Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГРАНИЧНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В ДИНАМИКЕ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

М. И. Гусейн-Заде

(Москва)

Ранее [1] при помощи асимптотического анализа трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки дано построение внутреннего напряженного состояния, указаны пути получения уточненных результатов. Ниже рассматривается вопрос о получении на основе асимптотического подхода обоснованных граничных и начальных условий, соответствующих двумерным динамическим уравнениям, и об установлении их асимптотической точности.

1. Рассмотрим задачу сведения трехмерной динамической задачи теории упругости для тонкой пластинки к двумерной, включая вопрос об удовлетворении граничных и начальных условий.

Отметим, что в [1] при рассмотрении внутренней задачи исходили из такого соотношения интенсивностей смещений, которое соответствует изгибным движениям пластинки. Поэтому деформация в плоскости пластинки играла второстепенную роль. Но в случае однородной пластинки как в статике, так и в динамике имеет место полное разделение изгиба и деформации в плоскости пластинки, их относительные интенсивности никак не связаны между собой.

Заметим, что при сведении трехмерной задачи к двумерной нет необходимости заранее задавать асимптотику исследуемого напряженного состояния с тем, чтобы впоследствии убедиться в правильности исходных предположений. Подробно рассмотреть этот вопрос здесь не представляется возможным, но можно показать, что та или иная асимптотика автоматически следует из предположения о характере изменяемости исследуемого напряженного состояния в различных направлениях.

Пусть в узкой области длиной $2l$ и толщиной $2h$ исследуется явление, имеющее характерный размер рисунка деформации l_0 и характерное время t_0. Существенных упрощений в исходной задаче теории упругости, очевидно, можно ожидать лишь для явлений, у которых l_0 значительно больше h, а время t_0 значительно больше величины $h\sqrt{\rho / E}$, соизмеримой со временем прохождения расстояния h возмущением в упругой среде. Этим условиям отвечает внутреннее напряженное состояние, и его определение можно свести к некоторому итерационному процессу, на каждом этапе которого нужно решать некоторые двумерные уравнения. При построении этого напряженного состояния принимаются во внимание уравнения теории упругости и граничные условия в напряжениях на лицевых плоскостях. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности и начальным условиям исходной задачи теории упругости и сформулировать граничные и начальные условия внутренней задачи, вводятся в рассмотрение некоторые быстроизменяющиеся напряженные состояния, которые в некотором смысле мало влияют на внутреннее напряженное состояние.

2. Введем безразмерные величины: смещения отнесем к h, а напряжения к модулю упругости E. Будем рассматривать напряженные состояния с различной изменяемостью по разным направлениям с тем, чтобы провести рассуждения, относящиеся как к внутренней задаче, так и к быстроизменяющимся напряженным состояниям. Пусть показатели изменяемости напряженного состояния по пространственным переменным x, y, z равны r_1, r_2, r_3 ($r_1 = p_1 / q$, $r_2 = p_2 / q$, где p_1, p_2, q — целые числа). Это означает, что каждой переменной можно поставить в соответствие характерные размеры $l_i = l\varepsilon^{r_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Так как характерный размер в направлении оси z равен h, то $r_3 = 1$. Характерное время t_0 возьмем в виде

$$t_0 = \varepsilon^{\omega-1} l \sqrt{\rho / E}$$

Параметр ω характеризует изменяемость напряженного состояния по времени.

Выполним преобразование растяжения масштаба, относя переменные x, y, z, t к соответствующим характерным размерам

$$\xi = \frac{x}{l_1}, \quad \eta = \frac{y}{l_2}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}$$

Для любых напряженных состояний решения уравнений, получаемых из уравнений Ламе после перехода к новым переменным, разыскиваем в виде асимптотических рядов по малому параметру $\lambda = \varepsilon^{1/q}$

$$v_x = \varepsilon^{\varkappa} \sum_{s=0} \lambda^s v_x^{(s)}, \ldots \qquad (2.1)$$

Используя соотношения закона Гука, получим аналогичные разложения и для напряжений.

Выбор числа $\varkappa$ в (2.1) несколько условен. При рассмотрении внутреннего напряженного состояния, например, его можно связать с интенсивностью внешних воздействий. Основное, на что следует обратить внимание, состоит в том, что в разложениях для напряжений и смещений вида (2.1) часть первых членов тождественно обращается в нуль, причем количество таких членов различно для различных компонент смещений и напряжений и автоматически определяется характером исследуемого напряженного состояния. Точнее сказать, зависит от изменяемости напряженного состояния по разным направлениям. Определение числа первых тождественно обращающихся в нуль членов в разложениях вида (2.1) приведет, в конечном счете, к установлению асимптотики рассматриваемого напряженного состояния, так как после этого будут известны интенсивности всех смещений и напряжений.

3. Внутреннее напряженное состояние имеет малую изменяемость в плоскости пластинки, для него $0 \leqslant r_i < 1$. Для простоты перейдем к одному показателю изменяемости r в плоскости пластинки, принимая за него

наибольшее значение из r_1 и r_2. Выбор значения $\varkappa$ в (2.1) можно связать с условием, что нормальная нагрузка, приложенная к лицевым плоскостям, не зависит от относительной толщины пластинки. Тогда для деформации в плоскости пластинки $\varkappa = -3 + 3r$, а для изгиба $\varkappa = -4 + 4r$.

Связь параметра ω, характеризующего изменяемость процесса во времени, со значением r нетрудно получить, если предусмотреть, чтобы инерционные члены входили в двумерные динамические уравнения внутреннего напряженного состояния в нулевом приближении. Для деформации в плоскости пластинки имеем $\omega = 1 + r$, а для изгиба $\omega = 2r$.

4. Вблизи края пластинки возникает напряженное состояние погранслоя [2, 3], которое резко затухает при удалении от края. Введение этого напряженного состояния дает возможность удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности пластинки, сформулированным в терминах теории упругости, установить граничные условия внутренней задачи и уточнить напряженное состояние вблизи края.

Погранслой около края $x = 0$ имеет большую изменяемость в направлении осей x и z, а в направлении оси y и во времени имеет ту же изменяемость, что и внутреннее напряженное состояние. Таким образом, для показателей изменяемости в направлении осей x, y, z, t имеем

$$r_1 = 1, \quad r_2 < 1, \; r_3 = 1, \quad 0 \leqslant \omega < 2$$

Значение $\varkappa$ в (2.1) условимся выбирать равным наибольшему порядку величин внутренней задачи, входящих в граничные условия на боковой поверхности.

Для определения $v_x^{(s)}$, $v_z^{(s)}$ получим уравнения плоской деформации для полуполосы

$$(\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial v_x^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v_z^{(s)}}{\partial\zeta}\right) + \mu^*\Delta v_x^{(s)} = \frac{\partial^2 v_x^{(s-4q+2\omega q)}}{\partial\tau^2} - R_\xi^{(s)}$$

$$(\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial v_x^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v_z^{(s)}}{\partial\zeta}\right) + \mu^*\Delta v_z^{(s)} = \frac{\partial v_z^{(s-4q+2\omega q)}}{\partial\tau^2} - R_\zeta^{(s)}$$

$$R_\xi^{(s)} = (\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial^2 v_y^{(s-q+p)}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \mu^*\frac{\partial^2 v_x^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta^2}$$

$$R_\zeta^{(s)} = (\lambda^* + \mu^*)\frac{\partial^2 v_y^{(s-q+p)}}{\partial\eta\partial\zeta} + \mu^*\frac{\partial^2 v_x^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta^2}$$

Здесь λ^*, μ^* — константы Ламе, отнесенные к модулю упругости E. Их выражения через коэффициент Пуассона ν имеют вид

$$\lambda^* = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu^* = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

На лицевых плоскостях выполняются условия

$$\left[\frac{\partial v_x^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial v_z^{(s)}}{\partial\xi}\right]_{\zeta=\pm1} = 0$$

$$\left[\frac{\partial v_z^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial v_x^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial v_y^{(s-q-p)}}{\partial\eta}\right]_{\zeta=\pm1} = 0$$

Определение $v_y^{(s)}$ сводится к решению антиплоской задачи для полуполосы

$$\mu^*\left(\frac{\partial^2 v_y^{(s)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v_y^{(s)}}{\partial\zeta^2}\right)=\frac{\partial^2 v_y^{(s-4q+2\omega q)}}{\partial\tau^2}-R_\eta^{(s)}$$

$$R_\eta^{(s)}=(\lambda^*+\mu^*)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial v_x^{(s-q+p)}}{\partial\xi}+\frac{\partial v_z^{(s-q+p)}}{\partial\zeta}\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2 v_y^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta^2}\right]$$

$$\left[\frac{\partial v_y^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial v_z^{(s-q+p)}}{\partial\eta}\right]_{\zeta=\pm1}=0$$

Таким образом, определение погранслоя в динамических задачах так же, как и в статике, распадается на решение плоской и антиплоской задач для полуполосы. Причем для динамических процессов, для которых $0\leqslant\omega<2$, обе эти задачи имеют квазистатический характер. Инерционные члены вообще не входят в уравнения ряда первых приближений, а в тех приближениях, в которых они появляются, определяются через величины, известные из предыдущих приближений.

Можно убедиться, что двумерным динамическим уравнениям внутренней задачи, отвечающим точности $O(\varepsilon^{2-2r})$, соответствуют те же граничные условия, что и в статике [2]. Таким образом, для динамических задач не только граничные условия классической теории, но и уточненные [2] имеют тот же вид, что и в статике. Граничные условия, соответствующие классической теории, имеют точность $O(\varepsilon^{1-r})$, а уточненные граничные условия — точность — $O(\varepsilon^{2-2r})$.

5. Рассмотрим вопрос о введении быстро изменяющегося напряженного состояния, не оказывающего в некотором смысле заметного влияния на внутреннее напряженное состояние пластинки, но позволяющего совместно с последним удовлетворить начальным условиям исходной задачи теории упругости.

В четырехмерном пространстве x, y, z, t плоскость $t=0$ — своего рода граница для изучаемого явления. Это подсказывает мысль ввести в рассмотрение дополнительное напряженное состояние, имеющее большую изменяемость во времени. В направлении осей x, y это напряженное состояние должно иметь ту же изменяемость, что и внутреннее напряженное состояние. Таким образом, для дополнительного напряженного состояния показатели изменяемости в направлении осей x, y, z, t имеют значения $r_1<1,\ r_2<1,\ r_3=1,\ \omega=2$.

Значение $\varkappa$ в (2.1) условимся выбирать равным наибольшему порядку смещений внутренней задачи.

Для определения $v_x^{(s)}(xy)$, $v_z^{(s)}$ получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 v_x^{(s)}}{\partial\zeta^2}-2(1+\nu)\frac{\partial^2 v_x^{(s)}}{\partial\tau^2}=-R_\xi^{(s)}\quad(xy)$$

$$\frac{\partial^2 v_z^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{\partial^2 v_z^{(s)}}{\partial\tau^2}=-R_\zeta^{(s)}$$

$$R_\xi^{(s)}=\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v_z^{(s-q+p)}}{\partial\xi\partial\zeta}+\frac{1}{2(1-\nu)}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial v_x^{(s-2q+2p)}}{\partial\xi}+\frac{\partial v_y^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta}\right)+\Delta v_x^{(s-2q+2p)}\,(xy)$$

$$R_\zeta^{(s)} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial v_x^{(s-q+p)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y^{(s-q+p)}}{\partial \eta} \right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \Delta v_z^{(s-2q+2p)}$$

При $\zeta = \pm 1$ должны выполняться условия отсутствия напряжений, т. е. условия

$$\left.\frac{\partial v_x^{(s)}}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\pm 1} + \left.\frac{\partial v_z^{(s-q+p)}}{\partial \xi}\right|_{\zeta=\pm 1} = 0 \quad (xy)$$

$$\left.\frac{\partial v_z^{(s)}}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\pm 1} + \frac{\nu}{1-\nu} \left.\left(\frac{\partial v_x^{(s-q+p)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y^{(s-q+p)}}{\partial \eta} \right)\right|_{\zeta=\pm 1} = 0$$

Таким образом, построение дополнительного напряженного состояния в любом приближении сводится к решению волновых уравнений при некоторых начальных и граничных условиях, причем для $s < q - p$ уравнения и граничные условия однородные, а при $s \geqslant q - p$ — в общем говоря, неоднородные.

Заметим, что для рассматриваемого напряженного состояния распространение возмущений для смещений в поперечном направлении (относительно пластинки) происходит со скоростью продольных волн, а для смещений в плоскости пластинки — со скоростью поперечных волн.

Будем рассматривать изгиб и деформацию в плоскости пластинки раздельно. При изгибе $v_x^{(s)}$, $v_y^{(s)}$ — нечетные функции ζ, а $v_z^{(s)}$ — четная. Для деформации в плоскости пластинки, наоборот, $v_x^{(s)}$, $v_y^{(s)}$ — четные, а $v_z^{(s)}$ — нечетные. Поэтому для построения дополнительного напряженного состояния достаточно рассмотреть волновые уравнения для четной и нечетной по ζ функции. Эта задача хорошо исследована, и ею следует воспользоваться для формулировки начальных условий двумерной задачи.

6. Построение дополнительного напряженного состояния свелось к решению волнового уравнения (6.1) при граничных и начальных условиях (6.2), (6.3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \varphi(\zeta, \tau) \tag{6.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\pm 1} = \psi(\tau) \tag{6.2}$$

$$u(\zeta, 0) = f(\zeta), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = F(\zeta) \tag{6.3}$$

Решение этой задачи складывается из решения однородного уравнения, удовлетворяющего нулевым граничным и заданным начальным условиям, и из решения неоднородного уравнения при неоднородных граничных условиях и нулевых начальных условиях.

Пусть $u(\zeta, \tau)$ — четная функция ζ. Если $\varphi(\zeta, \tau) = 0$, $\psi(\tau) = 0$, то решение волнового уравнения имеет вид

$$u(\zeta, \tau) = u_0 + u_1\tau + u^*(\zeta, \tau) \tag{6.4}$$

$$u_0 = \int_0^1 f(\zeta)\, d\zeta, \quad u_1 = \int_0^1 F(\zeta)\, d\zeta$$

Первое слагаемое в (6.4) дает постоянную во времени часть решения, второе — линейно-зависящую от времени, третье чисто осциллирующую во времени часть решения.

Для того чтобы решение $u(\zeta, \tau)$ являлось чисто осциллирующей во времени функцией, необходимо и достаточно, чтобы средние значения начальных данных (6.3) обращались в нуль, т. е.

$$\int_0^1 f(\zeta)\, d\zeta = 0, \quad \int_0^1 F(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{6.5}$$

Условия (6.5) для краткости будем называть условиями осцилляции.

Если $\varphi(\zeta, \tau)$, $\psi(\tau)$ в (6.1), (6.2) отличны от нуля, но являются чисто осциллирующими во времени функциями, то решение уравнения (6.1) при условиях (6.2) и при нулевых начальных условиях, очевидно,— чисто осциллирующая во времени функция.

Пусть $u(\zeta, \tau)$ — нечетная функция ζ. Тогда решение уравнения (6.1) при условиях (6.2), (6.3) — всегда чисто осциллирующая во времени функция.

Таким образом, для нечетных по ζ функций решение волнового уравнения имеет всегда чисто осциллирующий во времени характер, а для четных по ζ функций — лишь при выполнении условий осцилляции, которые состоят в требовании, чтобы средние значения начальных данных обращались в нуль.

7. Рассмотрим вопрос о выполнении начальных условий исходной задачи теории упругости, о формулировке начальных условий двумерной внутренней задачи и об установлении их асимптотической точности на примере задачи поперечных движений пластинки в результате скачкообразного изменения поверхностной нагрузки в момент времени $t = 0$.

Пусть при $t < 0$ пластинка находилась в покое, но была в деформированном состоянии под действием некоторой поверхностной нагрузки. При $t = 0$ в связи со скачкообразным изменением поверхностной нагрузки пластинка приходит в движение. Для исходной задачи теории упругости в начальный момент три компоненты смещения принимают заданное значение, а три компоненты скорости обращаются в нуль. На лицевых плоскостях пластинки имеем граничные условия

$$E\sigma_{xz}|_{\zeta=\pm 1} = \tau_x^-\ (xy), \quad E\sigma_z|_{\zeta=\pm 1} = \pm\tau_z^- \quad (t<0)$$
$$E\sigma_{xz}|_{\zeta=\pm 1} = \tau_x^+\ (xy), \quad E\sigma_z|_{\zeta=\pm 1} = \pm\tau_z^+ \quad (t>0)$$

Внутреннее напряженное состояние пластинки как при $t < 0$, так и при $t > 0$ можно представить в виде асимптотических рядов вида (2.1), в которых $\varkappa = -4q + 4p$. Величины $v_x^{(s)}\ (xy)$, $v_z^{(s)}$ — полиномы по ζ, степень которых возрастает с увеличением номера приближения. Имеем

$$\begin{aligned}
&v_x^{(0)} = 0 && (xy), \quad v_z^{(0)} = v_{z0}^{(0)} \\
&v_x^{(q-p)} = \zeta v_{x1}^{(q-p)} && (xy), \quad v_z^{(q-p)} = v_{z0}^{(q-p)} \\
&v_x^{(2q-2p)} = \zeta v_{x1}^{(2q-2p)} && (xy), \quad v_z^{(2q-2p)} = v_{z0}^{(2q-2p)} + \zeta^2 v_{z2}^{(2q-2p)} \\
&v_x^{(3q-3p)} = \zeta v_{x1}^{(3q-3p)} + \zeta^3 v_{x3}^{(3q-3p)} && (xy), \quad v_z^{(3q-3p)} = v_{z0}^{(3q-3p)} + \zeta^2 v_{z2}^{(3q-3p)} \\
&\ldots && v_z^{(4q-4p)} = v_{z0}^{(4q-4p)} + \zeta^2 v_{z2}^{(4q+4p)} + \zeta^4 v_{z4}^{(4q-4p)}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

и т. д. При $\tau = 0$ непрерывны все величины, входящие в правые части соотношений (7.1), за исключением $v_{x1}^{(3q-3p)}(xy)$, $v_{z2}^{(4q-4p)}$. Последние при $\tau = 0$ претерпевают скачок, величина которого выражается через скачок поверхностной нагрузки

$$v_{x1}^{(3q-3p)}\big|_{\tau=-0} - v_{x1}^{(3q-3p)}\big|_{\tau=+0} = 2(1+\nu)\lambda^{q-p}\frac{\tau_x^- - \tau_x^+}{E} \qquad (xy)$$

$$v_{z2}^{(4q-4p)}\big|_{\tau=-0} - v_{z2}^{(4q-4p)}\big|_{\tau=+0} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\lambda^{q-p}}{E} \times$$
$$\times\left(\frac{\partial(\tau_x^- - \tau_x^+)}{\partial\xi} + \frac{\partial(\tau_y^- - \tau_y^+)}{\partial\eta}\right)$$

Наличие множителя λ^{q-p} в приведенных условиях указывает на то, что вклад от действия поверхностных касательных усилий сопоставим с вкладом от действия поверхностных нормальных усилий только в случае, если $\lambda^{q-p}\tau_x \sim \tau_z$. Так как по предположению $\tau_z \sim \lambda^0$, то $\tau_x \sim \lambda^{-q+p}$.

Введем в рассмотрение задачи $A_x^{(s)}(xy)$, $A_z^{(s)}$, относящиеся соответственно к определению смещений $V_x^{(s)}(xy)$, $V_z^{(s)}$ для чисто осциллирующего во времени напряженного состояния.

Можно убедиться, что решения задач $A_x^{(s)}(xy)$ для $s < 3q - 3p$ тождественно обращаются в нуль, так как сводятся к решению однородных уравнений при однородных начальных и граничных условиях. Решение же задачи $A_x^{(3q-3p)}$ отлично от нуля, так как оно удовлетворяет однородным уравнениям и граничным условиям при ненулевых начальных условиях.

Решения задач $A_z^{(s)}$ для $s < 4q - 4p$ удовлетворяют однородным уравнениям, однородным граничным условиям и следующим начальным условиям:

$$V_z^{(s)}\big|_{\tau=0} = v_{z0}^{(s)}\big|_{\tau=+0} - v_{z0}^{(s)}\big|_{\tau=-0}, \qquad \frac{\partial V_z^{(s)}}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} = 0$$

Из требования, что решения задач $A_z^{(s)}$ $(s < 4q - 4p)$ подчиняются условиям осцилляции (6.5), получим начальные условия двумерной внутренней задачи для $\tau > 0$

$$v_{z0}^{(s)}\big|_{\tau=+0} = v_{z0}^{(s)}\big|_{\tau=-0}, \qquad \frac{\partial v_{z0}^{(s)}}{\partial\tau}\Big|_{\tau=+0} = 0 \tag{7.2}$$

После выполнения условий осцилляции начальные условия задач $A_z^{(s)}$ $(s < 4q - 4p)$ становятся однородными, в результате чего решения этих задач тождественно обращаются в нуль.

Рассмотрим задачу $A_z^{(4q-4p)}$, которая сводится к решению однородного волнового уравнения при однородных граничных условиях и при следующих начальных условиях:

$$V_z^{(4q-4p)}\big|_{\tau=0} = v_{z0}^{(4q-4p)}\big|_{\tau=-0} - v_{z0}^{(4q-4p)}\big|_{\tau=+0} + \tag{7.3}$$
$$+\zeta^2\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\lambda^{q-p}}{E}\left[\frac{\partial(\tau_x^- - \tau_x^+)}{\partial\xi} + \frac{\partial(\tau_y^- - \tau_y^+)}{\partial\eta}\right], \qquad \frac{\partial V_z^{(4q-4p)}}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} = 0$$

Из условия, что искомое решение подчиняется условиям осцилляции (6.5), получим уточненные начальные условия двумерной внутренней задачи

$$(7.4)\qquad v_{z0}^{(4q-4p)}\big|_{\tau=+0}=v_{z0}^{(4q-4p)}\big|_{\tau=-0}+\frac{1}{3}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{\lambda^{q-p}}{E}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial(\tau_x^- - \tau_x^+)}{\partial\xi}+\frac{\partial(\tau_y^- - \tau_y^+)}{\partial\eta}\right],\quad \frac{\partial v_{z0}^{(4q-4p)}}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=+0}=0$$

Начальные условия (7.3) задачи $A_z^{(4q-4p)}$ с учетом (7.4) принимают вид

$$V_z^{(4q-4p)}\big|_{\tau=0}=(1-3\zeta^2)\,(v_{z0}^{(4q-4p)}\big|_{\tau=-0}-v_{z0}^{(4q-4p)}\big|_{\tau=+0})$$

От начальных условий (7.2), (7.4), заданных для разных приближений, можно перейти к начальным условиям, не содержащим индекса приближения, но определенным с некоторой асимптотической точностью.

Начальные условия, соответствующие двумерным уравнениям внутренней задачи, имеют вид

а) с точностью $O(\varepsilon^{4-4r})$

$$(7.5)\qquad u_{z0}\big|_{t=+0}=u_{z0}\big|_{t=-0},\quad \frac{\partial u_{z0}}{\partial t}\bigg|_{t=+0}=0$$

б) с точностью большей, чем $O(\varepsilon^{4-4r})$

$$(7.6)\qquad u_{z0}\big|_{t=+0}=u_{z0}\big|_{t=-0}+h^2\frac{1}{3E}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial(\tau_x^- - \tau_x^+)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_y^- - \tau_y^+)}{\partial y}\right],\quad \frac{\partial u_{z0}}{\partial t}\bigg|_{t=+0}=0$$

Здесь $u_{z0}=hv_{z0}$.

Таким образом, на основе асимптотического подхода для задачи изгиба при любой точности получаются только два обоснованных начальных условия: в начальный момент времени задаются поперечные смещения и поперечные скорости точек срединной плоскости.

Число начальных условий (7.5), имеющих асимптотическую точность $O(\varepsilon^{4-4r})$, находится в полном соответствии с типом двумерного уравнения внутренней задачи, отвечающего той же асимптотической точности. Для более высокой точности (выше чем $O(\varepsilon^{4-4r})$) такого соответствия нет: имеем два уточненных начальных условия (7.6), а в двумерное уравнение внутренней задачи входит четвертая производная по времени.

Это лишний раз говорит о целесообразности использования итерационного метода для получения уточненных результатов при исследовании динамического поведения тонких пластинок. На каждом этапе решения задачи итерационным методом имеется полное соответствие между типом уравнения и числом начальных и граничных условий.

Заметим, что напряжения $\sigma_{xz}\,(xy)$, σ_{zz} для осциллирующего напряженного состояния и для внутренней задачи имеют одинаковый порядок. При определении напряжений $\sigma_{xx}\,(xy)$, σ_{xy} с точностью, превышающей точность гипотезы Кирхгофа — Лява, следует принимать во внимание и осциллирующее напряженное состояние.

8. Остановимся кратко на формулировке обоснованных начальных условий и об установлении их асимптотической точности для двумерной динамической задачи о деформации пластинки в ее плоскости. В качестве примера рассмотрим задачу о движении, возникающем в плоскости пластинки, в результате скачкообразного изменения поверхностной нагрузки. Пусть граничные условия на лицевых плоскостях пластинки имеют вид

$$E\sigma_{xz}|_{\zeta=\pm1} = \pm\tau_x^- \quad (xy), \quad E\sigma_z|_{\zeta=\pm1} = \tau_z^- \quad (t<0)$$

$$E\sigma_{xz}|_{\zeta=\pm1} = \pm\tau_x^+ \quad (xy), \quad E\sigma_z|_{\zeta=\pm1} = \tau_z^+ \quad (t>0)$$

Проведем рассуждения, аналогичные тем, какие были сделаны при рассмотрении изгибных движений пластинки. Для плоскостных движений пластинки получим, что для каждого приближения асимптотический подход дает четыре начальных условия для двух перемещений и двух скоростей в плоскости пластинки, число которых находится в соответствии с характером двумерных динамических уравнений. Установлено, что начальные условия

$$u_{x0}|_{t=+0} = u_{x0}|_{t=-0} \quad (xy), \quad \left.\frac{\partial u_{x0}}{\partial x}\right|_{t=+0} = 0 \quad (xy)$$

имеют асимптотическую точность $O(\varepsilon^{4-4r})$.

Получены уточненные начальные условия, точность которых выше, чем $O(\varepsilon^{4-4r})$. Для рассматриваемой задачи они имеют вид

$$u_{x0}|_{t=+0} = u_{x0}|_{t=-0} - \frac{1+\nu}{6(1-\nu)}\frac{1}{E}\frac{\partial(\tau_z^- - \tau_z^+)}{\partial x} \quad (xy),$$

$$\left.\frac{\partial u_{x0}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad (xy)$$

Отметим, что порядок напряжений σ_z для осциллирующего напряженного состояния и для внутренней задачи один и тот же. При определении напряжений $\sigma_x\,(xy)$, $\sigma_{xz}\,(xy)$ с точностью, превышающей $O(\varepsilon^{2-2r})$, следует принимать во внимание и осциллирующее напряженное состояние.

Поступила 30 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гусейн-Заде М. И.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
2. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.