

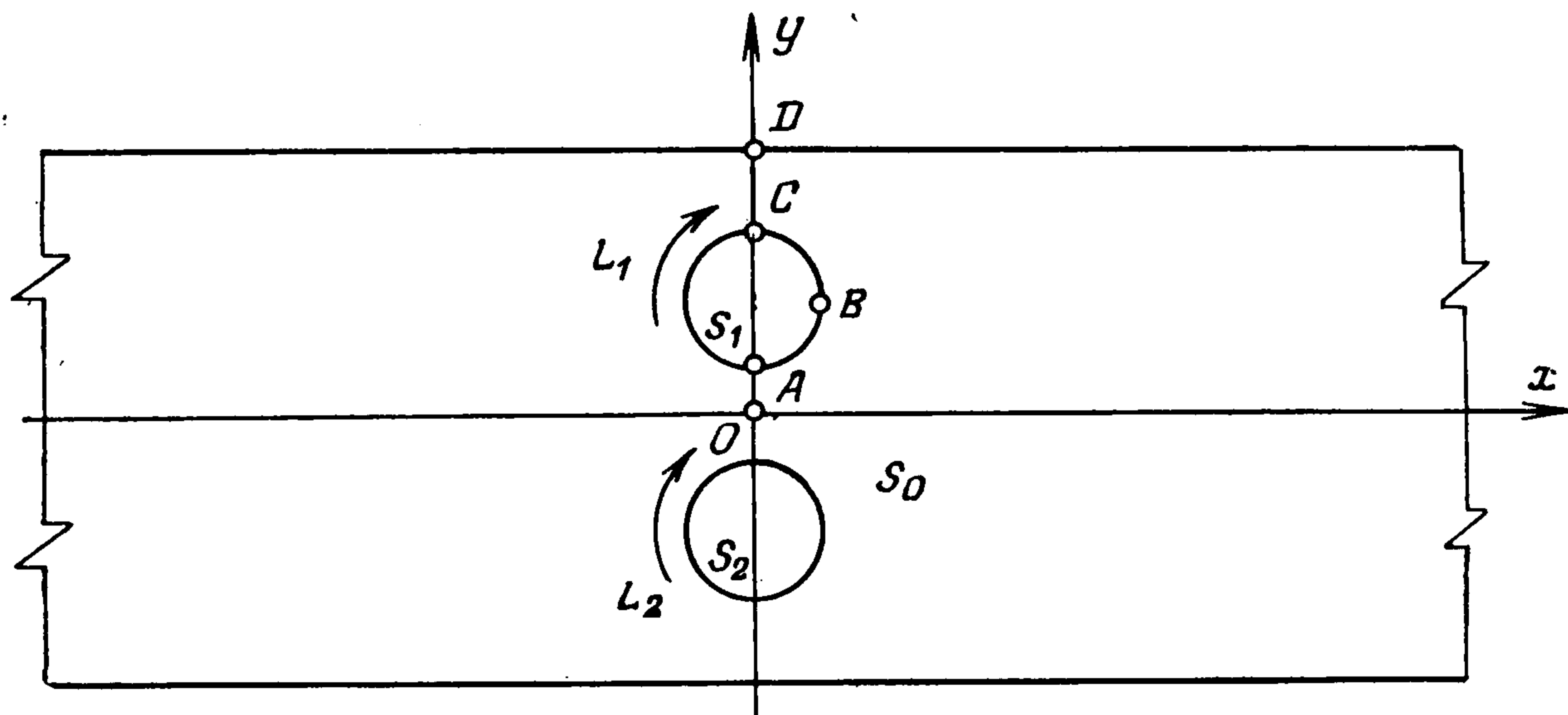
**О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОСЫ,
ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ КРУГОВЫМИ
ОТВЕРСТИЯМИ, РАСПОЛОЖЕННЫМИ В ПОПЕРЕЧНОМ
НАПРАВЛЕНИИ**

Н. И. Мироненко

(Алма-Ата)

Для решения поставленной задачи применен метод Д. И. Шермана [1], позволяющий свести рассматриваемую задачу к вспомогательной задаче для сплошной полосы, решение которой получено при помощи преобразования Фурье. На последнем этапе решение задачи сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оказывающейся при любой близости границ по меньшей мере квазирегулярной. Приводится также численный анализ для трех вариантов нагружения полосы: растяжение в продольном направлении, равномерное растяжение в поперечном направлении и равномерное давление по контурам отверстий.

Рассматривается полоса шириной $2a$, ослабленная двумя отверстиями одинакового радиуса R , симметрично расположенными в поперечном направлении с расстоянием $2c$ между их центрами (фигура). Полоса на-



гружена равномерными растягивающими усилиями T_x и T_y в продольном и поперечном направлениях соответственно. Через S_0 обозначена трехсвязная область полосы, через S_1 и S_2 — внутренние области окружностей L_1 и L_2 . Область сплошной полосы $S = S_0 + S_1 + S_2$.

Искомые напряжения удобно представить в таком виде:

$$X_x^{(1)} = T_x + X_x, \quad Y_y^{(1)} = T_y + Y_y, \quad X_y^{(1)} = X_y$$

где X_x , Y_y и X_y — результат возмущения, вносимого отверстиями. Потенциалы Колосова — Мусхелишвили, соответствующие напряжениям X_x , Y_y и X_y , обозначим через $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$. Граничные условия на про-

дольных гранях для дополнительных напряжений X_x , Y_y и X_y очевидны, а на окружностях L_j ($j = 1, 2$) имеют вид

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 2h_1(t - b_j) + \frac{2h_2R^2}{t - b_j} + 2C_j$$

$$(h_1 = -(T_x + T_y)/4, h_2 = (T_x - T_y)/4, b_1 = -b_2 = ic)$$

где C_j — постоянная, не влияющая на напряженное состояние. Следуя [1], введем новую неизвестную функцию

$$2\omega(t) = \varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} \text{ на } L_j, \quad j = 1, 2$$

что дает возможность построить функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические в области S , т. е. в сплошной полосе. В области S_0 эти функции определяются формулами

$$(1) \quad \begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_1(z) - \sum_{j=1}^2 \left(\varphi_j^*(z) + \frac{h_2R^2}{z - b_j} \right) \\ \psi(z) &= \psi_1(z) - \sum_{j=1}^2 \left[\psi_j^*(z) + h_2R \sum_{k=2}^3 \lambda_{jk} \left(\frac{R}{z - b_j} \right)^k \right] \\ \varphi_j^*(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\omega(t) dt}{t - z} \\ \psi_j^*(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\overline{\omega(t)} + t\overline{\omega'(t)}}{t - z} dt \\ \lambda_{j2} &= -b_j/R, \quad \lambda_{j3} = 1 \end{aligned}$$

Интегралы в этих и последующих формулах вычисляются в направлении движения часовой стрелки.

Представим функции $\varphi_j^*(z)$ и $\psi_j^*(z)$ для z , лежащих вне L_j , в виде рядов

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi_j^*(z) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kj} \left(\frac{R}{z - b_j} \right)^{k+1}, \quad \psi_j^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj}^{(1)} \left(\frac{R}{z - b_j} \right)^{k+1} \\ \beta_{0j}^{(1)} &= -\beta_{0j} - \bar{\beta}_{0j} \\ \beta_{kj}^{(1)} &= -\bar{\beta}_{kj} + k \frac{b_j}{R} \alpha_{k-1,j} - (k-1) \alpha_{k-2,j}, \quad k \geq 1 \\ \alpha_{kj} &= \frac{1}{2\pi i R^{k+1}} \int_{L_j} \omega(t) (t - b_j)^k dt, \quad \beta_{kj} = \frac{1}{2\pi i R^{k+1}} \int_{L_j} \overline{\omega(t)} (t - b_j)^k dt \end{aligned}$$

Учитывая, что α_{kj} и β_{kj} — коэффициенты Фурье функции $\omega(t)$ на L_1 и L_2 и принимая во внимание симметричность напряженного состояния относительно обеих осей, имеем: $\alpha_{k2} = \bar{\alpha}_{k1}$, $\beta_{k2} = \bar{\beta}_{k1}$; при $k = 0, 2, 4, \dots$ α_{kj} и β_{kj} — действительные величины, а при $k = 1, 3, 5, \dots$ — чисто мнимые. Из формул (1), (2) следуют выражения для искомых потенциалов $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ через функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (этим функциям соответствует

некоторое напряженное состояние $X_x^{(2)}, Y_y^{(2)}, X_y^{(2)}$

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_1(z) &= \varphi(z) - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kj}^{**} \left(\frac{R}{z-b_j} \right)^{k+1} \\ \psi_1(z) &= \psi(z) - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj}^{(2)} \left(\frac{R}{z-b_j} \right)^{k+1} \\ \alpha_{0j}^{**} &= \alpha_{0j} - h_2 R, \quad \beta_{0j}^{**} = 2\beta_{0j}; \quad \alpha_{kj}^{**} = \alpha_{kj}, \quad \beta_{kj}^{**} = \beta_{kj}, \quad k \geq 1 \\ \beta_{0j}^{(2)} &= \beta_{0j}^{**}, \quad \beta_{kj}^{(2)} = \bar{\beta}_{kj}^{**} - k \frac{b_j}{R} \alpha_{k-1,j}^{**} + (k-1) \alpha_{k-2,j}^{**}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Учитывая сказанное выше, положим (α_{kj}^* и β_{kj}^* — действительные величины)

$$\begin{aligned} \alpha_{kj}^{**} &= \alpha_{kj}^*, \quad \beta_{kj}^{**} = \beta_{kj}^*, \quad k = 0, 2, 4, \dots \\ \alpha_{kj}^{**} &= i\alpha_{kj}^*, \quad \beta_{kj}^{**} = i\beta_{kj}^*, \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Используя зависимости (3), можно [1-3] свести решение поставленной задачи к решению промежуточной задачи для области S . Граничные условия последней задачи таковы:

$$(4) \quad \begin{aligned} Y_k^{(2)} - iX_y^{(2)} &= - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{R} \left\{ \alpha_{kj}^{**} \left(\frac{R}{t-b_j} \right)^{k+2} + \gamma_{kj}^{**} \left(\frac{R}{t-b_j} \right)^{k+2} - \right. \\ &\quad \left. - (k+2) \bar{\alpha}_{kj}^{**} \frac{t}{R} \left(\frac{R}{t-b_j} \right)^{k+3} \right\}, \quad t = x \pm ia \end{aligned}$$

$$\gamma_{0j}^{**} = \bar{\alpha}_{0j}^{**} + \beta_{0j}^{**}, \quad \gamma_{kj}^{**} = \bar{\alpha}_{kj}^{**} + k \frac{b_j}{R} \bar{\alpha}_{k-1,j}^{**} + (k-1) \bar{\alpha}_{k-2,j}^{**} + \beta_{kj}^{**}, \quad k \geq 1$$

Решение, полученное методом интегрального преобразования Фурье, выглядит так:

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi(z) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\mu) e^{-iz\mu/a} \frac{d\mu}{\mu} \\ \psi(z) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 - iz \frac{\mu}{a} \right) H_1(\mu) + 2H_2(\mu) \right] e^{-iz\mu/a} \frac{d\mu}{\mu} \\ H_1(\mu) &= \sum_{j=0}^{\infty} T_j(\mu) \{ [a_j(\mu) + 2\gamma(\mu)] \Gamma_{1,j}(\mu) + 2\varepsilon_2 \mu \Gamma_{3,j}(\mu) \} \alpha_j^* - \Gamma_{2,j}(\mu) \beta_j^* \} \\ H_2(\mu) &= \sum_{j=0}^{\infty} T_j(\mu) \{ [(2\mu^2 - a_j(\mu)b(\mu)) \Gamma_{1,j}(\mu) - 2\varepsilon_2 \mu b(\mu) \Gamma_{3,j}(\mu)] \alpha_j^* + \\ &\quad + b(\mu) \Gamma_{2,j}(\mu) \beta_j^* \}, \quad T_j(\mu) = \frac{e_1^{j+1}}{j!} \frac{\mu^{j+1}}{2\mu + \text{sh } 2\mu} \\ \left. \begin{aligned} \Gamma_{1,j}(\mu) \\ \Gamma_{2,j}(\mu) \end{aligned} \right\} &= \cos j \frac{\pi}{2} \text{ch } \varepsilon_2 \mu \pm \sin j \frac{\pi}{2} \text{sh } \varepsilon_2 \mu, \quad \alpha_j(\mu) = j + \frac{(\varepsilon_1 \mu)^2}{j+2} \\ \Gamma_{3,j}(\mu) &= \sin j \frac{\pi}{2} \text{ch } \varepsilon_2 \mu + \cos j \frac{\pi}{2} \text{sh } \varepsilon_2 \mu, \quad b(\mu) = 1 - \gamma(\mu) \\ 2\gamma(\mu) &= 1 - 2\mu + e^{-2\mu}, \quad \varepsilon_1 = R/a, \quad \varepsilon_2 = c/a \end{aligned}$$

Следует отметить, что $H_1(\mu)$ и $H_2(\mu)$ — симметричные функции, здесь же даны их выражения для $\mu > 0$.

Единственными неизвестными теперь являются $\alpha_j^* \equiv \alpha_{j_1}^*$ и $\beta_j^* \equiv \beta_{j_1}^*$. Для их определения нужна бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Последнюю можно построить, например, получив предварительно [1] интегральное уравнение (для $\omega(t)$) с вырожденным ядром

$$(6) \quad \omega(t) = \varphi(t) - \overline{t\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\Omega_k^{(1)} \left(\frac{t-b_1}{R} \right)^k + \Omega_k^{(2)} \left(\frac{R}{t-b_1} \right)^k \right] + \\ + \alpha_{-1,1} \text{ на } L_1 \\ \Omega_1^{(1)} = \frac{\beta_0^*}{2}, \quad \Omega_k^{(1)} = (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\alpha}_{n,1}^{**} C_{n+k}^k \left(\frac{\varepsilon_3}{2i} \right)^{n+k+1}, \quad k \neq 1 \\ \Omega_k^{(2)} = \delta_k h_2 R + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\varepsilon_3}{2i} \right)^{n+k+1} \left\{ (n+1) \alpha_{n,1}^{**} \left[C_{n+k+1}^k - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\varepsilon_3}{2} \right)^2 C_{n+k+3}^{k+1} \right] + \bar{\beta}_{n,1}^{**} C_{n+k}^k \right\} \\ C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad \varepsilon_3 = \frac{R}{c}; \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_k = 0, \quad k \neq 1$$

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются формулами (5).

Решая интегральное уравнение (6), приходим к требуемой системе

$$(7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j = g_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$x_{2j+1} = \alpha_j^*, \quad x_{2j+2} = \beta_j^*; \quad g_1 = -2h_2 R, \quad g_2 = -h_1 R, \quad g_k = 0, \quad k \geq 3$$

Коэффициенты a_{kj} запишем так ($\delta_{i,j}$ — символ Кронекера):

$$(8) \quad a_{2m+1, 2n+1} = \delta_{2m+1, 2n+1} - \int_0^{\infty} T_{mn}(\mu) \{ \Gamma_{mn}^{11}(\mu) [4\mu^2 + 2\gamma(\mu)(2 + a_m(\mu) + \\ + a_n(\mu)) + a_m(\mu)a_n(\mu)] + 2\varepsilon_2\mu [f_m(\mu)\Gamma_{mn}^{13}(\mu) + f_n(\mu)\Gamma_{mn}^{31}(\mu)] + \\ + 4\varepsilon_2^2\mu^2\Gamma_{mn}^{33}(\mu) \} d\mu + (n+1)\varepsilon_{mn}K(m, n) \left[C_{m+n+2}^{m+1} - \left(\frac{\varepsilon_3}{2} \right)^2 C_{m+n+4}^{m+2} \right]$$

$$a_{2m+2, 2n+2} = \delta_{n+1}^{(1)}\delta_{2m+2, 2n+2} - \int_0^{\infty} T_{mn}(\mu) \Gamma_{mn}^{22}(\mu) d\mu$$

$$a_{2m+1, 2n+2} = \int_0^{\infty} T_{mn}(\mu) [f_m(\mu)\Gamma_{mn}^{12}(\mu) + 2\varepsilon_2\mu\Gamma_{mn}^{32}(\mu)] d\mu + \tau_{mn}K(m, -n)$$

$$a_{2m+2, 2n+1} = \int_0^{\infty} T_{mn}(\mu) [f_n(\mu)\Gamma_{mn}^{21}(\mu) + 2\varepsilon_2\mu\Gamma_{mn}^{23}(\mu)] d\mu + \tau_{mn}K(-m, n)$$

$$T_{mn}(\mu) = \frac{2\varepsilon_1^{m+n+2}}{(m+1)!n!} \frac{\mu^{m+n+1}}{2\mu + \text{sh } 2\mu}$$

$$K(m, n) = \cos(m-n) \frac{\pi}{2} - \sin(m+n) \frac{\pi}{2}$$

$$\Gamma_{mn}^{ij}(\mu) = \Gamma_{i,m}(\mu)\Gamma_{j,n}(\mu), \quad \varepsilon_{mn} = (\varepsilon_3/2)^{m+n+2}$$

$$f_j(\mu) = 2\gamma(\mu) + a_j(\mu), \quad \tau_{mn} = \varepsilon_{mn} C_{m+n+1}^{m+1}$$

$$\delta_1^{(1)} = 1/2, \quad \delta_k^{(1)} = 1, \quad k \geq 2; \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Из выражений (8) следуют зависимости, существенно сокращающие вычислительную работу

$$\frac{a_{\alpha, \beta}}{a_{\beta, \alpha}} = \frac{n+1}{m+1}; \quad \alpha = 2m+1, \quad 2m+2; \quad \beta = 2n+1, \quad 2n+2$$

Анализ выражений (8) показывает, что система (7) по меньшей мере квазирегулярна при любой близости границ. Решением системы (7) и последующим вычислением напряжений по известным формулам [4] заканчивается изучение поставленной задачи.

Численный анализ, часть результатов которого дана ниже, проведен для $\varepsilon_1 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45$ и $\varepsilon_2 = (1 + \varepsilon_1) / 3$ (в этом случае все три перемычки имеют одинаковую ширину; напомним, что ε_1 и ε_2 — отношения соответственно радиуса отверстий и полурасстояния между их центрами к полуширине полосы). Вычисления выполнены для упомянутых в начале статьи трех случаев загрузки полосы. Бесконечную систему (7) для указанных значений ε_1 усекали соответственно до 14, 18, 26, 34 и 40 уравнений. Граничные условия по продольным граням во всех случаях удовлетворяются практически точно: абсолютная погрешность в худшем случае (при $\varepsilon_1 = 0.45$) имеет порядок 10^{-6} . На контурах отверстий граничные условия удовлетворяются также с высокой точностью и в худшем случае (при $\varepsilon_1 = 0.45$) относительная погрешность составляет 0.57%.

Все расчеты проводились для первого квадранта, и некоторая часть их сведена в таблицы. Верхние числа в каждой клетке таблиц соответствуют случаю растяжения полосы в продольном направлении усилием $T_x = \text{const}$, нижние числа — случаю действия растягивающего усилия $T_y = \text{const}$. Для получения истинных напряжений по этим таблицам необходимо соответствующие числа умножить на T_x или T_y . Эти же таблицы можно использовать и для определения соответствующих напряжений при нагружении полосы равномерным давлением P по контурам отверстий. В этом случае необходимо сложить верхние и нижние числа в клетке, вычесть единицу и результат умножить на P .

В табл. 1 приведены напряжения σ_θ по контурам отверстий (угол θ отсчитывается от точки A в направлении ABC).

Напряжение σ_θ по контурам отверстий вычислялось с шагом 15° . В табл. 1 значения этого напряжения даны через 30° , поэтому некоторые экстремумы (из вычисленных с указанным шагом) не попали в эту таблицу; они приведены ниже: при $T_y = 0$, $\varepsilon_1 = 0.4$, $\theta = 105^\circ$: $\sigma_\theta = -1.8489 T_x$; при $T_x = 0$, $\varepsilon_1 = 0.3$, $\theta = 105^\circ$: $\sigma_\theta = 3.8030 T_y$; при $T_x = 0$, $\varepsilon_1 = 0.45$, $\theta = 135^\circ$: $\sigma_\theta = 8.7166 T_y$.

В табл. 2 даны значения напряжения $X_x^{(1)}$ по вертикальной оси симметрии. Точки идут в направлении $OACD$ с шагом $(c - R) / 3$ на участке OA (точки 1—4) и с шагом $2(c - R) / 3$ на участке CD (точки 5—8).

Таблица 1

ε_1	$\theta=0$	30	60	90	120	150	180
0.1	3.068	2.079	0.054	-1.006	-0.011	2.054	3.098
	-0.960	-0.021	1.941	3.006	2.051	0.010	-1.029
0.2	3.313	2.412	0.219	-1.108	-0.160	2.196	3.503
	-0.816	-0.205	1.745	3.181	2.401	0.082	-1.255
0.3	4.193	3.133	0.411	-1.331	-0.588	2.333	4.600
	-0.832	-0.652	1.528	3.610	3.321	0.490	-1.956
0.4	7.967	4.507	0.625	-1.610	-1.558	1.812	8.146
	-2.175	-1.404	1.293	4.250	5.399	2.927	-4.223
0.45	16.076	5.815	0.777	-1.735	-2.409	-0.244	15.052
	-5.524	-2.143	1.110	4.608	7.281	8.475	-8.418

Таблица 2

ε_1	1	2	3	4	5	6	7	8
0.1	1.115	1.143	1.307	3.068	3.098	1.117	1.038	0.953
	0.046	0.048	0.026	-0.960	-1.029	0.048	0.058	0.161
0.2	1.600	1.568	1.298	3.313	3.503	1.521	1.176	0.821
	-0.001	-0.035	-0.195	-0.816	-1.255	0.045	0.263	0.703
0.3	2.893	3.007	3.390	4.193	4.600	2.405	1.529	0.639
	-0.428	-0.470	-0.603	-0.831	-1.955	-0.074	0.770	1.945
0.4	6.875	6.984	7.329	7.967	8.146	4.873	2.658	0.432
	-1.880	-1.910	-2.004	-2.177	-4.222	-0.370	2.478	5.729
0.45	14.981	15.094	15.443	16.076	15.052	9.506	4.907	0.295
	-5.141	-5.179	-5.295	-5.497	-8.371	-0.666	6.093	13.291

Таблица 3

ε_1	1	2	3	4	5	6
0.1	0.196	-0.072	-0.007	0.007	0.006	0.003
	0.685	1.094	1.029	1.001	0.996	0.997
0.2	0.524	-0.229	-0.036	0.022	0.020	0.011
	0.134	1.284	1.118	1.008	0.986	0.988
0.3	0.649	-0.346	-0.110	0.035	0.039	0.022
	-0.151	1.384	1.287	1.032	0.973	0.975
0.4	0.571	-0.279	-0.247	0.031	0.058	0.034
	-0.158	1.184	1.558	1.095	0.964	0.959
0.45	0.569	-0.143	-0.337	0.012	0.062	0.038
	-0.201	0.916	1.728	1.157	0.969	0.953

Табл. 3 содержит величины напряжения $Y_y^{(1)}$ по горизонтальной оси симметрии. Точки идут от начала координат в положительном направлении оси x с шагом $0.4 a$.

Для всех указанных значений ε_1 проводились вычисления напряжений и в точках продольных граней (с шагом $0.3 a$). По значениям напряжений $X_y^{(1)}$ и $Y_y^{(1)}$ делались выводы о точности удовлетворения граничных условий. Напряжение $X_x^{(1)}$ представляет самостоятельный интерес; при $T_x = \text{const} \neq 0$, $T_y = 0$, $\varepsilon_1 = 0.45$ оно изменяется в упомянутых точках (с точностью до множителя T_x) следующим образом: в точке D достигает минимума, равного 0.2951 , в точке $x = 0.3 a$ оно равно 7.0142 , а далее убывает и стремится к единице ($X_x^{(1)} = 1.0109 T_x$ при $x = 2.1 a$).

Поступила 18 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. О напряжениях в весоной полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
2. Мироненко Н. И. О равновесии бесконечной полосы с круговым отверстием. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 1.
3. Мироненко Н. И. Чистый изгиб бесконечной полосы, симметрично ослабленной круговым отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.