Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ

Л. М. Зубов, А. Н. Рудев

(Ростов-на-Дону)

Символическим методом [1, 2] строятся однородные решения в задаче об изгибе плиты, предварительно деформированной в своей плоскости. Используется модель неогуковского материала, представляющая определенный интерес для описания резиноподобных материалов. Исследование характеристического уравнения показывает, что предварительное нагружение существенно меняет характер спектра однородных решений. Анализ проникающего решения, являющегося аналогом бигармонического решения А. И. Лурье в теории ненапряженных плит [2], свидетельствует о справедливости кинематических гипотез Кирхгофа для тонкой плиты и классического уравнения Сен-Венана устойчивости пластинок при малых начальных напряжениях.

Полученные однородные решения позволяют с помощью асимптотического метода [3] рассматривать, в частности, задачи устойчивости толстых плит при произвольных условиях на боковой поверхности.

1. Построение однородных решений. Рассмотрим плиту из несжимаемого неогуковского материала, подвергнутую начальной деформации вида

$$y_1 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda x_2, \quad y_3 = \lambda^{-2} x_3 \tag{1.1}$$

где λ — постоянная, x_k, y_k ($k = 1, 2, 3$) — декартовы координаты соответственно до и после деформации. Такая деформация реализуется в плите произвольной формы в плане при загружении ее боковой поверхности равномерным давлением. На эту конечную деформацию накладывается малая деформация изгиба. Последняя описывается следующими уравнениями [4]:

$$\begin{gathered} D^2 u_i + u_i'' + \lambda^{-1}\partial_i p = 0 \quad (i = 1, 2) \\ D^2 w + w'' + \lambda^2 p' = 0 \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^3 w' = 0, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь u_1, u_2, w — компоненты вектора добавочных перемещений в системе координат x_1, x_2, $x_3 = z$; штрих означает дифференцирование по z; ∂_i ($i = 1, 2$) — оператор дифференцирования по x_i; p — неизвестная функция координат, появляющаяся вследствие несжимаемости материала. Последнее уравнение в (1.2) — условие несжимаемости.

Граничные условия на торцах плиты при $z = \pm h$, выражающие отсутствие добавочной нагрузки, имеют вид [4]

$$u_i' + \lambda^{-3}\partial_i w = 0 \quad (i = 1, 2), \quad 2w' + \lambda^2 p = 0 \tag{1.3}$$

При выводе (1.2), (1.3) принято, что в начальном однородном деформированном состоянии напряжение $\sigma_z = 0$. Напряжение, действующее в плоскости плиты, выражается через коэффициент λ по формуле (G — модуль сдвига материала)

$$\sigma = G(\lambda^2 - \lambda^{-4}) \tag{1.4}$$

Интегрируя систему (1.2) при граничных условиях (1.3) символическим методом [1, 2], получаем следующее представление для компонент перемещения и функции p:

$$u_i = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}\chi_k \quad (i = 1, 2), \quad w = \sum_{k=1}^{3} B_k\chi_k, \quad p = \sum_{k=1}^{3} C_k\chi_k \tag{1.5}$$

Здесь A_{ik}, B_k, C_k ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$) — дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами по переменным x_1, x_2; χ_1, χ_2, χ_3 — произвольная тройка решений уравнения $Q\chi = 0$, где Q — оператор-определитель задачи (1.2), (1.3). Операторы Q, A_{ik}, B_k, C_k записываются следующим образом ($\gamma \equiv \lambda^{-3}$):

$$Q = hD^2Q_1 \cos hD$$
$$A_{11} = hz(D^2\Delta_{13}Q_1 + \gamma_1\gamma^2\partial_1{}^2T), \quad A_{12} = hz\gamma_1\gamma^2\partial_1\partial_2 T$$
$$A_{13} = z\gamma_1\gamma\partial_1\Delta_{12}(\gamma_2\Delta_{12}\Delta_{23} - 2\Delta_{22}\Delta_{13})$$
$$B_1 = h\gamma_1\gamma\partial_1\Delta_{12}(2\Delta_{11}\Delta_{24} - \gamma_2\Delta_{21}\Delta_{14})$$
$$B_3 = \gamma_1\Delta_{12}(\gamma_2\Delta_{12}\Delta_{24} - 2\gamma^2\Delta_{22}\Delta_{14})$$
$$C_1 = -2hz\gamma^2\lambda\partial_1 D^2\Delta_{11}\Delta_{12}\Delta_{23}, \quad C_3 = -z\gamma\lambda\gamma_2 D^2\Delta^2{}_{12}\Delta_{23}$$
$$Q_1 = -\gamma_1(\gamma_2{}^2\Delta_{12}\Delta_{21} - 4\gamma^2\Delta_{22}\Delta_{11}), \quad \gamma_1 = (1 - \gamma^2)^{-1}$$
$$\gamma_2 = 1 + \gamma^2, \quad T = 2\Delta_{11}(\Delta_{12}\Delta_{23} - 2\Delta_{22}\Delta_{13}) + \gamma_2\Delta_{12}\Delta_{21}\Delta_{13}$$
$$\Delta_{11} = P(hD, \pi/2), \quad \Delta_{12} = P(\pi, hD), \quad \Delta_{13} = P(zD, \pi/2)$$
$$\Delta_{14} = P(\pi, zD), \quad \Delta_{21} = P(h\gamma D, \pi/2), \quad \Delta_{22} = P(\pi, h\gamma D)$$
$$\Delta_{23} = P(z\gamma D, \pi/2), \quad \Delta_{24} = P(\pi, z\gamma D)$$
$$P(x, y) = x^{-1}\sin x + \cos y$$

A_{2k}, B_2, C_2 получаются из A_{1k}, B_1, C_1 заменой $\partial_1 \sim \partial_2$.

Отметим, что при $\gamma \to 1$, т. е. при устранении начальной деформации, оператор Q переходит в оператор-определитель теории изгиба ненапряженной плиты [1] (в последнем следует положить коэффициент Пуассона равным $^1/_2$, так как материал несжимаем).

Решение уравнения $Q\chi = 0$, как и в [1], ищем в классе функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца

$$D^2\chi - \frac{\alpha^2}{h^2}\chi = 0$$

Для определения соответствующих значений параметра α приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\alpha^2\cos\alpha}{\gamma^2 - 1}\left[(1 + \gamma^2)^2\cos\alpha\,\frac{\sin\alpha\gamma}{\alpha\gamma} - 4\gamma^2\cos\alpha\gamma\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right] = 0 \tag{1.6}$$

В дальнейшем будем называть его характеристическим. В пределе при $\gamma \to 1$ оно переходит в известное [1] уравнение

$$2\alpha^2 \cos\alpha \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Очевидно, что нули косинуса $\sigma_t = \pi(2t-1)/2$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ..., — корни как (1.7), так и (1.6). Однако если (1.7) имеет четырехкратный нулевой корень, то для (1.6) нуль является только двукратным корнем. Ниже будет показано, что уравнение (1.6) имеет два ненулевых корня, различающихся только знаком и обладающих тем свойством, что при $\gamma \to 1$ они стремятся к нулю, причем при $0 < \gamma < 1$ (предварительное растяжение плиты) оба они вещественные, а при $1 < \gamma < \gamma_* \approx 3.383$ (предварительное сжатие) — чисто мнимые. Значение $\gamma = \gamma_*$ — особое: при $\gamma \to \gamma_*$ корни уходят по мнимой оси в бесконечность. Обозначим тот из них, который принадлежит замыканию первого квадранта комплексной плоскости, через α_0, тогда второй будет $-\alpha_0$. Все остальные корни уравнения (16) будем обозначать α_q, $q = 1, 2, 3, \ldots$ (способ нумерации будет определен ниже). В силу симметричного расположения корней на комплексной плоскости достаточно ограничиться только теми решениями (1.6), которые находятся в первом квадранте.

В соответствии с тремя указанными группами корней характеристического уравнения в рассматриваемой задаче можно построить три типа однородных решений.

Проникающее решение. Полагая в (1.5) $\chi_1 = \chi_2 = 0$, $\chi_3 = -\psi$, где функция ψ удовлетворяет уравнению

$$D^4\psi - \frac{\alpha_0^2}{h^2} D^2\psi = 0 \tag{1.8}$$

получим следующее представление для проникающего решения:

$$\begin{gathered}
u_i = h\gamma\zeta\partial_i\psi + h^3 A(\zeta)\,\partial_i D^2\psi \quad (i = 1, 2) \\
w = -\psi + h^2 B(\zeta)\,D^2\psi, \quad p = hC(\zeta)\,D^2\psi \\
A(\zeta) = \alpha_0^{-1} M\,[(1+\gamma^2)\cos\alpha_0 \sin\alpha_0\gamma\zeta - \\
- 2\gamma\cos\alpha_0\,\gamma\sin\alpha_0\zeta] - \gamma\alpha_0^{-2}\zeta \\
B(\zeta) = M\,[(1+\gamma^2)\cos\alpha_0 \cos\alpha_0\gamma\zeta - 2\gamma^2\cos\alpha_0\,\gamma\cos\alpha_0\zeta] + \alpha_0^{-2} \\
C(\zeta) = \lambda\alpha^{-1}{}_0 (1+\gamma^2)\cos^2\alpha_0 \sin\alpha_0\gamma\zeta, \quad M = \alpha_0^{-2}(\gamma^2-1)^{-1}\cos\alpha_0
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь $\zeta = z/h$ — безразмерная поперечная координата. Отметим, что при $\gamma \to 1$ уравнение (1.8) переходит в бигармоническое уравнение.

Вихревое решение. Если функция $B_t(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$D^2 B_t - \frac{\sigma_t^2}{h^2} B_t = 0, \quad t = 1, 2, 3, \ldots$$

то, используя (1.5), можно записать вихревое решение в виде

$$\begin{gathered}
u_1 = h^2 \sum_{t=1}^{\infty} F_t(\zeta)\,\partial_2 B_t, \quad u_2 = -h^2 \sum_{t=1}^{\infty} F_t(\zeta)\,\partial_1 B_t, \quad w = p = 0 \\
F_t(\zeta) = 4\gamma^2(-1)^{t+1}(1-\gamma^2)^{-1}\sigma_t^{-2}\cos\sigma_t\gamma\sin\sigma_t\zeta
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Потенциальное решение. Полагая в (1.5) $\chi_3 = -C_q / \cos\alpha_q$, $\chi_1 = \chi_2 = 0$, где функция $C_q(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению

$$D^2C_q - \frac{\alpha_q^2}{h^2} C_q = 0, \quad q = 1, 2, 3, \ldots$$

получаем следующее представление для потенциального решения:

$$u_i = h \sum_{q=1}^{\infty} H_q(\zeta)\,\partial_i C_q \quad (i = 1, 2) \tag{1.11}$$

$$w = -h \sum_{q=1}^{\infty} M_q(\zeta) C_q, \quad p = h^{-1} \sum_{q=1}^{\infty} N_q(\zeta) C_q$$

$$H_q(\zeta) = \gamma_1 \alpha_q^{-1} [(1 + \gamma^2)\cos\alpha_q \sin\alpha_q\gamma\zeta - 2\gamma\cos\alpha_q\gamma\sin\alpha_q\zeta]$$

$$M_q(\zeta) = \gamma_1 [(1 + \gamma^2)\cos\alpha_q \cos\alpha_q\gamma\zeta - 2\gamma^2\cos\alpha_q\gamma\cos\alpha_q\zeta]$$

$$N_q(\zeta) = \lambda\alpha_q (1 + \gamma^2)\cos\alpha_q \sin\alpha_q\gamma\zeta, \quad \gamma_1 = (1 - \gamma^2)^{-1}$$

Как будет показано ниже, множество всех потенциальных решений (1.11) распадается на два подмножества. Решения, принадлежащие первому из них, не имеют аналогов в теории ненапряженных плит, в то время как для решений, относящихся ко второму подмножеству, а также для проникающего (1.9) и вихревого (1.10), справедливо следующее утверждение: при $\gamma \to 1$ они переходят соответственно в потенциальное, бигармоническое и вихревое решения теории ненапряженных плит с коэффициентом Пуассона, равным $^1/_2$ [1].

2. Исследование характеристического уравнения. Характеристическое уравнение (1.6) приводится к виду (2.1) или (2.2) (множитель $\alpha^2 \cos\alpha$ не учитываем)

$$P_1(\gamma)\sin\alpha(\gamma + 1) + P_2(\gamma)\sin\alpha(\gamma - 1) = 0 \tag{2.1}$$

$$P_1(\gamma) = (\gamma^3 - 3\gamma^2 - \gamma - 1) / (2\gamma^2 + 2\gamma), \quad P_2(\gamma) = P_1(-\gamma)$$

$$P_1(\gamma)\left[e^{i\alpha(\gamma+1)} - e^{-i\alpha(\gamma+1)}\right] + P_2(\gamma)\left[e^{i\alpha(\gamma-1)} - e^{-i\alpha(\gamma-1)}\right] = 0 \tag{2.2}$$

Так как значения $\gamma \leqslant 0$ не имеют физического смысла, то достаточно ограничиться исследованием уравнения (2.1) при $\gamma > 0$. Экспоненциальный многочлен в левой части (2.2) — почти-периодическая функция с ограниченным спектром [5]. Поэтому множество корней уравнения (2.2) обладает следующими свойствами [6]:

1) для каждого фиксированного значения $\gamma \neq 1$ все корни лежат в полосе $|\operatorname{Im}\alpha| \leqslant C_\gamma$, $C_\gamma = \mathrm{const}$;

2) при любом $\gamma \neq 1$ множество корней — точечное почти-периодическое множество;

3) для корней имеет место представление

$$\alpha_k = \pi k(1 + \gamma)^{-1} + \Psi_\gamma(k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.3}$$

где $\Psi_\gamma(k)$ — комплекснозначная ограниченная функция.

Можно проверить, что при рациональном значении $\gamma = r/s$ все решения (2.2) записываются в виде

$$\alpha_{(r+s)k+m} = -{}^1/_2 si \ln|t_m| + {}^1/_2 s \arg t_m + \pi ks \tag{2.4}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, r + s - 1; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где t_m — решения уравнения

$$P_1(r/s)\,t^{r+s} + P_2(r/s)\,t^r - P_2(r/s)\,t^s - P_1(r/s) = 0 \tag{2.5}$$

Таким образом, при рациональных γ множество решений (2.2) распадается на конечное число серий. Этот факт, как установлено в [7], имеет место и при иррациональных γ, причем с геометрической точки зрения более естественной оказывается нумерация по сериям (как в (2.4)), чем в порядке возрастания реальной части (как в (2.3)).

Теорема 1. При любом $\gamma \neq 1$ уравнение (2.1) имеет счетное множество вещественных корней.

Доказательство. При γ рациональном утверждение очевидно, так как уравнение (2.5) имеет для любых r, s корень $t = 1$. Если γ иррационально, то достаточно рассмотреть функцию $f(\gamma, \alpha) = P_1(\gamma) \sin \alpha (\gamma + 1) + P_2(\gamma) \sin \alpha (\gamma - 1)$ на последовательности точек вещественной оси $\alpha_k = \pi k (\gamma - 1)^{-1}$, $k = 1, 2, 3\ldots$. Имеем $f(\gamma, \alpha_k) = P_1(\gamma)(-1)^k \sin \cdot [2\pi k (\gamma - 1)^{-1}]$. В силу иррациональности γ величина $2\pi(\gamma - 1)^{-1}$ не может совпадать ни с одним из периодов синуса, и поэтому можно показать, что в последовательности $f(\gamma, \alpha_k)$ происходит счетное число перемен знака. Вследствие непрерывности функции $f(\gamma, \alpha)$ эта функция имеет счетное множество вещественных нулей.

Отмеченное выше значение γ_* — единственный вещественный нуль функции $P_1(\gamma)$.

Теорема 2. Если $0 < \gamma < 1$ (случай предварительного растяжения) или $\gamma > \gamma_*$ (случай сильного и очень сильного предварительного сжатия), то уравнение (2.1) не имеет чисто мнимых корней. Если $1 < \gamma < \gamma_*$ (случай умеренного предварительного сжатия), то уравнение (2.1) имеет два чисто мнимых корня, различающихся только знаком.

Доказательство. Вопрос о наличии чисто мнимых корней у уравнения (2.1) сводится к выяснению существования вещественных корней уравнения

$$\varphi(x, \gamma) = \Phi(\gamma) \tag{2.6}$$

$$\varphi(x, \gamma) = \operatorname{th}(\gamma x) \operatorname{th}^{-1} x, \quad \Phi(\gamma) = 4\gamma^3 (1 + \gamma^2)^{-2}$$

Имеем $\varphi_x' = (\gamma \operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} 2\gamma x) / (2 \operatorname{ch}^2 \gamma x \operatorname{sh}^2 x)$.

Можно установить, что $\varphi_x'(x, \gamma) < 0$ при $\gamma > 1$ и $\varphi_x'(x, \gamma) > 0$ при $\gamma < 1$. Следовательно, если $\gamma > 1$, то $\varphi(x, \gamma)$ при изменении x от 0 до ∞ монотонно убывает от значения γ до 1, а при $\gamma < 1$ монотонно возрастает от γ до 1. Далее, можно показать, что при всех $\gamma > 0$ имеет место неравенство $\Phi(\gamma) \leqslant \gamma$ (знак равенства при $\gamma = 1$). Так как при $\gamma < 1$ функция $\varphi(x, \gamma) > \gamma$ при $x > 0$, а $\Phi(\gamma) < \gamma$, то при $\gamma < 1$ уравнение (2.6) не имеет положительных нулей (а в силу симметрии $\varphi(x, \gamma)$ по x — и отрицательных). Кроме того, вычисляя производную $\Phi'(\gamma)$, можно проверить, что $\Phi(\gamma)$ в интервале $0 < \gamma < \sqrt{3}$ монотонно возрастает, а в интервале $\sqrt{3} < \gamma < \infty$ монотонно убывает. Уравнение $\Phi(\gamma) = 1$ имеет два корня: $\gamma = 1, \gamma = \gamma_*$. Так как $\varphi(x, \gamma) > 1$ при $\gamma > 1$, то уравнение (2.6) не имеет вещественных корней при $\gamma > \gamma_*$. Для $1 < \gamma < \gamma_*$ имеем $1 < \Phi(\gamma) < \gamma$

В силу монотонного убывания $\varphi(x, \gamma)$ от γ до единицы уравнение (2.6) имеет единственный положительный корень. Отсюда следует, что уравнение (2.1) имеет при $1 < \gamma < \gamma_*$ ровно два чисто мнимых корня, отличающихся только знаком.

Следствие. Если $1 < \gamma < \gamma_*$, то уравнение (2.1) имеет счетное множество комплексных корней.

Доказательство вытекает из существования чисто мнимых корней и свойства 2) множества корней уравнения (2.1).

Заметим, что появление чисто мнимых корней характеристического уравнения при начальном сжатии плиты не случайно. Так как мнимые корни порождают однородные решения, осциллирующие по координатам x_1, x_2 и не затухающие, этот факт указывает на возможность изгибной потери устойчивости сжатой в своей плоскости плиты.

Фигурирующее в предыдущих рассуждениях особое значение параметра начальной деформации $\lambda_* = \gamma_*^{-1/3}$ совпадает с величиной начального сжатия, при котором теряет устойчивость сколь угодно толстая плита со скользящей заделкой на боковой поверхности [4].

Значение γ_0 параметра γ будем называть точкой кратности уравнения (2.1), если при $\gamma = \gamma_0$ уравнение (2.1) имеет кратные корни.

Теорема 3. При любом γ уравнение (2.1) не имеет корней кратности три или выше. Если $\gamma > 1$, то (2.1) не имеет также и двукратных корней. Множество точек кратности уравнения (2.1) является счетным всюду плотным подмножеством отрезка [0,1] и совпадает с множеством всех нулей функций $\Psi_{m,k}(\gamma)$,

$$\Psi_{m,k}(\gamma) = (\gamma - 1)\arccos q_1 + (\gamma + 1)\arccos q_2 + 2\pi(k\gamma - m)$$

$$q_1 = -\frac{\gamma^2+1}{(\gamma+1)P_1(\gamma)}, \quad q_2 = \frac{\gamma^2+1}{(\gamma-1)P_2(\gamma)}, \quad |k| > |m|, \quad km > 0$$

(k, m — целые числа) на отрезке [0, 1]. Каждая из функций $\Psi_{m,k}(\gamma)$ монотонна на этом отрезке и поэтому имеет на нем единственный нуль $\gamma_{m,k}$, для которого справедлива оценка

$$\frac{4|m|-3}{4|k|} \leqslant \gamma_{m,k} \leqslant \frac{4|m|+3}{4|k|}$$

Всякой точке кратности $\gamma_{m,k}$ отвечают два вещественных двукратных корня $\pm\alpha_{m,k}$, $\alpha_{m,k} > 0$. С помощью теории возмущений [8] можно получить решение уравнения (2.1) вблизи точки $(\gamma_{m,k};\ \alpha_{m,k})$

$$\alpha = \alpha_{m,k} \pm c\delta^{1/2}, \quad \delta = \gamma - \gamma_{m,k}$$

$$\alpha_{m,k} = (1 + \gamma_{m,k})^{-1}\operatorname{sign}(k)\,[\pi(k+m) + \arccos q_1(\gamma_{m,k})]$$

$$c = \{2(1 - \gamma_{m,k}^2)^{-1}[\alpha_{m,k}L_1(\gamma_{m,k})\operatorname{sign}(k) + L_2(\gamma_{m,k})]\}^{1/2}$$

$$L_1(\gamma) = \frac{1+\gamma^2}{(1+2\gamma^2-3\gamma^4)^{1/2}}, \quad L_2(\gamma) = -\frac{2\gamma(\gamma^4-2\gamma^2-3)}{\gamma^6-11\gamma^4-5\gamma^2-1}$$

Доказательство опускается.

При исследовании асимптотического поведения корней уравнения (2.1) в точках $\gamma = 1$, $\gamma = \gamma_*$, $\gamma = 0$, $\gamma = \infty$ удобнее применять иную нумерацию корней, чем в (2.3) или (2.4). Именно, имеют место следующие асимптотические формулы.

Случай $\gamma \to 1$

(2.7) $$\alpha_{2k-1}(\gamma) = \pi k (\gamma - 1)^{-1} + \varepsilon_k(\gamma), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

где $\varepsilon_k(\gamma)$ — ограниченная функция, не имеющая предела при $\gamma \to 1$. Потенциальным решениям, отвечающим корням α_{2k-1}, нет аналога в теории ненапряженных плит и при $\gamma \to 1$ они не имеют предельных значений.

С помощью теории возмущений [8] получены формулы

(2.8) $$\alpha_0 = (1 - \gamma^2)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (1 - \gamma^2)^k$$

$$A_0 = \sqrt{3} / 2, \quad A_1 = 13\sqrt{3} / 80, \quad A_2 = 4241\sqrt{3} / 44800, \quad \ldots$$

(2.9) $$\alpha_{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn} (\gamma^2 - 1)^n, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$A_{k1} = -\theta_k A_{k0} / 4, \quad A_{k2} = \theta_k^{-1} A_{k0} (12 + 19 t_k^2 + 6 t_k^4) / 48$$

$$A_{k3} = \theta_k^{-2} A_{k0} (t_k^{10} + 5 t_k^8 - 5 t_k^6 - 53 t_k^4 - 71 t_k^2 - 27) / 192$$

$$\theta_k = 1 + t_k^2$$

Здесь A_{k0} — корни уравнения $\sin 2\alpha = 2\alpha$, $t_k = \operatorname{ctg} A_{k0}$. Для определения A_{k0} можно применять асимптотическую формулу, приведенную в [9]. Кроме того, можно показать, что для коэффициентов A_k и A_{kn} справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$A_{k-1} = \frac{3}{8} A_0^{-1} \Big[-\frac{4}{3} \sum_{n=1}^{k-2} A_n A_{k-n-1} + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{k-2} A_n (4 A_{k-n-2} + A_{k-n-3}) -$$

$$- \sum_{n=2}^{k} b_n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r B_{k-n-r,n} C_{n,r} \Big], \quad k \geqslant 3$$

$$A_{kn} = \beta_k \sum_{s=0}^{\infty} b_s \Big[B_{n,s}^{k*} C_{s,0} + \sum_{r=1}^{n} B_{n-r,s}^{k} C_{n,r} \Big], \quad n \geqslant 1, \quad k \geqslant 1$$

$$C_{n,r} = \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dt^r} [P_1(\sqrt{t})(\sqrt{t} + 1)^{2n+1} + P_2(\sqrt{t})(\sqrt{t} - 1)^{2n+1}] |_{t=0}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad B_{s,n} = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_{2n} = s} A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_{2n}}$$

$$\beta_k = -A_{k0} (4 \sin^2 A_{k0})^{-1}, \quad B_{n,s}^{k} = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_{2s} = n} A_{k i_1} A_{k i_2} \ldots A_{k i_{2s}}$$

$$B_{n,s}^{k*} = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_{2s} = n;\ i_r \neq n,\ r = 1, 2, \ldots 2s} A_{k i_1} A_{k i_2} \ldots A_{k i_{2s}}$$

Отметим, что $\alpha_0 \to 0$ при $\gamma \to 1$, причем при $\gamma < 1$ корень α_0 вещественный, а при $\gamma > 1$ чисто мнимый. Далее, $\lim \alpha_{2k} = A_{k0}$ при $\gamma \to 1$, т. е. потенциальные решения, отвечающие корням α_{2k}, при $\gamma \to 1$ переходят в потенциальные решения теории ненапряженных плит.

Численный анализ показывает, что погрешность формулы (2.8) при учете трех коэффициентов на отрезке $0.55 \leqslant \gamma \leqslant 1.35$ не превосходит 0.5%. Для $k = 1,2$ формула (2.9) (также с учетом лишь трех коэффициентов) дает ошибку, не превышающую при $0.8 \leqslant \gamma \leqslant 1.2$ для действительной части 0.5%, а для мнимой — 3%.

Случай $\gamma \to \gamma_*$

(2.10) $\alpha_{2k-1} = \omega\,(\pi k - q \sin 2\pi k\,\omega) + o\,(\gamma - \gamma_*)^2,\ \omega = (\gamma - 1)^{-1}$

$k = 1, 2, 3, \ldots, \ldots$

(2.11) $\alpha_{2k} = \pi k - {}^1/_2 i\,(\ln|q| - \beta e^{2i\pi k\gamma}) + O\,(|\gamma - \gamma_*|^{2\gamma-2}),\ \gamma < \gamma_*$

$\alpha_{2k} = \pi\,(k + {}^1/_2) - {}^1/_2 i\,(\ln|q| - \beta e^{i\pi(2k+1)\gamma}) + O\,(|\gamma - \gamma_*|^{2\gamma-2})$

$\gamma > \gamma_*$

$\beta = (q^2 - 1)\,|q|^{\gamma-1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Случай $\gamma \to 0$

(2.12) $\alpha_{2k-1} = \gamma^{-1}\,[\pi k + 0.5\,(1 - q)] + O\,(\gamma^4),\ k = 1, 2, 3, \ldots$

(2.13) $\alpha_{2k} = \pi\,(k + {}^1/_2) + (q - 1)\,[(2k + 1)\,\pi\gamma]^{-1} + O\,(\gamma^3),\ k = $
$= 0, 1, 2, \ldots$

Случай $\gamma \to \infty$

2.14) $\alpha_{2k-1} = \pi k \gamma^{-2}\,(\gamma + 1 - q) + O\,(\gamma^{-4}),\ k = 1, 2, 3, \ldots$

(2.15) $\alpha_{2k} = \pi\,(k + {}^1/_2) + \gamma^{-1}\mu_k(\gamma),\ k = 0, 1, 2, \ldots$

где $\mu_k(\gamma)$ — ограниченная комплекснозначная функция, причем $\mu_k(\gamma) \to 0$ при $\gamma \to \infty$.

В формулах (2.10) — (2.15) обозначено $q = P_1(\gamma) / P_2(\gamma)$.

Асимптотические формулы (2.10) — (2.15) дают хорошую точность и могут быть использованы в качестве начальных приближений для уточнения корней. Например, при $k = 1$ наибольшая погрешность формулы (2.11) для $\mathrm{Re}\,\alpha_2$ и $\mathrm{Im}\,\alpha_2$ соответственно составляет 1% и 2% при $1.5 \leqslant \gamma \leqslant 2$, 0.3% и 0.5% при $2 \leqslant \gamma \leqslant 2.3$, 0.1% и 0.1% при $2.3 \leqslant \gamma \leqslant 4$.

Кроме того, как видно из (2.11), при $\gamma = \gamma_*$ величина $\mathrm{Re}\,\alpha_{2k}$ претерпевает скачок на $\pi / 2$, а $\mathrm{Im}\,\alpha_{2k} \to \infty$ при $\gamma \to \gamma_*$.

Отметим, что корни α_k формул (2.7) — (2.9) и (2.14), (2.15) при непрерывном изменении параметра γ соответственно от 1 до γ_* и от ∞ до γ_* переходят в корни α_k формул (2.10), (2.11). То же самое верно для корня α_0 в (2.8) и (2.13) при изменении γ от единицы до нуля. Для корней α_k, $k \neq 0$ формул (2.7), (2.9) и (2.12), (2.13) этот факт не имеет места из-за наличия точек кратности, которые являются точками ветвления спектральных кривых уравнения (2.1).

3. Анализ проникающего решения. Как известно, в теории изгиба ненапряженных плит компоненты бигармонического решения и определяемые им напряжения выражаются через соответствующий прогиб срединной плоскости, который является бигармонической функцией. В рассматриваемой здесь задаче компоненты проникающего решения также можно выразить через отвечающий ему прогиб срединной плоскости, который удовлетворяет уравнению (1.8). В самом деле, из (1.5) получаем следующее представление для прогиба срединной плоскости w_0, соответствующего проникающему решению:

(3.1) $w_0 = h\gamma\chi_* + h^3\alpha_0^{-1}\gamma M\,[2 \sin\alpha_0 - (1 + \gamma^2)\,\gamma^{-1} \sin\alpha_0\gamma -$
$- (\alpha_0 M)^{-1}]D^2\chi_* + \chi_3 +$
$+ h^2 M\,[(1 + \gamma^2) \cos\alpha_0 - 2\gamma^2 \cos\alpha_0\gamma - \alpha_0^{-2}M^{-1}]\cdot D^2\chi_3$

$\chi_* = \partial_1\chi_1 + \partial_2\chi_2,\quad M = \alpha_0^{-2}\,(1 - \gamma^2)^{-1} \cos\alpha_0$

где функции χ_k, $k = 1, 2, 3$ — произвольные решения уравнения (1.8). Положим в (3.1)

$$\chi_1 = b\partial_1\chi, \quad \chi_2 = b\partial_2\chi, \quad \chi_3 = \chi + gD^2\chi$$
$$b = \frac{h(1-\gamma^4)}{2\alpha_0\gamma\sin\alpha_0}[(1+\gamma^2)\cos\alpha_0 - 2\gamma^2\cos\alpha_0\gamma]^{-1}, \quad g = -\frac{h^2}{\alpha_0^2}$$

где χ — функция, удовлетворяющая уравнению (1.8).

Видим, что $w_0 = \chi$, т. е. прогиб срединной плоскости также удовлетворяет уравнению (1.8). Таким образом, если произвести указанную замену в представлении (1.5), то получим формулы, выражающие компоненты перемещения и функцию p через прогиб срединной плоскости

$$u_i = -h\gamma\zeta\partial_i w_0 + h^3\gamma\zeta A_0(\zeta)\partial_i D^2 w_0 \qquad (i = 1, 2) \tag{3.2}$$
$$w = w_0 + h^2 B_0(\zeta)D^2 w_0, \quad p = h\lambda^{-2}C_0(\zeta)D^2 w_0$$
$$A_0(\zeta) = \alpha_0^{-2}L(\gamma, \alpha_0)[(1+\gamma^2)R(\alpha_0\gamma\zeta, 1)\cos\alpha_0 - 2R(\alpha_0\zeta, \gamma)\cos\alpha_0\gamma]$$
$$B_0(\zeta) = \alpha_0^{-2}L(\gamma, \alpha_0)[2\gamma^2\cos\alpha_0\gamma(1-\cos\alpha_0\zeta) - (1+\gamma^2)\cos\alpha_0 \times$$
$$\times(1-\cos\alpha_0\gamma\zeta)]$$
$$C_0(\zeta) = (\gamma\alpha_0)^{-1}(\gamma^4-1)\cos\alpha_0 L(\gamma, \alpha_0)\sin\alpha_0\gamma\zeta$$
$$L(\gamma, \alpha_0) = [(1+\gamma^2)\cos\alpha_0 - 2\gamma^2\cos\alpha_0\gamma]^{-1}$$
$$R(x, y) = y^2 + x^{-1}\sin x$$

Можно проверить, что при $\gamma \to 1$ соотношения (3.2) переходят в соответствующие формулы работы [2].

С помощью (1.1) перейдем в представлении (3.2) к координатам начального деформированного состояния y_k. Получим

$$u_i = -h\zeta_*\frac{\partial w_0}{\partial y_i} + h^3\lambda^2\zeta_* A_0(\lambda^2\zeta_*)\frac{\partial}{\partial y_i}\Delta w_0, \quad i = 1, 2 \tag{3.3}$$
$$w = w_0 + h^2 B_0(\lambda^2\zeta_*)\lambda^2\Delta w_0, \quad p = C_0(\lambda^2\zeta_*)\Delta w_0, \quad \zeta_* = y_3/h$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа по переменным y_1, y_2. Формулы (3.3) показывают, что члены низшего порядка относительно h в представлении перемещений соответствуют кинематическим гипотезам Кирхгофа, введенным в метрике начального деформированного состояния.

Сравним теперь уравнение для прогиба срединной плоскости

$$D^4 w_0 - \frac{\alpha_0^2}{h^2}D^2 w_0 = 0 \tag{3.4}$$

с уравнением Сен-Венана классической теории устойчивости пластинки [10]. Заменяя в (1.4) λ через $\gamma^{-1/3}$ и разлагая правую часть в ряд по $1-\gamma^2$, получим

$$\frac{\sigma}{G} = (1-\gamma^2)\left[1 + \frac{1}{3}(1-\gamma^2) + \frac{2}{9}(1-\gamma^2)^2 + \frac{14}{81}(1-\gamma^2)^3 + \ldots\right]$$

откуда следует, что

$$1-\gamma^2 = \frac{\sigma}{G} - \frac{1}{3}\frac{\sigma^2}{G^2} + \frac{5}{27}\frac{\sigma^4}{G^4} + \ldots$$

С помощью (2.8) найдем

$$\alpha_0^2 = \frac{3}{4}\frac{\sigma}{G} + \frac{19}{80}\frac{\sigma^2}{G^2} + \frac{107}{2800}\frac{\sigma^3}{G^3} + \ldots \tag{3.5}$$

Подстановка (3.5) в (3.4) дает

$$\frac{1}{3} G(2h)^3 D^4 w_0 - 2h\sigma D^2 w_0 -$$
$$- \frac{hG}{30}\left(19\frac{\sigma^2}{G^2} + \frac{107}{35}\frac{\sigma^3}{G^3} + \ldots\right) D^2 w_0 = 0$$

Для плиты из несжимаемого материала цилиндрическая жесткость равна $G(2h)^3 / 3$. Следовательно, классическое уравнение Сен-Венана верно с точностью до членов порядка $(\sigma / G)^2$.

Поступила 13 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
3. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
4. *Зубов Л. М.* Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации. ПММ, 1970, т. 24, вып. 4.
5. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953.
6. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.
7. *Потапов В. П.* О делителях почти-периодического полинома. Сб. тр. Ин-та математики АН УССР, 1949, № 12.
8. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
9. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1976.
10. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.