Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УГЛОВЫХ ОБЛАСТЕЙ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. Б. Поручиков

(Москва)

Предлагается регулярный метод решения пространственных динамических задач теории упругости для угловых областей со смешанными граничными условиями, т. е. когда на граничных полуплоскостях задаются нормальное смещение и касательное напряжение или нормальное напряжение и касательное смещение. Данный метод, обобщающий результаты автора [1,2] на случай произвольных смешанных граничных условий, является комбинированным методом интегральных преобразований и выделения особенностей изображений искомых функций в окрестности ребра.

Обзор последних достижений в развитии методов решения динамических задач теории упругости можно найти в [3].

1. Пусть упругая среда с модулем сдвига μ и скоростями распространения продольных и поперечных волн a и b занимает область $r > 0$, $0 < \theta < \pi / l$, $-\infty < z < \infty$ (r, θ, z — цилиндрические координаты), на границах которой $\theta = 0, \pi / l$ ($^1/_2 < l$, $l \neq 1$) заданы смешанные условия

$$w_\theta = w_\theta^k(t, r, z), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}^k(t, r, z), \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^k(t, r, z) \tag{1.1}$$

или условия

$$w_r = w_r^k(t, r, z), \quad w_z = w_z^k(t, r, z), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^k(t, r, z) \tag{1.2}$$

где $k = 0, 1$ и данные индексы нуль и единица относятся соответственно к границам $\theta = 0$ и $\theta = \pi / l$. Начальные условия предполагаются нулевыми: $\mathbf{w} = \partial \mathbf{w} / \partial t = 0$ при $t = t_0$. Здесь обозначено: $\mathbf{w}\{w_r, w_\theta, w_z\}$ — вектор перемещения, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений ($i, j = r, \theta, z$).

Если выразить вектор перемещения $\mathbf{w}$ через продольный и поперечные скалярные потенциалы φ, ψ_1 и ψ_2, согласно [4, 5], по формуле

$$\mathbf{w} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot}(\psi_1 \mathbf{e}_3) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\psi_2 \mathbf{e}_3) \tag{1.3}$$

($\mathbf{e}_3$ единичный вектор, направленный по оси z), то решения динамических задач с граничными условиями (1.1) и (1.2) (назовем их соответственно первой и второй задачами) сводятся к решению соответственно систем (1.4) и (1.5)

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}, \quad \Delta\psi_j = \gamma^2 \frac{\partial^2\psi_j}{\partial\tau^2} \quad (j = 1, 2) \tag{1.4}$$

$$w_\theta = w_\theta^\circ(\tau, r, z), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}^\circ(\tau, r, z)$$

$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^\circ(\tau, r, z) \quad (\theta = 0)$$

$$w_\theta = w_\theta^1(\tau, r, z), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}^1(\tau, r, z)$$
$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^1(\tau, r, z) \quad (\theta = \pi / l)$$
$$\varphi \equiv \psi_j \equiv 0 \quad (\tau < \tau_0)$$

(1.5) $$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}, \quad \Delta\psi_j = \gamma^2\frac{\partial^2\psi_j}{\partial\tau^2} \quad (j = 1, 2)$$
$$w_r = w_r^\circ(\tau, r, z), \quad w_z = w_z^\circ(\tau, r, z)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^\circ(\tau, r, z) \quad (\theta = 0)$$
$$w_r = w_r^1(\tau, r, z), \quad w_z = w_z^1(\tau, r, z)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^1(\tau, r, z) \quad (\theta = \pi / l)$$
$$\varphi \equiv \psi_j \equiv 0 \quad (\tau < \tau_0)$$

Здесь $\tau = at$, $\tau_0 = at_0$, $\gamma = a / b > 1$, Δ — трехмерный оператор Лапласа. Кроме того, при решении каждой из систем (1.4) и (1.5) следует учесть условие на ребре [6]

(1.6) $$\mathbf{w} = \mathbf{C} + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad r \to 0 \quad (\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}(\tau, z))$$

обеспечивающее интегрируемость напряжений в окрестности ребра и единственность решений поставленных задач.

Таким образом, решение первой и второй задач сводятся соответственно к решению систем (1.4), (1.6) и (1.5), (1.6).

2. Перейдем к решению первой задачи (1.4), (1.6). Применим к системе (1.4) двусторонние преобразования Лапласа по τ и z. Тогда, выражая с помощью (1.3) граничные условия в (1.4) через продольный и поперечные потенциалы и используя уравнения, которым удовлетворяют поперечные потенциалы, можно показать, что граничные условия для продольного и поперечного потенциалов разделяются, и в результате решение системы (1.4) сводится к решению следующих трех систем для $\bar\varphi^*$, $\bar\psi_1^*$ и $\bar\psi_2^*$:

(2.1) $$\Delta_1\bar\varphi^* = (q^2 - s^2)\bar\varphi^* \quad (\Delta_1 \equiv \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}\partial / \partial r + r^{-2}\partial^2 / \partial\theta^2)$$
$$\partial\bar\varphi^* / \partial\theta = U_0 \quad (\theta = 0), \qquad \partial\bar\varphi^* / \partial\theta = U_1 \quad (\theta = \pi / l)$$

(2.2) $$\Delta_1\bar\psi_1^* = (\gamma^2q^2 - s^2)\bar\psi_1^*$$
$$\bar\psi_1^* = V_0\,(\theta = 0), \quad \bar\psi_1^* = V_1 \quad (\theta = \pi / l)$$

(2.3) $$\Delta_1\bar\psi_2^* = (\gamma^2q^2 - s^2)\bar\psi_2^*$$
$$\partial\bar\psi_2^* / \partial\theta = W_0\,(\theta = 0), \quad \partial\bar\psi_2^* / \partial\theta = W_1 \quad (\theta = \pi / l).$$

В (2.1)—(2.3) обозначено

$$U_k = r\gamma^{-2}q^{-2}\,[(\gamma^2q^2 - s^2)dV_k / dr + s\mu^{-1}(\bar\sigma_{\theta z}^k)^* + (\gamma^2q^2 - 2s^2)(\bar w_\theta^k)^*]$$
$$V_k = (\gamma^2q^2 - s^2)^{-1}[\mu^{-1}(\bar\sigma_{\theta r}^k)^* - 2d(\bar w_\theta^k)^* / dr]$$
$$W_k = r\gamma^{-2}q^{-2}\,[2s(\bar w_\theta^k)^* - \mu^{-1}(\bar\sigma_{\theta z}^k)^* + sdV_k / dr] \quad (k = 0,\ 1)$$

В системах (2.1) — (2.3) черта над функцией f ($f = \varphi, \psi_1, \psi_2, \sigma_{\theta r}^k, \sigma_{\theta z}^k, w_\theta^k$) и звездочка обозначают соответственно изображения по Лапласу по τ и z от функции f

$$\bar f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q\tau} f\, d\tau, \quad \bar f^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz}\bar f\, dz$$

Здесь $\operatorname{Re} q > 0$, $\operatorname{Re} s = 0$, поскольку $f(\tau) \equiv 0$ при $\tau < \tau_0$ и предполагается, что $|f| < M_0\tau^n$ при $\tau \to +\infty$, а функция $|\bar{f}|$ интегрируема по z.

Далее, полагая, что оценка (1.6) остается верной и после применения преобразований Лапласа по τ и z, получаем

$$\bar{w}^* = \text{const} + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad r \to 0 \tag{2.4}$$

(причем предполагается, что оценка (2.4) выполняется равномерно по θ).

Таким образом, решение первой задачи (1.4), (1.6) сводится к решению системы (2.1) — (2.4). Из вида этой системы следует, что можно искать продольный $\bar{\varphi}^*$ и поперечные $\bar{\psi}_1^*$ и $\bar{\psi}_2^*$ потенциалы независимо один от другого до тех пор, пока не учитывается условие на ребре (2.4).

Решая системы (2.1) — (2.3), разложим на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi / l$ функции $\bar{\varphi}^*(q, r, \theta, s)$ и $\bar{\psi}_2^*(q, r, \theta, s)$ в ряды по косинусам, а $\bar{\psi}_1^*(q, r, \theta, s)$ — в ряд по синусам.

Чтобы получить уравнения для определения коэффициентов этих разложений, умножим уравнения для $\bar{\varphi}^*$ и $\bar{\psi}_2^*$ из (2.1) и (2.3) на $2l\pi^{-1}\cos nl\theta d\theta$, а уравнение для $\bar{\psi}_1^*$ из (2.2) — на $2l\pi^{-1}\sin nl\theta d\theta$ и проинтегрируем их по θ от 0 до π / l. В результате получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$La_n = \omega^2 a_n + f_n(r) \quad (L \equiv d^2 / dr^2 + r^{-1}d / dr - n^2l^2r^{-2}) \tag{2.5}$$

$$f_n(r) = 2l\pi^{-1}r^{-2}[U_0 - (-1)^n U_1]$$

$$Lb_{nj} = \varkappa^2 b_{nj} + f_{nj}(r) \quad (j = 1, 2) \tag{2.6}$$

$$f_{n1}(r) = -2l^2n\pi^{-1}r^{-2}[V_0 - (-1)^n V_1], \quad f_{n2}(r) = = 2l\pi^{-1}r^{-2}[W_0 - (-1)^n W_1]$$

$$\bar{\varphi}^* = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nl\theta,$$

$$a_n = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\pi/l} \bar{\varphi}^* \cos nl\theta\, d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\bar{\psi}_1^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n1}\sin nl\theta, \quad b_{n1} = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\pi/l} \bar{\psi}_1^* \sin nl\theta\, d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\bar{\psi}_2^* = \frac{b_{02}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n2}\cos nl\theta,$$

$$b_{n2} = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\pi/l} \bar{\psi}_2^* \cos nl\theta\, d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\omega = (q^2 - s^2)^{1/2}, \quad \varkappa = (\gamma^2q^2 - s^2)^{1/2}$$

Для выделения ветвей функций ω и $\varkappa$ в плоскости s проведены разрезы от точек $s = \pm q$ (для $\varkappa$ от точек $s = \pm\gamma q$) до бесконечности вдоль лучей $\arg s = \arg q$ и $\arg s = \pi + \arg q$ и ветви радикалов ω и $\varkappa$ выбраны так, что $\omega = q$, $\varkappa = \gamma q$ при $s = 0$. Тогда легко показать, что $\operatorname{Re}\omega > 0$ и

$\mathrm{Re}\,\varkappa > 0$. Решая (2.5) и (2.6), находим

$$a_n = A_n K_{nl}(r\omega) + B_n I_{nl}(r\omega) + F_n(r) \tag{2.7}$$

$$F_n(r) = -K_{nl}(r\omega)\int_0^r I_{nl}(x\omega) f_n(x)\,x\,dx - I_{nl}(r\omega)\int_r^\infty K_{nl}(x\omega) f_n(x)\,x\,dx$$

$$b_{nj} = C_{nj} K_{nl}(r\varkappa) + D_{nj} I_{nl}(r\varkappa) + F_{nj}(r) \tag{2.8}$$

$$F_{nj}(r) = -K_{nl}(r\varkappa)\int_0^r I_{nl}(x\varkappa) f_{nj}(x)\,x\,dx - I_{nl}(r\varkappa)\int_r^\infty K_{nl}(x\varkappa) f_{nj}(x)\,x\,dx$$

Здесь $I_\alpha(s)$ и $K_\alpha(s)$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода соответственно.

Предположим, что заданные функции $w_\theta{}^k$, $\sigma_{\theta r}{}^k$, $\sigma_{\theta z}{}^k$ таковы, что при $r \to \infty$ функции f_n и f_{nj} ограничены, а при $r \to 0$ функции rf_n и rf_{nj} ведут себя как $\mathrm{const} + O(r^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Используя асимптотику цилиндрических функций

$$K_\alpha(s) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\,e^{-s}, \quad I_\alpha(s) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\,e^{s}, \quad |s| \to \infty, \quad |\arg s| < \frac{\pi}{2}$$

и ограниченность функций f_n и f_{nj} при $r \to \infty$, можно показать, что функции F_n и F_{nj} ограничены при $r \to \infty$. Но тогда, если искать функции a_n и b_{nj} также ограниченными при $r \to \infty$, то сразу получаем из (2.7) и (2.8): $B_n \equiv D_{nj} \equiv 0$.

Для определения оставшихся коэффициентов A_n и C_{nj} используем условие на ребре (2.4). С этой целью разложим на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi / l$ изображения $\overline{w}_r{}^*$, $\overline{w}_z{}^*$, в ряд по косинусам, а $\overline{w}_\theta{}^*$ — в ряд по синусам и используем при этом выражения компонент вектора перемещения через потенциалы согласно формуле (1.3).

Тогда, умножая выражение для компонент $\overline{w}_r{}^*$ и $\overline{w}_z{}^*$ на $2l\pi^{-1}\cos nl\theta d\theta$, а выражения для $\overline{w}_\theta{}^*$ — на $2l\pi^{-1}\sin nl\theta d\theta$ и интегрируя их по θ от 0 до π / l, получаем из (2.4) для каждого n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) следующую систему трех уравнений:

$$\frac{da_n}{dr} + \frac{nl}{r} b_{n1} + s\frac{db_{n2}}{dr} = \mathrm{const} + O(r^\varepsilon) \tag{2.9}$$

$$sa_n - \varkappa^2 b_{n2} = \mathrm{const} + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad r \to 0$$

$$-\frac{nl}{r} a_n - \frac{db_{n1}}{dr} - \frac{snl}{r} b_{n2} = \mathrm{const} + O(r^\varepsilon)$$

из которой и следует найти коэффициенты A_n и C_{nj}, входящие в выражения (2.7), (2.8) для a_n и b_{nj} (при $n = 0$ система (2.9) вырождается в систему двух уравнений для a_0 и b_{02}, ибо $b_{01} = 0$; в (2.9) использована ограниченность rf_{n1} при $r \to 0$).

Используя асимптотические разложения цилиндрических функций при $s \to 0$

$$I_\alpha(s) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{s}{2}\right)^\alpha + O(s^{2+\alpha}) \tag{2.10}$$

$$K_0(s) = -\ln s + O(1), \quad K_1(s) = s^{-1} + O(s \ln s)$$

$$K_\alpha(s) = \begin{cases} 2^{-1}\Gamma(\alpha)(2/s)^\alpha + 2^{-1}\Gamma(-\alpha)(s/2)^\alpha + O(s^{2-\alpha}) & (0 < \alpha < 1) \\ 2^{-1}\Gamma(\alpha)(2/s)^\alpha + O(s^{2-\alpha}) & (\alpha > 1) \end{cases}$$

(где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция) и ограничения на поведение функций f_n и f_{nj} при $r \to 0$, находим следующие асимптотические выражения для $F_n(r)$ и $F_{nj}(r)$ при $r \to 0$ в зависимости от n:

$$F_0(r) = \text{const} + O(r), \quad F_1(r) = M_1 r^l + O(r) \tag{2.11}$$
$$F_n(r) = O(r) \quad (n \geqslant 2)$$
$$F_{02}(r) = \text{const} + O(r), \quad F_{1j}(r) = M_{1j} r^l + O(r)$$
$$F_{nj}(r) = O(r) \quad (n \geqslant 2)$$

$$M_1 = -\left(\frac{\omega}{2}\right)^l \frac{1}{\Gamma(1+l)} \int_0^\infty K_l(x\omega) f_1(x)\, x\, dx \quad (l<1), \quad M_1 = 0 \quad (l>1) \tag{2.12}$$

$$M_{1j} = -\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^l \frac{1}{\Gamma(1+l)} \int_0^\infty K_l(x\varkappa) f_{1j}(x)\, x\, dx \quad (l<1), \quad M_{1j} = 0 \quad (l>1)$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в (2.9) и используя асимптотические оценки (2.10), (2.11), можно заметить, что при $n = 0$ и $n \geqslant 2$ условия (2.9) будут выполнены, если положить $A_n \equiv C_{nj} \equiv 0$. В случае $n = 1$ получаем систему

$$Sr^{-l-1} + Tr^{l-1} + O(1) = \text{const} + O(r^\varepsilon)$$
$$Xr^{-l} + O(r^l) = \text{const} + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad r \to 0$$
$$Sr^{-l-1} - Tr^{l-1} + O(1) = \text{const} + O(r^\varepsilon)$$

где

$$S = -2^{l-1}\Gamma(1+l)[A_1\omega^{-l} - C_{11}\varkappa^{-l} + sC_{12}\varkappa^{-l}]$$
$$T = -2^{-l-1}\Gamma(1-l)[A_1\omega^l + C_{11}\varkappa^l + sC_{12}\varkappa^l] + (M_1 + M_{11} + sM_{12})l$$
$$X = 2^{l-1}\Gamma(l)[A_1 s\omega^{-l} - \varkappa^{2-l}C_{12}]$$

Из этой системы находим $S = 0$, $T = 0$, $X = 0$, что дает для определения A_1, C_{11}, C_{12} следующие выражения:

$$A_1 = \omega^l \varkappa^{2-l} s^{-1} C_{12}, \quad C_{11} = \gamma^2 q^2 s^{-1} C_{12} \tag{2.13}$$
$$C_{12} = \frac{2^{l+1}\sin \pi l\, \Gamma(1+l)\, s\,(M_1 + M_{11} + sM_{12})}{\pi[\omega^{2l}\varkappa^{2-l} + \varkappa^l(s^2 + \gamma^2 q^2)]}$$

Отметим, что при $l > 1$ формулы (2.13) дают: $A_1 = C_{11} = C_{12} = 0$.

Итак, решение первой задачи (1.4), (1.6) в изображениях имеет вид ($^1/_2 < l$, $l \neq 1$)

$$\bar{\varphi}^* = \frac{1}{2}F_0(r) + \sum_{n=1}^\infty F_n(r)\cos nl\theta + \frac{\varkappa^{2-l}}{s}\omega^l \cos l\theta K_l(r\omega) C_{12} \tag{2.14}$$

$$\bar{\psi}_1^* = \sum_{n=1}^\infty F_{n1}(r)\sin nl\theta + \frac{\gamma^2 q^2}{s}\sin l\theta K_l(r\varkappa) C_{12}$$

$$\bar{\psi}_2^* = \frac{1}{2}F_{02}(r) + \sum_{n=1}^\infty F_{n2}(r)\cos nl\theta + \cos l\theta K_l(r\varkappa) C_{12}$$

где выражения для $F_n(r)$ и $F_{nj}(r)$ даны в (2.7) и (2.8), а величина C_{12} определена в (2.13).

Аналогичным образом получается и решение второй задачи (1.5), (1.6). В этом случае, применяя преобразования Лапласа по τ и z к (1.5) и разделяя граничные условия для потенциалов φ, ψ_1 и ψ_2, сводим систему (1.5) к решению следующих систем для потенциалов:

$$\Delta_1\overline{\varphi}^* = (q^2 - s^2)\,\overline{\varphi}^*, \quad \overline{\varphi}^* = U_0^\circ\ (\theta = 0), \quad \overline{\varphi}^* = U_1^\circ\ (\theta = \pi / l) \tag{2.15}$$

$$\Delta_1\overline{\psi}_1^* = (\gamma^2 q^2 - s^2)\,\overline{\psi}_1^* \tag{2.16}$$

$$\partial\overline{\psi}_1^* / \partial\theta = V_0^\circ\ (\theta = 0), \quad \partial\overline{\psi}_1^* / \partial\theta = V_1^\circ\ (\theta = \pi / l)$$

$$\Delta_1\overline{\psi}_2^* = (\gamma^2 q^2 - s^2)\,\overline{\psi}_2^* \tag{2.17}$$

$$\overline{\psi}_2^* = W_0^\circ\ (\theta = 0), \quad \overline{\psi}_2^* = W_1^\circ\ (\theta = \pi / l)$$

где

$$U_k^\circ = 2\gamma^{-2}q^{-2}\left[\frac{1}{2\mu}(\overline{\sigma}_{\theta\theta}^k)^* + s(\overline{w}_z^k)^* + \frac{d}{dr}(\overline{w}_r^k)^*\right]$$

$$V_k^\circ = r\left[(\overline{w}_r^k)^* - \frac{d}{dr}U_k^\circ - s\frac{d}{dr}W_k^\circ\right]$$

$$W_k^\circ = (s^2 - \gamma^2 q^2)^{-1}\,[(\overline{w}_z^k)^* - sU_k^\circ] \quad (k = 0, 1)$$

Далее, разлагая $\overline{\varphi}^*$ и $\overline{\psi}_2^*$ в ряды по синусам, а $\overline{\psi}_1^*$ — в ряд по косинусам на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi / l$, решаем системы (2.15) — (2.17) с учетом условия (2.4) точно так же, как это было сделано при решении первой задачи. В результате решение второй задачи (1.5), (1.6) в изображениях записывается в следующем виде ($l > 1/2$, $l \neq 1$):

$$\overline{\varphi}^* = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^\circ(r)\sin nl\theta + \frac{\varkappa^{2-l}}{s}\,\omega^l \sin l\theta K_l(r\omega)\,C_{12}^\circ \tag{2.18}$$

$$\overline{\psi}_1^* = \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{F}_{01}(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\overset{\circ}{F}_{n1}(r)\cos nl\theta - \frac{\gamma^2 q^2}{s}\cos l\theta K_l(r\varkappa)\,C_{12}^\circ$$

$$\overline{\psi}_2^* = \sum_{n=1}^{\infty}\overset{\circ}{F}_{n2}(r)\sin nl\theta + \sin l\theta K_l(r\varkappa)\,C_{12}^\circ$$

$$C_{12}^\circ = \frac{2^{l+1}\sin\pi l\,\Gamma(1+l)\,s\,(M_1^\circ - M_{11}^\circ + sM_{12}^\circ)}{\pi\,[\omega^{2l}\varkappa^{2-l} + \varkappa^l(s^2 + \gamma^2 q^2)]}$$

Выражения для $F_n^\circ(r)$ и $F_{nj}^\circ(r)$ определяются последними формулами в (2.7) и (2.8), величины M_1° и M_{1j}° определены в (2.12), причем всюду необходимо заменить функции $f_n(r)$, $f_{nj}(r)$ на $f_n^\circ(r)$, $f_{nj}^\circ(r)$, где

$$f_n^\circ(r) = -2l^2 n\pi^{-1}r^{-2}\,[U_0^\circ - (-1)^n U_1^\circ]$$

$$f_{n1}^\circ(r) = 2l\pi^{-1}r^{-2}\,[V_0^\circ - (-1)^n V_1^\circ]$$

$$f_{n2}^\circ(r) = -2l^2 n\pi^{-1}r^{-2}\,[W_0^\circ - (-1)^n W_1^\circ]$$

Окончательно получим решения первой и второй задач в потенциалах, если по формулам

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} e^{q\tau}dq \int_{-i\infty}^{i\infty}\overline{\varphi}^* e^{sz}\,ds,$$

$$\psi_j = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} e^{q\tau}dq \int_{-i\infty}^{i\infty}\overline{\psi}_j^* e^{sz}\,ds \quad (c_0 > 0)$$

найдем соответственно оригиналы выражений (2.14) и (2.18).

В случае плоской деформации в системах (1.4) и (1.5) функции $\sigma_{\theta z}{}^k = 0$, $w_z{}^k = 0$, а остальные заданные функции $w_\theta{}^k$, $\sigma_{\theta r}{}^k$, $w_r{}^k$, $\sigma_{\theta\theta}{}^k$, не зависят от z. Системы для потенциалов $\varphi(\tau, r, \theta)$, $\psi(\tau, r, \theta)$, связанных с вектором перемещения формулой

$$\mathbf{w} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot}(\psi \mathbf{e}_3)$$

получаются для первой и второй задач из систем (1.4) и (1.5), если в них положить равными нулю функции $\sigma_{\theta z}{}^k$, $w_z{}^k$, ψ_2 и все производные по z, а также обозначить $\psi \equiv \psi_1$. В результате находим решения первой и второй задач, которые, как показывает их вид, формально можно получить из (2.14) и (2.18), если в последних формулах всюду заменить $(\bar{w}_\theta{}^k)^*$, $(\bar{\sigma}_{\theta r}{}^k)^*$, $(\bar{\sigma}_{\theta z}{}^k)^*$, $(\bar{w}_r{}^k)^*$, $(\bar{\sigma}_{\theta\theta}{}^k)^*$, $(\bar{w}_z{}^k)^*$ соответственно на $\bar{w}_\theta{}^k$, $\bar{\sigma}_{\theta r}{}^k$, 0, $\bar{w}_r{}^k$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}{}^k$, 0, затем перейти к пределу при $s \to 0$ и положить $\bar{\varphi} \equiv \lim \bar{\varphi}^*$ и $\bar{\psi} \equiv \lim \bar{\psi}_1{}^*$ при $s \to 0$.

Итак, решение плоской динамической задачи с нулевыми начальными условиями (при $\tau = \tau_0$) и с граничными условиями

$$w_\theta = w_\theta{}^\circ(\tau, r), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}{}^\circ(\tau, r) \quad (\theta = 0)$$

$$w_\theta = w_\theta{}^1(\tau, r), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}{}^1(\tau, r) \quad (\theta = \pi / l)$$

имеет в изображениях вид ($l > 1/2$, $l \neq 1$)

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2} F_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r) \cos nl\theta + CK_l(rq) \cos l\theta \tag{2.19}$$

$$\bar{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n1}(r) \sin nl\theta + C\gamma^l K_l(r\gamma q) \sin l\theta$$

$$C = \frac{2^{l+1} \sin \pi l \Gamma(1+l)(M_1 + M_{11})}{\pi q^l (1 + \gamma^{2l})}$$

В случае граничных условий

$$w_r = w_r{}^\circ(\tau, r), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}{}^\circ(\tau, r) \quad (\theta = 0)$$

$$w_r = w_r{}^1(\tau, r), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}{}^1(\tau, r) \quad (\theta = \pi / l)$$

и нулевых начальных условий при $\tau = \tau_0$ решение этой задачи записывается в виде ($l > 1/2$, $l \neq 1$)

$$\bar{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n{}^\circ(r) \sin nl\theta + C^\circ K_l(rq) \sin l\theta \tag{2.20}$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2} F_{01}{}^\circ(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_{n1}(r) \cos nl\theta - C^\circ \gamma^l K_l(r\gamma q) \cos l\theta$$

$$C^\circ = \frac{2^{l+1} \sin \pi l \Gamma(1+l)(M_1{}^\circ - M_{11}{}^\circ)}{\pi q^l (1 + \gamma^{2l})}$$

В формулах (2.19) функции F_n, F_{n1} и величины M_1, M_{11} имеют тот же вид, что и в (2.7), (2.8), (2.12), при замене ω на q и $\varkappa$ на γq, причем

$$f_n(r) = 2l\pi^{-1} r^{-2} [U_0 - (-1)^n U_1],$$

$$f_{n1}(r) = -2l^2 n\pi^{-1} r^{-2} [V_0 - (-1)^n V_1]$$

$$U_k = r\bar{w}_\theta{}^k - \frac{1}{\gamma^2 q^2}\left(2r\frac{d^2\bar{w}_\theta{}^k}{dr^2} - \frac{d\bar{\sigma}_{\theta r}^k}{\mu dr}\right)$$

$$V_k = \frac{1}{\gamma^2 q^2}\left(\frac{\bar{\sigma}_{\theta r}^k}{\mu} - 2\frac{d\bar{w}_\theta{}^k}{dr}\right)$$

Для функций $F_n{}^\circ$, $F_{n1}{}^\circ$, $M_1{}^\circ$, $M_{11}{}^\circ$ остаются верными те же формулы, что и для F_n, F_{n1}, M_1, M_{11}, если только f_n и f_{n1} заменить соответственно на $f_n{}^\circ$ и $f_{n1}{}^\circ$, причем

$$f_n{}^\circ(r) = -2l^2 n\pi^{-1} r^{-2}\left[U_0{}^\circ - (-1)^n U_1{}^\circ\right]$$

$$\overset{\circ}{f}_{n1}(r) = 2l\pi^{-1} r^{-2}\left[V_0{}^\circ - (-1)^n V_1{}^\circ\right]$$

$$U_k{}^\circ = \frac{1}{\gamma^2 q^2}\left(\frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}^k}{\mu} + 2\frac{d\bar{w}_r{}^k}{dr}\right)$$

$$V_k{}^\circ = r\bar{w}_r{}^k - \frac{r}{\gamma^2 q^2}\left(\frac{d\bar{\sigma}_{\theta\theta}^k}{\mu dr} + 2\frac{d^2\bar{w}_r{}^k}{dr^2}\right)$$

Окончательно оригиналы решений (2.19) и (2.20) записываются в виде

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty}\bar{\varphi}e^{q\tau}\,dq, \quad \psi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty}\bar{\psi}e^{q\tau}\,dq \qquad (c_0>0)$$

Необходимо отметить, что при решении рассмотренных выше задач динамической теории упругости требовалась ограниченность функций rf_n, rf_{nj}, $rf_n{}^\circ$ и $rf_{nj}{}^\circ$ при $r\to 0$. Для удовлетворения этих условий достаточно, чтобы заданные на границе функции имели при $r\to 0$ следующие асимптотические разложения:

для первой задачи

$$(\bar{w}_\theta{}^k)^* = \sum_{j=0}^{2} d_j r^j + O(r^{2+\varepsilon}), \quad (\bar{\sigma}_{\theta r}^k)^* = d_3 + d_4 r + O(r^{1+\varepsilon}) \tag{2.21}$$

$$(\bar{\sigma}_{\theta z}{}^k)^* = d_5 + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

для второй задачи

$$(\bar{w}_r{}^k)^* = \sum_{j=0}^{2} d_j{}^\circ r^j + O(r^{2+\varepsilon}), \quad (\bar{w}_z{}^k)^* = d_3{}^\circ + d_4{}^\circ r + O(r^{1+\varepsilon}) \tag{2.22}$$

$$(\bar{\sigma}_{\theta\theta}{}^k)^* = d_5{}^\circ + d_6^\circ r + O(r^{1+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0$$

Здесь d_j и $d_j{}^\circ$ ($j = 0$—6) не зависят от r.

В самом деле, для первой задачи в этом случае функции rf_n и rf_{n2} ограничены, а функция $rf_{n1} = O(r^{-1})$, т. е. имеет порядок выше допустимого. Тогда, дифференцируя в системах (2.1) — (2.3) уравнения для $\bar{\varphi}^*$, $\bar{\psi}_1{}^*$ и $\bar{\psi}_2{}^*$ по θ, а затем приводя граничное условие для $\bar{\psi}_1{}^*$ (с помощью уравнения для $\bar{\psi}_1{}^*$) к виду

$$\left.\frac{\partial^2\bar{\psi}_1{}^*}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0,\,\pi/l} = -r^2\left[\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial\bar{\psi}_1{}^*}{\partial r}\right) - \varkappa^2\bar{\psi}_1{}^*\right]\Bigg|_{\theta=0,\,\pi/l} =$$

$$= -r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_k}{dr}\right) + r^2\varkappa^2 V_k$$

и наконец, обозначая

$$\overline{\varphi}_1{}^* \equiv \partial\overline{\varphi}^* / \partial\theta, \ \overline{\psi}_{11}{}^* \equiv \partial\overline{\psi}_1{}^* / \partial\theta, \ \overline{\psi}_{21}{}^* \equiv \partial\overline{\psi}_2{}^* / \partial\theta$$

$$U_k{}^\circ \equiv U_k, \quad W_k{}^\circ \equiv W_k{}^\circ, \quad V_k{}^\circ \equiv -r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_k}{dr}\right) + r^2\varkappa^2 V_k$$

приходим к системам (2.15) — (2.17) для второй задачи относительно потенциалов $\overline{\psi}_1{}^*$, $\overline{\psi}_{11}{}^*$ и $\overline{\psi}_{21}{}^*$, для которой функции $rf_n{}^\circ$, $rf_{nj}{}^\circ$ являются уже ограниченными при $r \to 0$.

Аналогичным образом во второй задаче получаем, что $rf_{n1}{}^\circ$ ограничена, а функции $rf_n{}^\circ$ и $rf_{n2}{}^\circ$ имеют порядок $O(r^{-1})$ при $r \to 0$. Тогда точно так же, как и выше, сведем решение второй задачи к решению систем (2.1) — (2.3) для первой задачи (относительно потенциалов $\overline{\varphi}_1{}^*$, $\overline{\psi}_{11}{}^*$ и $\overline{\psi}_{21}{}^*$), если обозначим

$$\overline{\varphi}_1{}^* \equiv \partial\overline{\varphi}^* / \partial\theta, \quad \overline{\psi}_{11}{}^* \equiv \partial\overline{\psi}_1{}^* / \partial\theta, \quad \overline{\psi}_{21}{}^* \equiv \partial\overline{\psi}_2{}^* / \partial\theta$$

$$U_k \equiv -r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_k{}^\circ}{dr}\right) + r^2\omega^2 U_k{}^\circ, \quad V_k \equiv V_k{}^\circ$$

$$W_k \equiv -r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dW_k{}^\circ}{dr}\right) + r^2\varkappa^2 W_k{}^\circ$$

Для этих систем функции rf_n и rf_{nj} являются уже ограниченными при $r \to 0$. Естественно, что оценки (2.21) и (2.22) и изложенный выше прием сведения одной задачи к другой остаются верными и в случае плоской деформации (отсутствует только преобразование Лапласа по z).

Отметим, что случаи $l = 1/2$ и $l = 1$, которые были исключены из рассмотрения, получаются из найденных результатов в пределе, когда $l \to 1/2$ и $l \to 1$.

Если на границах $\theta = 0, \pi / l$ заданы различные смешанные условия

$$w_\theta = w_\theta{}^\circ(t, r, z), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}{}^\circ(t, r, z)$$
$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}{}^\circ(t, r, z) \quad (\theta = 0) \tag{2.23}$$
$$w_r = w_r{}^1(t, r, z), \quad w_z = w_z{}^1(t, r, z)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}{}^1(t, r, z) \quad (\theta = \pi / l)$$

то решение нестационарной динамической задачи с условиями (2.23) можно представить суперпозицией решений рассмотренных выше первой и второй задач.

В самом деле, решение данной задачи можно представить в виде суммы решений задач с условиями (2.24) и (2.25)

$$w_\theta = 0, \quad \sigma_{\theta r} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0 \quad (\theta = 0) \tag{2.24}$$
$$w_r = w_r{}^1(t, r, z), \quad w_z = w_z{}^1(t, r, z)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}{}^1(t, r, z) \quad (\theta = \pi / l)$$

$$w_\theta = w_\theta{}^\circ(t, r, z), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}{}^\circ(t, r, z) \tag{2.25}$$
$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}{}^\circ(t, r, z) \quad (\theta = 0)$$
$$w_r = 0, \quad w_z = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (\theta = \pi / l)$$

Но нулевые граничные условия в (2.24) при $\theta = 0$, согласно формулам для U_k, V_k и W_k, дают $\partial\varphi / \partial\theta = \psi_1 = \partial\psi_2 / \partial\theta = 0$ $(\theta = 0)$, а с помощью формул для $U_k{}^\circ$, $V_k{}^\circ$ и $W_k{}^\circ$ получаем из (2.25): $\varphi = \partial\psi_1 / \partial\theta = \psi_2 = 0$ $(\theta = \pi / l)$. Тогда, если в задаче с условиями (2.24) продолжить через границу $\theta = 0$ потенциалы φ, ψ_2 четным, а ψ_1 — нечетным образом, то получим вторую задачу для области $|\theta| < \pi / l$

$$w_r = w_r^1(t, r, z), \quad w_z = w_z^1(t, r, z)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^1(t, r, z) \quad (\theta = \pm \pi / l)$$

Аналогичным образом, продолжая через границу $\theta = \pi / l$ потенциалы φ и ψ_2 нечетным, а ψ_1 — четным образом, сводим задачу с граничным условием (2.25) к первой задаче для области $0 < \theta < 2\pi / l$

$$w_\theta = w_\theta^\circ(t, r, z), \quad \sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta r}^\circ(t, r, z)$$
$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^\circ(t, r, z) \quad (\theta = 0, 2\pi / l)$$

Данный метод решения пространственных нестационарных динамических задач остается верным и для решения стационарных задач, если в полученных выше формулах заменить q на $ik + \varepsilon$ ($\operatorname{Im} k = 0$, $\varepsilon > 0$) и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

В заключение отметим, что изложенным выше методом автором были получены и исследованы точные аналитические решения плоских и пространственных задач о дифракции упругих цилиндрических и сферических волн на гладком твердом клине произвольного угла раствора [1, 2].

3. Проверим непосредственно, что полученные в работе выражения для потенциалов являются решениями поставленных задач. Для этого в случае первой задачи достаточно показать, что найденные в виде рядов выражения изображений потенциалов $\bar{\varphi}^*$, $\bar{\psi}_1^*$ и $\bar{\psi}_2^*$ из (2.14) удовлетворяют соответственно системам (2.1), (2.2) и (2.3).

Будем предполагать, что функции U_k, V_k и W_k — кусочно-гладкие. Сначала покажем, что при $\theta \to +0$, $\theta \to \pi / l - 0$ удовлетворяются заданные граничные условия в системах (2.1) — (2.3). Выражение $\bar{\psi}_1^*$ из (2.14) можно записать в виде

$$\bar{\psi}_1^* = \frac{\gamma^2 q^2}{s} C_{12} \sin l\theta K_l(r\varkappa) + \sum_{n=1}^{\infty} (E_{n1}^\circ + E_{n1}^1) \sin nl\theta \tag{3.1}$$

$$E_{n1}^\circ = -K_{nl}(r\varkappa) \int_0^{r-\varepsilon} I_{nl}(x\varkappa) f_{n1}(x)\, x\, dx - I_{nl}(r\varkappa) \int_{r+\varepsilon}^{\infty} K_{nl}(x\varkappa) f_{n1}(x)\, x\, dx$$

$$E_{n1}^1 = -K_{nl}(r\varkappa) \int_{r-\varepsilon}^{r} I_{nl}(x\varkappa) f_{n1}(x)\, x\, dx -$$
$$- I_{nl}(r\varkappa) \int_r^{r+\varepsilon} K_{nl}(x\varkappa) f_{n1}(x)\, x\, dx \qquad (\varepsilon > 0)$$

Используя асимптотику

$$K_\nu(r\varkappa) I_\nu(x\varkappa) \to (x / r)^\nu / (2\nu), \qquad \operatorname{Re} \nu \to +\infty \tag{3.2}$$

можно показать, что члены ряда E_{n1}° экспоненциально убывают при $n \to \infty$ и, следовательно, ряд с E_{n1}° равномерно сходится по $\theta \in [0, \pi / l]$. Тогда при $\theta \to +0$ и $\theta \to \pi / l - 0$, переходя к пределу под знаком суммы, получаем, что этот ряд, а также член, зависящий от C_{12} в (3.1), дают в пределе нулевые значения.

Таким образом, остается исследовать предел при $\theta \to +0$ и $\theta \to \pi / l - 0$ ряда с E_{n1}^1. Представляя выражение $x^2 f_{n1}(x) = -2\pi^{-1} l^2 n\, [V_0(x) - (-1)^n V_1(x)]$ в окрестности точки $x = r$ по формуле Тейлора и используя асимптотику (3.2), находим при

$n \to \infty$

$$E_{n1}^1 \sim \frac{2l^2n}{\pi}\left[\int\limits_{r-\varepsilon}^{r}\left(\frac{x}{r}\right)^{nl}\frac{dx}{x}+\int\limits_{r}^{r+\varepsilon}\left(\frac{x}{r}\right)^{-nl}\frac{dx}{x}\right]\times$$
$$\times\frac{V_0(r)-(-1)^nV_1(r)}{2nl}\sim\frac{2}{\pi n}$$

Отсюда получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}E_{n1}^1(r)\sin nl\theta = S\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{3.3}$$

$$S=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nl\theta}{n}[V_0(r)-(-1)^nV_1(r)]$$

При $\theta \to +0$ и $\theta \to \pi / l - 0$ отличные от нуля значения может дать только ряд S из (3.3), который преобразуем к виду

$$S=\frac{V_0(r)}{\pi i}\int\limits_{l_0}\frac{\sin\nu(\pi-l\theta)}{\nu\sin\nu\pi}d\nu+\frac{V_1(r)}{\pi i}\int\limits_{l_0}\frac{\sin\nu l\theta}{\nu\sin\nu\pi}d\nu$$

Здесь контур l_0 (идущий от $+\infty - i\varepsilon$ до $+\infty + i\varepsilon$) в виде петли охватывает интервал $[1, +\infty)$, пересекая действительную ось в точке ν_0 $(0 < \nu_0 < 1)$.

Деформируя контур l_0 в мнимую ось с обходом полюса $\nu = 0$ и учитывая нечетность подынтегральных функций, получаем окончательно

$$S=V_0(r)\frac{\pi-l\theta}{\pi}+V_1(r)\frac{l\theta}{\pi}$$

Отсюда и находим, что при $\theta \to +0$ и $\theta \to \pi / l - 0$ функция $\overline{\psi}_1^*$ принимает заданные граничные значения

$$\overline{\psi}_1^* = V_0 \quad (\theta = 0), \quad \overline{\psi}_1^* = V_1 \quad (\theta = \pi / l)$$

Аналогичным образом получим, что выражения $\partial\overline{\varphi}^* / \partial\theta$ и $\partial\overline{\psi}_2^* / \partial\theta$ удовлетворяют заданным граничным условиям в системах (2.1) и (2.3) соответственно (дифференцирование по θ рядов $\overline{\varphi}^*$ и $\overline{\psi}_2^*$ под знаком суммы обосновывается тем, что полученные ряды из производных сходятся равномерно по θ для $\theta \in [\varepsilon, \pi / l - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$).

Покажем, что $\overline{\varphi}^*, \overline{\psi}_1^*$ и $\overline{\psi}_2^*$ из (2.14) удовлетворяют дифференциальным уравнениям соответственно в системах (2.1), (2.2) и (2.3). Ряд $\overline{\psi}_1^*$ (без дополнительного члена с C_{12}, который, очевидно, удовлетворяет уравнению $(\Delta_1 - \varkappa^2)\overline{\psi}_1^* = 0$), с помощью преобразования Ватсона можно представить в виде контурного интеграла

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_{n1}\sin nl\theta=\frac{l^2}{\pi i}\int\limits_{l_1}\frac{\nu\sin\nu(\pi-l\theta)}{\sin\nu\pi}E_\nu(r,\varkappa,V_0)\,d\nu+ \tag{3.4}$$
$$+\frac{l^2}{\pi i}\int\limits_{l_1}\frac{\nu\sin\nu l\theta}{\sin\nu\pi}E_\nu(r,\varkappa,V_1)\,d\nu$$

$$E_\nu(r,\varkappa,V)=K_{\nu l}(r\varkappa)\int\limits_0^r I_{\nu l}(x\varkappa)V(x)\frac{dx}{x}+I_{\nu l}(r\varkappa)\int\limits_r^\infty K_{\nu l}(x\varkappa)V(x)\frac{dx}{x}$$

Контур l_1 проходит из области $\operatorname{Im}\nu < 0$ в область $\operatorname{Im}\nu > 0$, пересекая интервал $(0, 1)$, и при $|\nu| \to \infty$ идет вдоль лучей $\arg\nu = \pm\alpha$ $(0 < \alpha < \pi / 2)$.

При записи выражения (3.4) использована при $\operatorname{Re}\nu \to +\infty$ оценка $E_\nu = O(\nu^{-2})$, которую можно получить при помощи асимптотики (3.2). В результате подынтегральные функции в (3.4) экспоненциально убывают по ν при $|\nu| \to \infty$ вдоль l_1 при $\theta \in$

$\in (0, \pi / l)$. Тогда, применяя к $\bar{\psi}_1^*$ дифференциальный оператор $(\Delta_1 - \varkappa^2) \equiv \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}\partial / \partial r + r^{-2}\partial^2 / \partial\theta^2 - \varkappa^2$, можно внести его под знаки интегралов. Учитывая при этом, что

$$(\partial^2 / \partial r^2 + r^{-1}\partial / \partial r - \nu^2 l^2 r^{-2} - \varkappa^2) E_\nu (r, \varkappa, V) = -r^{-2} V (r) \tag{3.5}$$

находим

$$(\Delta_1 - \varkappa^2) \bar{\psi}_1^* = -\frac{l^2 V_0(r)}{\pi r^2 i} \int\limits_{l_1} \frac{\nu \sin \nu (\pi - l\theta)}{\sin \nu\pi} d\nu - \frac{l^2 V_1(r)}{\pi r^2 i} \int\limits_{l_1} \frac{\nu \sin \nu l\theta}{\sin \nu\pi} d\nu$$

Так как подынтегральные выражения — нечетные функции ν, то, деформируя контур l_1 в мнимую ось, находим, что интегралы обращаются в нуль, и в результате получаем $(\Delta_1 - \varkappa^2)\bar{\psi}_1^* = 0$, что и требовалось.

Аналогичным образом ряд для $\bar{\varphi}^*$ из (2.14) (и точно также для $\bar{\psi}_2^*$) можно представить в виде

$$\frac{1}{2} F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos nl\theta = \frac{1}{2} F_0 + \frac{l}{\pi i} \int\limits_{l_1} \frac{\cos \nu (\pi - l\theta)}{\sin \nu\pi} E_\nu (r, \omega, U_0) \, d\nu + \frac{l}{\pi i} \int\limits_{l_1} \frac{\cos \nu l\theta}{\sin \nu\pi} E_\nu (r, \omega, U_1) \, d\nu$$

В результате, применяя оператор $(\Delta_1 - \omega^2)$ к $\bar{\varphi}^*$ и учитывая уравнение (3.5) и тот факт, что $(\Delta_1 - \omega^2) F_0 / 2 = f_0 / 2 = l\pi^{-1} r^{-2} [U_0 (r) - U_1 (r)]$, находим для любого θ из интервала $(0, \pi / l)$

$$(\Delta_1 - \omega^2) \bar{\varphi}^* = \frac{l}{\pi r^2} [U_0(r) - U_1(r)] - \frac{l U_0(r)}{\pi i r^2} \int\limits_{l_1} \frac{\cos \nu (\pi - l\theta)}{\sin \nu\pi} d\nu + \frac{l U_1(r)}{\pi i r^2} \int\limits_{l_1} \frac{\cos \nu l\theta}{\sin \nu\pi} d\nu = -\frac{l U_0(r)}{\pi i r^2} \fint_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos \nu (\pi - l\theta)}{\sin \nu\pi} d\nu + \frac{l U_1(r)}{\pi i r^2} \fint_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos \nu l\theta}{\sin \nu\pi} d\nu = 0$$

так как подынтегральные функции — нечетные по ν. Черточка в обозначении интеграла указывает, что интеграл берется в смысле главного значения по Коши при интегрировании вдоль мнимой оси.

Аналогичным образом и в случае второй задачи можно показать, что полученные выражения (2.18) — решения систем (2.15) — (2.17).

Поступила 31 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поручиков В. Б.* Дифракция сферической упругой волны на клине. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
2. *Поручиков В. Б.* Дифракция цилиндрической упругой волны на клине. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
3. *Бабич В. М., Молотков И. А.* Математические методы теории упругих волн. Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела, т. 10. М., ВИНИТИ, 1977.
4. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. *Гузь А. Н., Головчан В. Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев, «Наукова думка», 1972.
6. *Костров Б. В.* Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.