчивости при всестороннем равномерном сжатии односвязных изотропных сжимаемых тел, на одной части S_2 поверхности $S = S_1 + S_2$ которых заданы условия шарнирного опирания или жесткого защемления. Этот вывод заключается в том, что состояние равновесия будет устойчивым, если на части S_1 поверхности тела давление приложено в виде следящей нагрузки, и неустойчивым, если на части S_1 поверхности тела давление приложено в виде мертвой нагрузки. В последнем случае критическая нагрузка для тонкостенных тел в два раза меньше эйлеровой силы при сжатии.

Поступила 25 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 2.
2. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Прикл. механ., 1976, т. 12, вып. 6.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии «мертвой» нагрузкой. Прикл. механ., 1976, т. 12 вып. 12.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость сжимаемых цилиндров при всестороннем сжатии. Докл. АН УССР, Сер. А, 1977, № 12.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
6. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.— М., Гостехиздат, 1948.
7. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
8. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
9. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев, «Наукова думка», 1973.
10. *Гузь А. Н.* Достаточные условия применения метода Эйлера для случая «следящей» нагрузки, заданной на части поверхности тела. Докл. АН УССР. Сер. А., 1977, № 10.
11. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. Commun. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, No. 2, p. 239—296.