Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ МАТЕРИАЛЕ

М. А. Гринфельд

(Москва)

Изучается поведение скачков производных перемещений на волновых фронтах типа слабых разрывов и слабых ударных волн, распространяющихся в нелинейной гиперупругой среде. Приводятся необходимые сведения о ковариантном дифференцировании по времени тензоров различного строения, определенных на движущейся поверхности, а также формулы для производных некоторых тензорных полей и для изменения геометрического расхождения вдоль лучей.

Известные лучевые методы вычисления интенсивности волновых фронтов [1] доставляют ряд тождественных соотношений, которым удовлетворяют значения разрывов производных на бихарактеристиках; эти тождества позволяют по заданным в начальный момент скачкам производных перемещений определить их значения в дальнейшем и, тем самым, отделить рассмотрение сильного или слабого разрыва от исследования решения в остальных точках пространства. Развитые в работе [1] методы, однако, существенно связаны с линейностью задач. В последнее время широкое распространение получили методы исследования сингулярных поверхностей, основанные на использовании соотношений совместности и значительно менее чувствительные к нелинейности уравнений [2,3]; при изучении слабых разрывов эти методы также позволяют получить необходимые тождества на бихарактеристиках. Во вторую схему, однако, не удается включить рассмотрение ударных волн в нелинейных средах, поскольку фундаментальная роль бихарактеристик в этом случае в значительной мере утрачивается. С другой стороны, согласно результатам работ [4–9], лучевые представления оказываются весьма полезными при исследовании слабых ударных волн в жидкости, причем нелинейная постановка приводит к существенно иным законам затухания по сравнению с акустической. Применяемый в данной работе метод исследования сингулярных поверхностей является весьма общим и состоит в использовании бесконечной совокупности уравнений в частных производных (определяющей системы), получаемой с помощью различных соотношений совместности. В линейном случае уравнения определяющей системы эквивалентны формулам переноса, доставляемым известными лучевыми методами. Определяющая система может использоваться для изучения различных типов сингулярных поверхностей, распространяющихся в различных материалах. Для «ударных» особенностей линейных гиперболических задач и для слабых разрывов нелинейных задач определяющая система оказывается рекуррентной, т. е. M первых уравнений этой системы полностью описывают изменение $M-1$ первых ненулевых векторов разрыва, что позволяет находить эти векторы поочередно. В случае ударных волн в нелинейно-упругой среде рекуррентность определяющей системы нарушается, однако она вновь восстанавливается в каждом порядке последовательных приближений при нахождении решения определяющей системы в виде рядов по малому параметру, характеризующему масштаб интенсивности слабой ударной волны в начальный момент. Соотношения, отвечающие первому приближению, значительно отличаются от акустических [1, 10], но вполне согласуются с полученными ранее для слабых ударных волн в жидкости. В последнее время иной метод изучения слабых ударных волн на основе использования бесконечной системы тождеств был предложен в работе [11].

В п. 1 сущность предлагаемого подхода демонстрируется на простейшем примере модельного уравнения газовой динамики (следует, однако, иметь в виду, что, хотя рассмотрение модельного уравнения передает основные черты метода и структуры возникающих уравнений, два момента общей ситуации при этом теряются: во-первых, одномерность задачи делает конструкцию лучей тривиальной, во-вторых, в случае одной зависимой переменной не видны особенности постановки начальных данных для определяющей системы). В п. 2 приводятся уравнения движения гиперупругого тела в компонентах, отнесенных к исходной конфигурации; их вывод имеется, например, в работе [12], из которой заимствованы также некоторые обозначения. В п. 3 приводятся необходимые сведения о ковариантном дифференцировании по времени тензоров различного строения, определенных на движущейся поверхности; этот формальный аппарат оказывается весьма эффективным при упрощении громоздких уравнений определяющей системы. Один из этапов исследования слабых ударных волн по предлагаемой в этой статье схеме оказывается эквивалентным изучению распространения слабых разрывов, однако трактовка последней задачи, данная в работах [2,3], оказывается для поставленных целей недостаточной (в особенности в части, касающейся введения лучей); в связи с этим в п. 4, 5 дается новое рассмотрение задачи о слабом разрыве. Кроме того, изучение последней задачи подсказывает вид начальных условий для определяющей системы и способ введения лучевой системы координат в случае ударной волны. В п. 6 рассматривается распространение слабых ударных волн в невозмущенную область гиперупругого тела. Наконец, в п. 7 приводятся уточнения предыдущих результатов (относящихся к волнам с изолированным собственным значением акустического тензора), необходимые для рассмотрения фронтов поперечного типа, распространяющихся в недеформированную область изотропного нелинейно-упругого тела.

1. Модельная задача газовой динамики состоит в решении задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными z, t и одной зависимой $v(z, t)$

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(v(z, t))}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

При нахождении кусочно-непрерывных решений в точках разрыва должно выполняться условие

$$c\,[v]_-^+ = [f(v)]_-^+ \tag{1.2}$$

где $[\ \ ]_-^+$ означает скачок величины, а c — скорость перемещения разрыва.

Пусть закон движения разрыва $z = z(t)$, где $z(t)$ — достаточно гладкая функция. Будем предполагать, что поведение решения $v(z, t)$ и его производных необходимого порядка в левосторонней и правосторонней полуокрестностях разрыва удовлетворяет условиям применимости леммы Адамара [13]; такие разрывы будем в дальнейшем называть правильными. Предельное значение разрывной величины при приближении к разрыву справа (слева) будем помечать знаком плюс (минус); ясно, что эти предельные значения являются функциями только одной независимой переменной, например, времени t. В соответствии с леммой Адамара имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial^i v(z, t)}{\partial z \ldots \partial z_\pm} = c(t)\frac{\partial^{i+1} v(z, t)}{\partial z \ldots \partial z_\pm} + \frac{\partial^{i+1} v(z, t)}{\partial t\, \partial z \ldots \partial z_\pm} \tag{1.3}$$

Почленно вычитая соотношения (1.3) со знаком плюс и минус, приходим к соотношениям совместности для разрывов

$$(1.4)\qquad \left[\frac{\partial^{i+1} v(z,t)}{\partial t\,\partial z\ldots\partial z}\right]_-^+ = \frac{d\varkappa_i(t)}{dt} - c(t)\varkappa_{i+1}(t)$$

$$\varkappa_0(t) = [v(z,t)]_-^+, \quad \varkappa_i(t) = \left[\frac{\partial^i v(z,t)}{\partial z\ldots\partial z}\right]_-^+$$

Для получения определяющей системы поступим следующим образом. Первое уравнение получаем, приравнивая нулю скачок на разрыве левой части (1.1) и заменяя $[\partial v(z,t)/\partial t]_-^+$ согласно первому ($i=0$) из соотношений совместности (1.4). Для получения i-го уравнения определяющей системы ту же процедуру следует применить к уравнению, возникающему при i-кратном дифференцировании (1.1) по z, при этом $[\partial^{i+1} v/\partial t\partial z\ldots\partial z]_-^+$ следует заменить согласно (1.4). Выражая предельные значения слева с помощью $\varkappa_i$ и предельных значений справа, получаем

$$(1.5)\qquad \frac{d\varkappa_0}{dt} = \varkappa_1[c - f'(v_+ - \varkappa_0)] + [f'(v_+ - \varkappa_0) - f'(v_+)]\frac{\partial v}{\partial z_+} =$$

$$= \varkappa_1[c - f'(v_+ - \varkappa_0)] + E_0\left(\varkappa_0, v_+, \frac{\partial v}{\partial z_+}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\varkappa_i}{dt} = \varkappa_{i+1}[c - f'(v_+ - \varkappa_0)] + E_i\left(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_i, v_+, \ldots, \frac{\partial^{i+1} v}{\partial z\ldots\partial z_+}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В случае ударного разрыва система (1.5) дополняется вытекающим из (1.2) соотношением

$$(1.6)\qquad c\varkappa_0 + f(v_+ - \varkappa_0) - f(v_+) = 0$$

Согласно определению скорости разрыва, имеем

$$(1.7)\qquad dz(t)/dt = c$$

Соотношения (1.5) — (1.7) составляют определяющую систему, которой удовлетворяют функции $\varkappa_i(t)$, $z(t)$, $c(t)$. Дополним эту систему начальными условиями $\varkappa_i(t) = a_i$, $z(0) = z_*$.

Примечания. 1°. Вместо определяющей системы (1.5) — (1.7) можно получить иную (эквивалентную), используя в i-м уравнении i-кратное дифференцирование, например, по t. При этом потребовались бы дополнительные соотношения совместности для разрывов производных.

2°. Предположим, что функции $v_+, \ldots, \partial^i v/\partial z\ldots\partial z_+, \ldots$ известны как функции t и рассмотрим слабый разрыв j-го порядка. В этом случае, по определению, функции $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{j-1}$ обращаются в нуль, а $\varkappa_j \neq 0$ ($j \geqslant 1$). При этом уравнение (1.6) и первые $j-1$ уравнений (1.5) удовлетворяются автоматически, а из j-го уравнения следует $c = f'(v_+)$. Система (1.5) имеет рекуррентный характер, т. е. любые M первых уравнений замкнуты относительно входящих в них неизвестных, что дает возможность решать их поочередно сверху вниз. В этом случае теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, по существу, гарантируется единственность решения определяющей системы. Рекуррентный характер определяющей системы сохраняется для разрыва типа ударной волны ($\varkappa_0 \neq 0$), когда модельное уравнение линейно (т. е. линейна функция f). Из приведенных рассуждений очевидна также законность использования нескольких первых уравнений определяющей системы, даже если использование остальных уравнений невозможно вследствие недостаточной гладкости функции f или недостаточной правильности разрыва. В этом смысле рассматриваемый метод исследования сингулярных поверхностей не связан существенным образом с условиями аналитичности.

3°. Обычно функции $z(t)$, $v_+, \ldots, \partial^i v / \partial z \ldots \partial z_+, \ldots$ не известны заранее как функции времени. Небольшое видоизменение позволяет, однако, использовать определяющую систему в следующей практически важной ситуации. Пусть в начальный момент времени известно положение разрыва и значение скачков $\varkappa_i$, а также известно, что решение перед разрывом является частью всюду гладкого заранее заданного решения $v^*(z, t)$ (например, распространению волны в невозмущенную область соответствует функция $v^*(z, t) \equiv 0$). Требуется определить положение волны $z(t)$ и функции $\varkappa_i(t)$. При рассмотрении такой задачи в определяющей системе следует произвести замену $v_+ = v^*(z, t)$, $\partial v(z, t) / \partial z_+ = \partial v^*(z, t) / \partial z$ и т. д.

4°. Уже только потому, что уравнения определяющей системы нелинейны, их решения, вообще говоря, существуют лишь на ограниченном интервале времени; однако даже внутри области существования решения могут нарушиться исходные предпосылки применимости системы (например, если рассматриваемый слабый разрыв обгоняется ударной волной, нарушаются условия применимости леммы Адамара).

Можно убедиться, что определяющая система, соответствующая ударному разрыву и нелинейной функции f, оказывается не рекуррентной. При этом единственность решения задачи Коши для определяющей системы, если не накладывать никаких дополнительных условий, нарушается. Действительно, эволюция ударной волны существенно зависит от состояния за фронтом [5]. Поскольку из всей информации о состоянии за фронтом в задачу Коши входят только константы a_i, достаточно выбрать две разные функции с совпадающими значениями a_i, чтобы убедиться в неединственности решения.

Определяющую систему, однако, удобно использовать при исследовании слабых ударных волн. Ударную волну назовем слабой, если в начальный момент выполняются условия

$$z(0) = z_*, \quad \varkappa_0(0) = \varepsilon, \quad x_1(0) = a_1, \ldots, \varkappa_N(0) = a_N, \ldots \tag{1.8}$$

а функции $z(t)$, $c(t)$, $\varkappa_N(t)$ можно аппроксимировать отрезками рядов, удовлетворяющих определяющей системе и начальным данным (1.8)

$$z(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p z_p(t), \quad c(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p c_p(t) \tag{1.9}$$

$$\varkappa_0(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p \varkappa_{0p}(t), \quad \varkappa_N(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \varkappa_{Np}(t) \text{ при } N \geqslant 1$$

Подставляя ряды (1.9) в соотношения (1.5) — (1.8), можно заметить, что в каждом порядке по ε определяющая система оказывается рекуррентной. Это обеспечивает единственность рядов (1.8).

Примечание 5°. Можно убедиться, что функции $z_0(t)$, $c_0(t)$, $\varkappa_{10}(t)$ совпадают с соответствующими функциями, описывающими распространение слабого разрыва первого порядка.

Рассмотрим слабую ударную волну, распространяющуюся в невозмущенную область. В этом случае функции $\varkappa_{0\,1}(t)$ и $\varkappa_{10}(t)$, описывающие интенсивность разрыва v и $\partial v/\partial z$ в низшем по ε приближении, имеют вид

$$\varkappa_{01}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - f''(0)\, a_1 t}}, \quad \varkappa_{10}(t) = \frac{a_1}{1 - f''(0)\, a_1 t} \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что при $f''(0)\,a_1 > 0$ через конечное время $1 / f''(0)a_1$ коэффициенты рядов (1.9) обращаются в бесконечность.

Чтобы получить некоторое представление о том, какому состоянию за фронтом ударной волны соответствует единственное решение определяющей системы вида (1.9), рассмотрим функцию $f = v^2/2$ и начальные условия $z(0) = 0$, $\varkappa_0(0) = \varepsilon$ (согласно условию устойчивости Жермена — Баде [14], следует рассматривать только разрывы, для которых $\varepsilon < 0$), $\varkappa_1(0) = a_1$, $\varkappa_N(0) = 0$ при $N \geqslant 2$. В этом случае удается полностью определить ряды (1.9), в частности

$$\varkappa_0(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-a_1 t}}, \quad \varkappa_1(t) = \frac{a_1}{1-a_1 t}, \quad \varkappa_N(t) = 0 \text{ при } N \geqslant 2 \tag{1.11}$$

Методом характеристик можно проверить, что решению (1.11) соответствует состояние за фронтом волны в начальный момент $v(z, 0) = -\varepsilon - a_1 z$, причем при $a_1 < 0$ на эволюцию ударной волны влияет лишь начальное состояние в области $-\varepsilon/a_1 < z < 0$ (если, конечно, из области $z < -\varepsilon/a_1$ не приходит ударная волна, перегоняющая рассматриваемую); функция $-\varepsilon - a_1 z$ является рядом Тейлора, определяемым коэффициентами $\partial^i v / \partial z \ldots \partial z_- = -\varkappa_i(0)$. При $a_1 < 0$, как следует из (1.11), функции $\varkappa_0(t)$, $\varkappa_1(t)$ затухают до нуля (такой же характер затухания, согласно (1.10) имеют первые члены рядов (1.9) для произвольной функции f и любых начальных данных, удовлетворяющих условию $f''(0)\,a_1 < 0$). Из (1.11) вытекает асимптотический (при $t \to \infty$) закон затухания интенсивности ударной волны $\varkappa_0 \sim \text{const}\,\sqrt{t}$. Как показано в работе [15], этот асимптотический закон затухания является весьма универсальным, что отчасти вытекает также из (1.10), (1.11) и того, что при достаточно малом ε и фиксированном $a_1 < 0$ любой профиль в области $-\varepsilon/a_1 < z < 0$ близок к линейному.

2. В любой момент времени t точке x сплошного тела соответствуют лагранжевы координаты x^1, x^2, x^3. В исходном состоянии точке x соответствуют нужное количество раз дифференцируемый радиус-вектор $\mathrm{x}(x)$, метрический тензор $x_{ij}(x)$, $x^{ij}(x)$, с помощью которого поднимаются и опускаются латинские индексы, базисы $\mathrm{x}_i(x) = \partial\mathrm{x} / \partial x^i$, $\mathrm{x}^i = x^{ij}\mathrm{x}_j$. Ковариантная производная на базе метрического тензора x_{ij} обозначается латинским индексом после вертикальной черты. В деформированном состоянии точке x соответствует радиус-вектор $\mathrm{X}(x, t) = \mathrm{x} + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}(x, t) = u^i(x, t)\,\mathrm{x}_i$ — вектор перемещения.

Если гиперупругое тело характеризуется потенциалом $\varphi(x, u_{k|l})$ и плотностью в исходном состоянии $m(x)$, то в области дважды непрерывно дифференцируемых перемещений должны выполняться соотношения (для простоты предполагается, что массовые силы отсутствуют)

$$m\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_{i|j}}\right)_{|j} \tag{2.1}$$

Если в теле распространяется сингулярная поверхность

$$x^i = x^i(\xi^\alpha, t), \quad i = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2 \tag{2.2}$$

на которой перемещения непрерывны, а их производные терпят разрыв, то на ней в силу интегрального закона сохранения импульса должны выполняться условия

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_{i|j}}\right]_-^+ n_j + \left[m\frac{\partial u^i}{\partial t}\right]_-^+ c = 0 \tag{2.3}$$

Не останавливаясь на выводе соотношения (2.3), отметим лишь, что $n_j\,(\xi, t)$ — компоненты единичной нормали $\mathbf{n}$ по исходному базису, а $c\,(\xi, t)$ — скорость в направлении этой нормали, характеризующие поверхность с радиус-вектором

$$\xi\,(\xi, t) = \mathrm{x}\,(x\,(\xi, t)) \tag{2.4}$$

которую следует отличать от реальной поверхности разрыва, имеющей радиус-вектор $\Xi\,(\xi, t) = \mathrm{X}\,(x\,(\xi, t), t)$. Геометрические и кинематические характеристики обеих поверхностей, однако, тесно связаны. Кроме того, эти поверхности совпадают в важном частном случае, когда материал по одну сторону фронта покоится.

Функции m и φ, фиксирующие конкретную гиперупругую модель, предполагаются непрерывными вместе со всеми производными, встречающимися в дальнейшем.

3. Поверхности (2.4) соответствует метрический тензор $\xi_{\alpha\beta}\,(\xi, t)$, $\xi^{\alpha\beta}\,(\xi, t)$, с помощью которого осуществляется поднятие и опускание греческих индексов, а также осуществляется ковариантное дифференцирование, обозначаемое греческим индексом после точки с запятой. Определим ковариантное дифференцирование по времени смешанных тензоров на движущейся поверхности следующим соотношением:

$$\frac{\delta T^{i\cdot\alpha\cdot}_{\cdot j\cdot\beta}(\xi, t)}{\delta t} = \frac{\partial T^{i\cdot\alpha\cdot}_{\cdot j\cdot\beta}}{\partial t} - v^\gamma T^{i\cdot\alpha\cdot}_{\cdot j\cdot\beta;\gamma} + x^i_{lm} v^l T^{m\cdot\alpha\cdot}_{\cdot j\cdot\beta} - \tag{3.1}$$

$$- x^m_{lj} v^l T^{i\cdot\alpha\cdot}_{\cdot m\cdot\beta} + v^\alpha_{\cdot;\gamma} T^{i\cdot\gamma\cdot}_{\cdot j\cdot\beta} - v^\gamma_{\cdot;\beta} T^{i\cdot\alpha\cdot}_{\cdot j\cdot\gamma}$$

$$v^i(\xi, t) = \frac{\partial x^i(\xi, t)}{\partial t}, \quad v^\alpha(\xi, t) = v^i(\xi, t)\,x_{i\cdot}^{\cdot\alpha}, \quad x^{i\cdot}_{\cdot\alpha}(\xi, t) = \frac{\partial x^i(\xi, t)}{\partial \xi^\alpha}$$

Здесь $x^i_{jk}\,(x)$ — связности второго рода исходной конфигурации. Операция (3.1) ковариантна по отношению к естественной при рассмотрении движущихся поверхностей замене $x^{i'} = x^{i'}\,(x^i)$, $\xi^{\alpha'} = \xi^{\alpha'}\,(\xi^\alpha, t)$ [16]. Определение (3.1) в общем случае не совпадает ни с определением $\delta/\delta t$-производной Томаса [17], ни с определением Трусделла — Тупина [16]. Однако операция (3.1) эквивалентна производной Томаса для тензоров, имеющих только латинские индексы, и эквивалентна производной Трусделла — Тупина для тензоров, имеющих только греческие индексы, и тензоров, имеющих только латинские индексы, являющихся «сужениями». Тензор $T^{i}_{\cdot j}{}^*\,(\xi, t)$ является «сужением» тензора $T^{i}_{\cdot j}\,(x, t)$, если $T^{i}_{\cdot j}{}^*\,(\xi, t) = T^{i}_{\cdot j}\,(x\,(\xi, t), t)$. Из сказанного следует, что операция (3.1) сохраняет ранее полученные соотношения [16, 17].

$$\frac{\delta T^{i}_{\cdot j}{}^*}{\delta t} = \frac{\partial T^{i}_{\cdot j}(x, t)^*}{\partial t} + c n^k T^{i}_{\cdot j|k}(x, t)^* \tag{3.2}$$

$$\frac{\delta x_{ij}}{\delta t} = \frac{\delta \delta_j^i}{\delta t} = \frac{\delta x^{ij}}{\delta t} = \frac{\delta x^{ijk}}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\delta n_i}{\delta t} = -c_{;\alpha} x_{i\cdot}^{\cdot\alpha}, \quad \frac{\delta \xi_{\alpha\beta}}{\delta t} = -2cb_{\alpha\beta}, \quad \frac{\delta \xi^{\alpha\beta}}{\delta t} = 2cb^{\alpha\beta}$$

Здесь $b_{\alpha\beta}(\xi, t) = x^{i}_{\alpha;\beta} n_i$ — тензор второй квадратичной формы поверхности (2.4). Используя определение (3.1), получаем

$$\frac{\delta x^{i}_{\cdot\alpha}}{\delta t} = (cn^i)_{;\alpha}, \quad \frac{\delta \delta^\alpha_\beta}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta \varepsilon_{\alpha\beta}}{\delta t} = -cb^{\omega}_{\omega}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \frac{\delta \varepsilon^{\alpha\beta}}{\delta t} = cb^{\omega}_{\omega}\varepsilon^{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

$$\frac{\delta \mathbf{x}^*}{\delta t} = \frac{\delta \boldsymbol{\xi}}{\delta t} = \mathbf{c} = c\mathbf{n}, \quad \frac{\delta \mathbf{x}^*_i}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta \boldsymbol{\xi}_\alpha}{\delta t} = (c\mathbf{n})_{;\alpha}$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi, t)$ — дискриминантный тензор поверхности (2.4).

Можно проверить, что для операции (3.1) справедлива формула Лейбница для производной произведения, а также возможна перестановка дифференцирования и свертки.

В дальнейшем при специальном выборе системы координат ξ^α объект (2.4) будет рассматриваться как двухпараметрическая совокупность лучей, каждый из которых определяется соотношением (2.4) при фиксированных ξ^α. Комбинация $DF^i(\xi, t)/Dt \equiv \delta F^i/\delta t + v^\gamma F^{i}_{\cdot;\gamma}$ совпадает с абсолютной производной тензора $F^i(\xi, t)$ вдоль луча. Величина $J(\xi, t) = |\xi_{\alpha\beta}(\xi, t)|^{1/2} / |\xi_{\pi\omega}|(\xi, t_0)|^{1/2}$ называется геометрическим расхождением; справедливо соотношение

$$\frac{\partial J(\xi, t)}{\partial t} = J(v^{\alpha}_{;\alpha} - cb^{\alpha}_{\alpha}) \tag{3.4}$$

Определение (3.1) сохраняет форму соотношений совместности [16–18]. Разрывы производных поля перемещений $u^i(x, t)$ можно выразить через геометрические и кинематические характеристики сингулярной поверхности, а также через векторы разрыва $h^{i}_{\cdot N}(\xi, t) = [u^{i}_{\cdot|r_1\ldots r_N}]^{+}_{-}\, n^{r_1}\ldots n^{r_N}$ (ясно, что нумерующий векторы разрыва индекс N не тензорный) и их производные. В частности, на поверхности разрыва первых производных имеем

$$[u^{i}_{\cdot|j}]^{+}_{-} = h^{i}_{\cdot 1} n_j, \quad \left[\frac{\partial u^i}{\partial t}\right]^{+}_{-} = -h^{i}_{\cdot 1} c \tag{3.5}$$

$$[u^{i}_{\cdot|jk}]^{+}_{-} = h^{i}_{\cdot 2} n_j n_k + 2h^{i}_{\cdot 1;\alpha} n_{(j} x_{k)\cdot}^{\cdot\alpha} - h^{i}_{\cdot 1} b_{jk}, \quad b_{jk} \equiv b_{\alpha\beta} x_{j\cdot}^{\cdot\alpha} x_{k\cdot}^{\cdot\beta} \tag{3.6}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} u^{i}_{\cdot|j}\right]^{+}_{-} = -h^{i}_{\cdot 2} c n_j + \frac{\delta h^{i}_{\cdot 1}}{\delta t} n_j - (h^{i}_{\cdot 1} c)_{;\alpha} x_{j\cdot}^{\cdot\alpha}$$

$$\left[\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}\right]^{+}_{-} = h^{i}_{\cdot 2} c^2 - 2c \frac{\delta h^{i}_{\cdot 1}}{\delta t} - h^{i}_{\cdot 1} \frac{\delta c}{\delta t}$$

Если на поверхности (2.4) терпят разрыв производные, начиная со второго порядка, имеют место следующие соотношения совместности:

$$[u^{i}_{\cdot|jk}]^{+}_{-} = h^{i}_{\cdot 2} n_j n_k, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} u^{i}_{\cdot|j}\right]^{+}_{-} = -h^{i}_{\cdot 2} c n_j, \quad \left[\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}\right]^{+}_{-} = h^{i}_{\cdot 2} c^2 \tag{3.7}$$

$$[u^{i}_{\cdot|jkl}]^{+}_{-} = h^{i}_{\cdot 3} n_j n_k n_l + 3h^{i}_{\cdot 2;\alpha} n_{(j} n_k x_{l)\cdot}^{\cdot\alpha} - 3h^{i}_{\cdot 2} n_{(j} b_{kl)} \tag{3.8}$$

$$\left[\frac{\partial u^{i}_{\cdot|jk}}{\partial t}\right]^{+}_{-} = -h^{i}_{\cdot 3} c n_j n_k + \frac{\delta h^{i}_{\cdot 2}}{\delta t} n_j n_k - 2(h^{i}_{\cdot 2} c)_{;\alpha} n_{(j} x_{k)\cdot}^{\cdot\alpha} + h^{i}_{\cdot 2} c b_{jk}$$

$$\left[\frac{\partial^2 u^i_{\cdot|j}}{\partial t^2}\right]_-^+ = h^i_{\cdot 3}c^2 n_j - 2\,\frac{\delta h^i_{\cdot 2}}{\delta t}\,cn_j + (h^i_{\cdot 2}c^2)_{;\alpha}\,x_{j\cdot}^{\cdot\alpha} - h^i_{\cdot 2}n_j\,\frac{\delta c}{\delta t}$$

$$\left[\frac{\partial^3 u^i}{\partial t^3}\right]_-^+ = -\,h^i_{\cdot 3}c^3 + 3c^2\,\frac{\delta h^i_{\cdot 2}}{\delta t} + 3c\,\frac{\delta c}{\delta t}\,h^i_{\cdot 2}$$

Используя алгоритм Томаса [17], можно получить следующие два равенства, частично раскрывающих структуру соотношений совместности для разрывов высших производных:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u^i_{\cdot|r_1\ldots r_N}\right]_-^+ n^{r_1}\ldots n^{r_N} = h^i_{\cdot N+2}c^2 - 2c\cdot\frac{\delta h^i_{\cdot N+1}}{\delta t} - \tag{3.9}$$

$$- h^i_{\cdot N+1}\frac{\delta c}{\delta t} + L^i(h^j_{\cdot 0},\ldots,h^j_{\cdot N})$$

$$[u^i_{\cdot|jkr_1\ldots r_N}]_-^+ n^{r_1}\ldots n^{r_N} = h^i_{\cdot N+2}n_j n_k + 2h^i_{\cdot N+1;\alpha}x_{(j\cdot}^{\cdot\alpha}n_{k)} -$$

$$- h^i_{\cdot N+1}b_{jk} + M^i_{jk}(h^l_{\cdot 0},\ldots,h^l_{\cdot N})$$

Здесь L^i, M^i_{jk} — дифференциальные операции от своих аргументов, зависящие также от геометрических и кинематических характеристик поверхности разрыва.

Развернутое рассмотрение операции (3.1) дано автором ранее [1].

4. Перейдем к построению определяющей системы уравнений, соответствующей сингулярной поверхности в упругой среде. Для получения первого уравнения следует приравнять скачки на сингулярной поверхности обеих частей (2.1) и затем, используя указанные соотношения совместности, выразить скачки всех величин через векторы разрыва и предельные значения производных решений с одной из сторон поверхности разрыва. Для получения $(N+1)$-го уравнения необходимо проделать ту же процедуру с уравнением, получаемым из (2.1) дифференцированием по $x^{r_1}, \ldots, x^{r_N}$, после чего результат свернуть с $n^{r_1}, \ldots, n^{r_N}$. При рассмотрении ударной волны эту систему следует дополнить аналогичным образом обработанным уравнением (2.3).

Покажем по индукции, что если известна кинематика поверхности слабого разрыва ($h^i_{\cdot 1} = 0$), предельные значения производных решения $u^i(x, t)$ с одной стороны волны (см. примечание 3°) и значения векторов $h^i_{\cdot 2}, \ldots, h^i_{\cdot M}$ в начальный момент, то первые M уравнений определяющей системы позволяют определить эти векторы в некотором промежутке времени. Такое свойство, следуя примечанию 2°, будем называть рекуррентностью определяющей системы, хотя M первых уравнений теперь уже не замкнуты относительно определяемых ими векторов (в них входит также вектор $h^i_{\cdot M+1}$). В иной интерпретации равносильный результат был впервые получен в работах [2, 3].

Используя соотношения (3.7), первое уравнение определяющей системы можно привести к следующему виду:

$$(mc^2 x^{ik} - Q^{ik})\,h_{k2} = 0, \quad Q^{ik} = \varphi^{ijkl}n_j n_l \tag{4.1}$$

$$\varphi^{ijkl}(x, u_{m|n}) = \frac{\partial^2\varphi(x, u_{m|n})}{\partial u_{i|j}\partial u_{k|l}}$$

---

[1] *Гринфельд М. А.* $\delta/\delta t$-производная и ее свойства. Деп. ВИНИТИ, № 1255-76, 1976.

В целях сокращения записи аргументы функций в уравнениях определяющей системы не выписываются; в связи с этим следует иметь в виду, что, в конечном счете, независимыми переменными в этих уравнениях являются ξ^α и t, например, в (4.1) $\varphi^{ijkl} = \lim \varphi^{ijkl}(x, u_{m/n}(x, t))$ при $x^i \to x^i(\xi, t)$.

Поскольку на волне ускорения $h_{k2} \neq 0$ (для определенности доказательство проводится для слабого разрыва порядка 2), этот вектор является нетривиальным решением (4.1), а $c^2(\xi, t)$ соответствует одному из собственных значений этой системы; два других собственных значения будем различать значением индекса L; вещественность собственных значений гарантирована симметричностью акустического тензора Q^{ik}.

Предположим, что $c^2(\xi, t) \neq c_L{}^2(\xi, t)$. Собственным значениям c^2 и $c_L{}^2$ соответствуют собственные векторы $e_i(\xi, t)$, $e_{iL}(\xi, t)$. Если все собственные значения различны, имеем

$$x^{ij}e_ie_{jL} = 0, \quad x^{ij}e_{i1}e_{i2} = 0 \tag{4.2}$$

Если же $c_1{}^2 = c_2{}^2$, то выбор собственных векторов $e_{iL}(\xi, t)$ подчиним второму из условий (4.2). Считая кинематику сингулярной поверхности и решение по одну сторону от нее известными, следует считать в принципе известными функции $c^2(\xi, t)$, $c_L{}^2(\xi, t)$, $e_i(\xi, t)$, $e_{iL}(\xi, t)$. Определение вектора $h_{i2}(\xi, t)$ сводится, таким образом, к определению его модуля $h(\xi, t)$, что можно осуществить, используя второе уравнение определяющей системы. Свернув второе уравнение с $e_i(\xi, t)$, после громоздких преобразований, использующих свойства $\delta/\delta t$-производной (п.3), его можно привести к виду

$$\begin{gathered}
2\left(\frac{\delta h}{\delta t} + \frac{1}{mc}\varphi^{ijkl}e_ie_kx_l^{\cdot\alpha}h_{;\alpha}\right) + h\Bigg[-cb_\alpha^\alpha + \frac{\delta \ln mc^5}{\delta t} + \\
+\left(\frac{1}{mc}\varphi^{ijkl}e_ie_kn_jx_l^{\cdot\alpha}\right)_{;\alpha} + \frac{1}{mc}\varphi^{ijkl}e_je_kn_jx_l^{\cdot\alpha}(\ln mc^5)_{;\alpha} - \\
-\frac{2}{mc^2}\varphi^{ijklmn}e_ie_kn_jn_l\,\frac{\partial u_{m|n}(x, t)}{\partial t}\bigg|_+\Bigg] - 2\chi ch^2 = 0 \\
\chi = \frac{\varphi^{ijklmn}}{2mc^2}e_ie_ke_mn_jn_ln_n, \quad \varphi^{ijklmn}(x, u_{p|q}) = \frac{\partial^3\varphi(x, u_{p|q})}{\partial u_{i|j}\partial u_{k|l}\partial u_{m|n}}
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Меткой плюс обозначается предельное значение соответствующей разрывной величины с той стороны сингулярной поверхности, где движение предполагается известным. При получении (4.3) использовано условие $c(\xi, t) > 0$ — этого всегда можно добиться за счет выбора направления нормали.

Пока еще не фиксировалась какая-либо определенная система координат на сингулярной поверхности. Сделаем это, а именно, потребуем, чтобы в фиксируемой системе координат выполнялось соотношение

$$v^\alpha(\xi, t) = \frac{\partial x^i(\xi, t)}{\partial t}x_i^{\cdot\alpha}(\xi, t) = \frac{1}{mc}\varphi^{ijkl}e_ie_kn_jx_l^{\cdot\alpha} \tag{4.4}$$

такую систему координат на поверхности будем называть лучевой (вопрос о ее существовании рассматривается в п. 5).

Используя свойства $\delta/\delta t$-производной и соотношения (3.4), (4.4), уравнения (4.3) в лучевой системе координат можно привести к следующему виду:

$$(4.5)\qquad 2\,\frac{\partial h(\xi,t)}{\partial t}+h\left[\frac{\partial \ln m\,(x\,(\xi,t))\,c^5(\xi,t)\,J\,(\xi,t)}{\partial t}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{mc^2}\,\varphi^{ijklmn}e_ie_kn_jn_l\,\frac{\partial u_{m|n}(x,t)}{\partial t}\right]-2\chi ch^2=0$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее ξ^α как параметры, что позволяет в некотором промежутке времени определить h (ξ, t) по начальным данным h (ξ, t_0).

Предположим теперь, что векторы $h^i_{.N}$ при $N\leqslant R$ уже определены. Вектор $h^i_{.R+1}$ (ξ, t) будем разыскивать в следующей форме:

$$(4.6)\qquad h^i_{.R+1}(\xi,t)=b(\xi,t)\,e^i(\xi,t)+\sum_{L=1}^{2}b_L(\xi,t)\,e^i_{.L}(\xi,t)$$

Используя соотношения совместности (3.9), уравнение определяющей системы с номером R можно привести к следующему виду:

$$(4.7)\qquad (mc^2x^{ik}-Q^{ik})h_{kR+1}+D^i\,(h_{k2},\ldots,h_{kR})=0$$

Здесь D_i — дифференциальная операция по ξ^α, t от своих аргументов, включающая также геометрические и кинематические характеристики поверхности разрыва и предельные значения производных перемещений по одну сторону от нее — по индуктивному предположению это известная функция ξ^α и t. Свертывая (4.7) с e_{iL} и используя (4.2), (4.6), получаем

$$b_L(\xi,t)=\frac{1}{m\,(c^2-c_L{}^2)}\,e_{iL}D^i\,(h_{k2},\ldots,h_{kR})$$

Остается определить b (ξ, t); для этого воспользуемся уравнением определяющей системы с номером $R+1$, которое приводится к виду

$$(4.8)\qquad (mc^2x^{ik}-Q^{ik})\,h_{kR+2}=2mc\,\frac{\delta h^i_{.R+1}}{\delta t}+$$
$$+\,\varphi^{ijkl}\,(x_j^{\cdot\alpha}n_l+x_l^{\cdot\alpha}n_j)\,h_{kR+1;\,\alpha}+F^i\,(h_{k2},\ldots,h_{kR+1})$$

причем от первых $R-1$ аргументов F^i дифференциальная операция, а от последнего — алгебраическая. Свернем (4.8) с e_i; в лучевой системе координат полученное уравнение приведется к виду

$$(4.9)\qquad \partial b\,(\xi,t)\,/\,\partial t=G\,(b,\ \xi,t)$$

Здесь G — обычная функция своих аргументов. Таким образом, (4.9) — обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее ξ^α как параметры и позволяющее в некотором промежутке времени определить b (ξ, t) по начальным данным. Индукция завершена.

Примечание. 6°. Из приведенных рассуждений очевидно, что в начальный момент достаточно знать не векторы разрыва h_{iN} (ξ, t_0), а лишь их составляющие h_{iN} (ξ, t_0)$\cdot$ $\cdot e^i(\xi,\ t_0)$.

Приведенное доказательство рекуррентности определяющей системы без существенных изменений переносится на случай слабых разрывов более высоких порядков и на случай «ударных» разрывов линейных уравнений.

5. В п. 4 кинематика поверхности слабого разрыва предполагалась известной. Ниже рассматривается процедура определения функций $x^i = x^i(\xi^\alpha, t)$, задающих положение волны в некотором интервале времени по начальным данным.

Описание движения поверхности слабого разрыва начнем с вопроса о существовании на ней лучевой системы координат, т. е. системы координат, в которой выполняется условие (4.4). Предположим, что в некотором промежутке времени $t_0 < t < t_1$ поверхность разрыва задана с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x^i = x^{i'}(\xi^{\alpha'}, t)$, причем матрица метрического тензора $\| \xi_{\alpha\beta}(\xi', t) \|$ невырожденная.

Можно показать, что для некоторого промежутка времени $t_0 < t < t_2$ найдутся определенные единственным образом непрерывно дифференцируемые функции $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\xi^{\alpha'}, t)$ (имеющие обратные $\xi^{\alpha'} = \xi^{\alpha'}(\xi^\alpha, t)$), такие, что $\xi^1(\xi^{\alpha'}, t_0) = \xi^{1'}$, $\xi^2(\xi^{\alpha'}, t_0) = \xi^{2'}$, и система координат на поверхности ξ^α будет лучевой, т. е. для функций $x^i(\xi^\alpha, t) \equiv x^{i'}(\xi^{\alpha'}(\xi^\alpha, t), t)$ будут выполняться соотношения (4.4).

Действительно, объекты, стоящие в левой и правой частях (4.4), корректно определены для функций $x^{i'}(\xi', t)$ (правда, соотношение (4.4) для них, вообще говоря, не выполняется); обозначим эти объекты через $a^{\alpha'}(\xi', t)$ и $b^{\alpha'}(\xi', t)$ соответственно. При введении новых взаимно-однозначных координат на поверхности $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\xi', t)$, $\xi^{\alpha'} = \xi^{\alpha'}(\xi, t)$ определенные по тем же правилам объекты $a^\alpha(\xi, t)$ и $b^\alpha(\xi, t)$ будут связаны с $a^{\alpha'}(\xi', t)$ и $b^{\alpha'}(\xi', t)$ соотношениями

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad & a^\alpha(\xi, t) = a^{\alpha'}(\xi'(\xi, t), t)\,\xi^\alpha_{\alpha'}(\xi'(\xi, t), t) + \frac{\partial \xi^{\alpha'}(\xi, t)}{\partial t}\,\xi^\alpha_{\alpha'}(\xi'(\xi, t), t) \\
& b^\alpha(\xi, t) = b^{\alpha'}(\xi'(\xi, t)t)\,\xi^\alpha_{\alpha'}(\xi'(\xi, t), t), \quad \xi^\alpha_{\alpha'}(\xi', t) = \frac{\partial \xi^\alpha(\xi', t)}{\partial \xi^{\alpha'}}
\end{aligned}
$$

Чтобы система координат ξ^α была лучевой, объекты a^α и b^α должны совпасть; используя (5.1) и переходя к независимым переменным $\xi^{\alpha'}$, это условие можно записать в виде системы уравнений

$$
(5.2)\qquad \frac{\partial \xi^\alpha(\xi', t)}{\partial t} = [a^{\alpha'}(\xi', t) - b^{\alpha'}(\xi', t)]\,\frac{\partial \xi^\alpha(\xi', t)}{\partial \xi^{\alpha'}}
$$

Дополним эту распадающуюся систему уравнений начальными условиями

$$
(5.3)\qquad \xi^1(\xi^{1'}, \xi^{2'}, t_0) = \xi^{1'}, \quad \xi^2(\xi^{1'}, \xi^{2'}, t_0) = \xi^{2'}
$$

Как следует из общей теории [19], задача (5.2), (5.3) имеет единственное решение. Детерминант $|\xi^{\cdot\alpha}_{\alpha'}(\xi', t)|$, определяемый этим решением, непрерывен по t и равен единице при $t = t_0$; тогда для любой точки $\xi^{\alpha'}$ найдутся такая окрестность и такой промежуток времени, что соотношения $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\xi', t)$ будут разрешимы относительно $\xi^{\alpha'}$. Обращая рассуждение, убеждаемся, что функции $\xi^\alpha(\xi', t)$ действительно определяют лучевую систему координат.

Каждую пространственную линию, получающуюся при фиксировании координат ξ^α в лучевом уравнении поверхности $x^i = x^i(\xi^\alpha, t)$, назовем лучом (ср. п. 3). В некоторых случаях лучи, соответствующие поверхности слабого разрыва, могут быть определены без ссылки на решение задачи (5.2), (5.3), а с помощью некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для данного решения $u^i(x, t)$ уравнений (2.1) определим функции $s(x, n, t)$ и $d_k(x, n, t)$, как соответственное значение и нормированный собственный вектор линейной системы уравнений

$$[m(x)s^2 x^{ik}(x) - \varphi^{ijkl}(x, u_{m|n}(x, t))n_j n_l]d_k = 0 \tag{5.4}$$

Эти функции характеризуют возможные (но не обязательно существующие) слабые разрывы. На поверхности, где терпят разрыв вторые производные перемещений, будут терпеть разрыв первые производные функций s и d_k. Сделаем дополнительное предположение, что ветвь $s(x, n, t)$, соответствующая исследуемому слабому разрыву, изолирована от других ветвей во всей области независимых переменных (в дальнейшем под s понимается только эта ветвь); в этом случае справедливы следующие соотношения, родственные «лемме о бихарактеристических направлениях» [19]:

$$\frac{\partial s}{\partial x^q} = \frac{1}{2ms}\frac{\partial \varphi^{ijkl}(x, u_{m|n}(x, t))}{\partial x^q} n_j n_l d_i d_k - \frac{s^2}{2m}\frac{\partial m}{\partial x^q} \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial n_q} = \frac{1}{ms}\varphi^{ijkq} n_j d_i d_k$$

Для получения (5.5) в систему (5.4) следует подставить $s = s(x, n, t)$, $d_k = d_k(x, n, t)$, продифференцировать полученное тождество по соответствующему аргументу и свернуть результат с $d_i(x, n, t)$ (следует иметь в виду, что тождественность дифференцируемого соотношения, вообще говоря, нарушается при замене $x^{ij}n_i n_j$ единицей, что бывает удобно делать при рассмотрении жидкости и других изотропных сред. Это, однако, может повлечь нарушение соотношений (5.5); в этом случае необходимы небольшие изменения рассуждений, на которых здесь не останавливаемся).

Продифференцируем по времени уравнения поверхности слабого разрыва и поля единичных нормалей к ней в лучевой системе координат (дальнейшие выкладки статьи ради краткости проводятся в лагранжевой системе координат, которая в исходной конфигурации является аффинной)

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^p(\xi, t)}{\partial t} &= \frac{\partial x^q(\xi, t)}{\partial t}(x^{p\cdot}_{\cdot\alpha} x^{\cdot\alpha}_{q\cdot} + n^p n_q) = v^\alpha x^p_{\cdot\alpha} + cn^p = \\ &= \frac{1}{mc}\varphi^{ijkl} e_i e_k n_j x^{\cdot\alpha}_{l\cdot} x^{p\cdot}_{\cdot\alpha} + cn^p = \left.\frac{\partial s(x, n, t)}{\partial n_p}\right|_+ \\ \frac{\partial n_p(\xi, t)}{\partial t} &= \frac{\delta n_p}{\delta t} + v^\alpha n_{p;\alpha} = -c_{;\alpha} x^{\cdot\alpha}_{p\cdot} + \left.\frac{\partial s}{\partial n_q}\right|_+ x^{\cdot\alpha}_{q\cdot} n_{p;\alpha} = \\ &= -\left.\frac{\partial s(x, n, t)}{\partial x^q}\right|_+ (\delta_p{}^q - n^q n_p)\end{aligned} \tag{5.6}$$

Поскольку производные функции $s(x, n, t)$ терпят разрыв на фронте волны, меткой плюс явно указывается соответствующее предельное значение. При получении (5.6) использованы соотношения

$$c(\xi, t) = s(x(\xi, t), n(\xi, t), t), e_i(\xi, t) = d_i(x(\xi, t), \quad n(\xi, t), \quad t)$$

$$x^{p\cdot}_{\cdot\alpha} x^{\cdot\alpha}_{q\cdot} = \delta^p_q - n^p n_q, \qquad \frac{\partial s(x, n, t)}{\partial n_l} n_l = s(x, n, t)$$

Согласно п. 3 и определению лучей, соотношения (5.6), (5.7) характеризуют изменения функций x^p, n_p вдоль лучей. Строение областей непрерывной дифференцируемости функции $s(x, n, t)$, вообще говоря, не позволяет использовать эти уравнения для построения лучей и поверхности разрыва; такая возможность, однако, появляется, если решение перед разрывом задано как часть некоторого дважды непрерывно дифференцируемого решения, определенного во всем пространстве (ср. примечание 3).

6. В случае ударной волны, по аналогии с соотношением (4.4), определим лучевую систему координат на поверхности условием

$$mcv^\alpha(\xi, t) = \varphi^{ijkl}_{+} n_j x_l^{\cdot\alpha} e_{i1} e_{k1}, \qquad e_{i1} \equiv \frac{h_{i1}}{|h_{i1}|} \tag{6.1}$$

Если материал перед ударной волной находится в недеформированном состоянии, то, используя формулы (3.5) — (3.8), соотношение (2.3), первые два уравнения определяющей системы и соотношение (6.1) можно привести к следующему виду:

$$[\varphi^{ij}(x, -h_{k1}n_l) - \varphi^{ij}(x, 0)]\, n_j + mc^2 h^{i}_{\cdot 1} = 0, \qquad \varphi^{ij} = \frac{\partial\varphi(x, u_{k|l})}{\partial u_{i|j}} \tag{6.2}$$

$$[mc^2 x^{ik} - \varphi^{ijkl}(x, -h_{p1}n_q) n_j n_l]\, h_{k2} - 2mc \frac{\delta h^i_{\cdot 1}}{\delta t} - m \frac{\delta c}{\delta t} h^i_{\cdot 1} +$$
$$+ \varphi^{ijkl}(x, -h_{p1}n_q)(h_{k1} b_{jl} - 2h_{k1;\,\alpha} n_{(j} x_{l)\cdot}^{\cdot\alpha}) + \frac{\partial\varphi^{ij}(x, -h_{k1}n_l)}{\partial x^j} = 0$$

$$[mc^2 x^{ik} - \varphi^{ijkl}(x, -h_{p1}n_q) n_j n_l]\, h_{k3} - 2mc \frac{\delta h^i_{\cdot 2}}{\delta t} -$$
$$- m \frac{\delta c}{\delta t} h^i_{\cdot 2} + \varphi^{ijkl}(x, -h_{p1}n_q)(h_{k2} b_{jl} - 2h_{k2;\,\alpha} n_{(j} x_{l)\cdot}^{\cdot\alpha}) +$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi^{ij}(x, -h_{p1}n_q)}{\partial x^j \partial x^r} n^r - \frac{\partial\varphi^{ijkl}(x, -h_{p1}n_q)}{\partial x^j}(h_{k2}n_l + h_{k1;\,\alpha} x_{l\cdot}^{\cdot\alpha}) -$$
$$- \frac{\partial\varphi^{ijkl}(x, -h_{p1}n_q)}{\partial x^r}(h_{k2}n_j n_l + 2h_{k1;\,\alpha} n_{(j} x_{l)\cdot}^{\cdot\alpha} - h_{k1} b_{jl})\, n^r +$$
$$+ m_{|r} n^r \left(h^i_{\cdot 2} c^2 - 2c \frac{\delta h^i_{\cdot 1}}{\delta t} - h^i_{\cdot 1} \frac{\delta c}{\delta t}\right) - \varphi^{ijklmn}(x, -h_{p1}n_q)(h_{k2} n_j n_l +$$
$$+ 2h_{k1;\,\alpha} n_{(j} x_{l)\cdot}^{\cdot\alpha} - h_{k1} b_{jl})(h_{m2} n_n + h_{m1;\,\alpha} x_{n\cdot}^{\cdot\alpha}) = 0$$

$$mc \frac{\partial x^i(\xi, t)}{\partial t} x_{i\cdot}^{\cdot\alpha} = \varphi^{ijkl}(x, -h_{p1}n_q)\, n_{(j} x_{l)\cdot}^{\cdot\alpha} e_{i1} e_{k1}$$

Определяющую систему дополним начальными условиями (ср. примечание 6)

$$h^{i}_{\cdot 1}(\xi, t_0)\, e_{i1}(\xi, t_0) = \varepsilon A_1(\xi) \tag{6.3}$$
$$h^{i}_{\cdot N}(\xi, t_0)\, e_{i1}(\xi, t_0) = A_N(\xi), \quad N \geqslant 2; \quad x^i(\xi, t_0) = x_*^{\,i}(\xi)$$

Ударную волну назовем слабой, если описывающие ее функции можно аппроксимировать отрезками следующих рядов (удовлетворяющих определяющей системе и начальным условиям (6.3)):

$$x^i(\xi, t) = \sum_{p=0}^{\infty} x^i_{.p}(\xi, t)\,\varepsilon^p, \quad h^i_{.1}(\xi, t) = \sum_{p=1}^{\infty} h^i_{.1p}(\xi, t)\,\varepsilon^p \tag{6.4}$$

$$h^i_{.N}(\xi, t) = \sum_{p=0}^{\infty} h^i_{.Np}(\xi, t)\,\varepsilon^p, \quad N \geqslant 2$$

Форма рядов (6.4) выбрана с таким расчетом, чтобы при $\varepsilon \to 0$ разрыв первых производных стремился к нулю, тогда как разрывы производных более высоких порядков оставались бы конечными. Подставляя ряды (6.4) в уравнения определяющей системы, можно усмотреть, что в каждом порядке по ε эта система оказывается рекуррентной в смысле п. 4. Сравнивая члены при одинаковых степенях ε в уравнениях (6.2), находим: 1) векторы h_{i11}, h_{i20} — нуль векторы матрицы $A^{ik} = m(x_0)\, c_0{}^2 x^{ik} - \varphi^{ijkl}(x_0, 0)\, n_{j0} n_{l0}$ (меткой нуль помечены объекты, относящиеся к поверхности $x^i = x^i_{.0}(\xi, t)$), 2) уравнения, которым удовлетворяют функции $x^i_{.0}$, c_0, n_{i0}, h_{i20}, совпадают с уравнениями п. 4, описывающими распространение волны ускорения в область покоя (ср. примечание 5).

Предположим, что рассматриваемой волне соответствует изолированное собственное значение $c_0{}^2$ с единственным нормированным нуль-вектором матрицы A^{ik} — $r_i(\xi, t)$. Тогда имеем $h_{i\,20}(\xi, t) = h(\xi, t)\, r_i(\xi, t)$, $h_{i11}(\xi, t) = \eta(\xi, t)\, r_i(\xi, t)$. Для интенсивностей $h(\xi, t)$, $\eta(\xi, t)$ из определяющей системы вытекают следующие уравнения:

$$2\frac{\partial h(\xi, t)}{\partial t} + h\frac{\partial \ln m(x_0)\, c_0{}^5 J_0(\xi, t)}{\partial t} - 2c_0 \nu(\xi, t)\, h^2 = 0 \tag{6.5}$$

$$2\frac{\partial \eta(\xi, t)}{\partial t} + \eta\frac{\partial \ln m(x_0)\, c_0{}^3 J_0(\xi, t)}{\partial t} - c_0 \nu(\xi, t)\, h\eta = 0$$

$$\nu(\xi, t) \equiv \frac{1}{2m(x_0)\, c_0{}^2}\, \varphi^{ijklmn}(x_0, 0)\, n_{j0} n_{l0} n_{n0} r_i r_k r_m$$

$$\eta(\xi, t_0) = A_1(\xi), \quad h(\xi, t_0) = A_2(\xi)$$

Уравнения (6.5) позволяют найти функции η и h и описать в низшем по ε приближении изменение скачков первых и вторых производных перемещений.

Примечание. 7°. Уравнения (6.5) допускают интеграл, поскольку

$$\frac{d}{dt}\frac{h^2}{\eta^4 m(x_0)\, c_0 J_0} = 0$$

Можно показать, что этот интеграл существует для произвольного состояния среды перед фронтом и в сочетании с (4.5) позволяет изучить поведение слабых ударных волн и в этом случае.

Рассмотрим плоскую слабую ударную волну, распространяющуюся в область покоя однородной среды. В этом случае из уравнений (6.5) находим

$$\eta = \frac{A_1}{\sqrt{1 + c_0 \nu A_2 (t - t_0)}}, \quad h = \frac{A_2}{1 + c_0 \nu A_2 (t - t_0)} \tag{6.6}$$

Соотношения (6.6), совершенно аналогичные (1.10), можно преобразовать к более наглядной форме. Для этого обозначим через $\sigma(\xi, t)$ скачок плотности поверхностной силы при переходе через фронт волны. С точностью до членов второго порядка малости по ε на поверхности слабой ударной волны имеем $\sigma(\xi, t) \approx \sigma(\xi, t)\,\mathbf{r}(\xi, t)$, где $\sigma(\xi, t) = \varepsilon\eta(\xi, t)\,m(x_0)\,c_0^2$, $\mathbf{r}(\xi, t) = r^i(\xi, t)\,\mathbf{x}_i$. Определив длину ударной волны формулой $L(\xi, t) = |h_{i1}(\xi, t)| / |h_{i2}(\xi, t)|$, в случае слабой ударной волны с точностью до членов второго порядка малости по ε получаем $L(\xi, t) \approx \Lambda(\xi, t) = \varepsilon\eta / h$.

Соотношения (6.6) можно записать через σ и Λ

$$\Lambda(t) = \Lambda_0\left[1 + \frac{\sigma_0 \nu(t - t_0)}{\Lambda_0 c_0 m}\right]^{1/2}, \quad \sigma(t) = \sigma_0\left[1 + \frac{\sigma_0 \nu(t - t_0)}{\Lambda_0 c_0 m}\right]^{-1/2} \tag{6.7}$$

$$\Lambda_0 = \Lambda(t_0), \quad \sigma_0 = \sigma(t_0)$$

Соотношения (6.7), по существу, совпадают с формулами, описывающими слабые ударные волны в жидкости [7]. При достаточно больших t и $\nu \neq 0$ из (6.7) и аналогичных соотношений для цилиндрических и сферических волн можно получить следующие асимптотические законы затухания интенсивности (соответственно для плоских, цилиндрических и сферических волн):

$$\sigma \sim \mathrm{const}\; t^{-1/2}, \quad \sigma \sim \mathrm{const}\; t^{-3/4}, \quad \sigma \sim \mathrm{const}\; (t\sqrt{\ln t})^{-1} \tag{6.8}$$

что также вполне согласуется с ранее найденными законами затухания слабых ударных волн в жидкости [4,5,7,8].

7. Изотропный гиперупругий материал определяется тем, что потенциал φ — функция трех главных инвариантов тензора деформаций, а в случае неоднородного тела также лагранжевых координат. Слабые разрывы, распространяющиеся в недеформированную область изотропного упругого тела, бывают либо продольными ($h_{i2} = hn_2$), либо поперечными ($h_{i2}n^i = 0$) [20,21]. Продольной волне соответствует изолированное собственное значение акустического тензора, и, таким образом, здесь выполнены условия п. 4,5. В случае слабой ударной волны продольного типа величина $\nu(\xi, t)$, вообще говоря, отлична от нуля, так что такие волны затухают в соответствии с формулами (6.8).

Слабому разрыву поперечного типа соответствует двукратное собственное значение акустического тензора — уравнение (4.1) не позволяет при этом определить положение вектора h_{k2} в касательной плоскости. Положение этого вектора, так же как и его модуль, удается определить из следующего уравнения определяющей системы, которое в этом случае допускает два независимых следствия. Из (4.4) следует, что в рассматриваемом случае лучи оказываются ортогональными последовательным положениям фронта, и упомянутые выше следствия можно получить, свертывая второе уравнение определяющей системы с полем нормалей и бинормалей к лучам. Вычисления, весьма близкие работе [22], показывают, что интенсивность разрыва вторых производных перемещений $h(\xi, t)$ и угол $\theta(\xi, t)$ между вектором разрыва $h_{i2}(\xi, t)$ и главной нормалью луча удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial h^2 J m c_s^5(\xi, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \theta(\xi, t)}{\partial t} = \frac{c_s}{T} \tag{7.1}$$

Здесь $c_s(x)$ — скорость распространения слабых разрывов поперечного типа в недеформированную область изотропного нелинейно-упругого тела, $T(\xi, t)$ — радиус кручения луча ξ^α. Соотношения (7.1) совпадают с формулами классической линейной теории упругости [1,22] (относительно интенсивности разрыва это отмечалось в работе [20]).

В случае слабых ударных волн поперечного типа, распространяющихся в недеформированную область изотропного нелинейно-упругого тела, из определяющей системы уже не вытекает коллинеарность векторов h_{k11}, h_{k20}, но лишь $h_{k11}(\xi, t) = \eta(\xi, t)\, r_k(\xi, t)$, $h_{k20}(\xi, t) = h(\xi, t)\, q_k(\xi, t)$, где r_k и q_k — векторы, ортогональные единичной нормали $n_{k0}(\xi, t)$ к поверхности $x^i = x_0^i(\xi, t)$. Определяющая система приводит в этом случае к уравнению

$$2m(x_0)\,c_s\,\frac{\partial\eta(\xi,t)}{\partial t}+\eta m(x_0)\,c_s\,\frac{\partial\ln J_0 m(x_0)\,c_s^3(x_0)}{\partial t}-\tag{7.2}$$

$$-\,\varphi^{ijklmn}(x_0,0)\,n_{j_0}n_{l_0}n_{n_0}\left(r_iq_kr_m-\frac{1}{2}\,q_ir_kr_m\right)\eta h=0$$

Так как $\varphi^{ijklmn}(x,0)$ в случае изотропной среды — линейная комбинация членов вида $k(x)\,x^{ij}x^{kl}x^{mn}$ с различными сочетаниями индексов, последний член уравнения (7.2) обращается в нуль. Закон изменения интенсивности слабой ударной волны поперечного типа оказывается в результате таким же, как в акустической теории [1,10]. Как известно, скорость затухания по акустической теории более медленная, чем описываемая соотношениями (6.8).

Автор благодарит А. А. Мовчана, а также участников семинаров под руководством В. М. Бабича, Л. А. Галина и Н. В. Зволинского за обсуждения.

Поступила 21 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 5. Изд-во ЛГУ, 1961.
2. *Wright T. W.* Acceleration waves in simple elastic materials. Arch. Ration. Mech. and Analys., 1973, vol. 50, No. 4.
3. *Brown M.* Beschleunigungs wellen in anisotropen hyperelastishen Stoffen. Acta Mech., 1974, vol. 19, No. 3—4.
4. *Ландау Л. Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. 9, вып. 9.
5. *Курант Г., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
6. *Губкин К. Е.* Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
7. *Рыжов О. С.* Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1961, № 2.
8. *Whitham G. B.* Linear and non-linear waves. J. Wiley and Sons, 1974.
9. *Prasad P.* Approximation of the perturbation equations of a quasilinear hyperbolic systems in the neighborhood of a bicharacteristic. J. Math. Analysis and Appl., 1975, vol. 50, No. 3.
10. *Keller J. B.* Geometrical acoustics. 1. The theory of weak shock waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8.
11. *Маслов В. П.* Распространение слабых ударных волн в изэнтропическом невязком газе. Современные проблемы математики, 1977, т. 8.
12. *Мовчан А. А.* Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение. Инж. сб., 1960, т. 29.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 4. М., Физматгиз, 1958.
14. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.
15. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws. 2. Communs. Pure and Appl. Math., 1957, vol. 10, No. 4.
16. *Truesdell C. A., Toupin R. A.* The classical field theories. Handbuch Phys. Springer, 1960, vol. 3/1.
17. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
18. *Suhubi E. S.* The growth of acceleration waves of arbitrary form in deformed hyperelastic materials. Internat. J. Engng Sci., 1970, vol. 8, No. 8.
19. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
20. *Juneja B. L., Nariboli G. A.* Growth of acceleration waves in an unstrained nonlinear isotropic elastic medium. Internat. J. Non-linear Mech., 1970, vol. 5.
21. *Chen P. J.* Growth and decay of waves in solids. Handbuch Phys. a/3, Springer-Verlag, 1973, vol. 6.
22. *Левин М. А., Рытов С. М.* О переходе к геометрическому приближению в теории упругости. Акуст. ж., 1956, т. 2, № 2.