Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 532.546

О НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Бегматов

(Ташкент)

Как известно, задачу о стягивании контура нефтеносности и о движении тяжелой несжимаемой жидкости с нелинейным условием на свободной поверхности можно свести к задаче Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения [1, 2]. В работе исследуется разрешимость задачи Коши для такого типа уравнений с гладкими и разрывными начальными условиями. Предлагается также способ линеаризации на примере задач о растекании бугра грунтовых вод и о понижении уровня грунтовых вод под действием стока. В результате линеаризации получается уравнение Фредгольма второго рода или уравнение, сводящееся к нему. Доказывается разрешимость этого уравнения и дается оценка погрешности линеаризации.

1. Рассмотрим задачу: найти решение $h(x, t)$ нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$h_t - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[k_0 + h_t(\xi, t)]\, K_0^-(x-\xi; h, \eta)\, d\xi - B_0 h = 0 \tag{1.1}$$

$$K^-{}_0(x;\ h,\ \eta) = [x h_x(x,\ t) - (h - \eta)]\,[x^2 + (h-\eta)^2]^{-1}, \quad \eta = h(\xi,\ t)$$

в области $\Omega = \{(x,\ t)\colon -\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, удовлетворяющее условию

$$h(x,\ t)\,|_{t=+0} = h_e(x) \tag{1.2}$$

Здесь $B_0 h$ — некоторая, вообще говоря, нелинейная операция (в зависимости от вида B_0 (1.1), (1.2) соответствует различным задачам нестационарной фильтрации с нелинейным условием на свободной поверхности; примеры таких задач приводятся в работах [1,2] и ниже); k_0 — постоянный параметр.

Пусть $C_L^{1+\nu,\,1+\nu}(\Omega)$ — совокупность абсолютно интегрируемых вместе с производными функций, причем производные непрерывны по t ($t \in [0, T]$) и удовлетворяют по x условию Гельдера с показателем ν, $0 < \nu_0 \leqslant \nu \leqslant 1$; $C_L^{\nu,\,0}(\Omega)$ — совокупность функций, обладающих теми же свойствами, что и производные функций из множества $C_L^{1+\nu,\,1+\nu}$.

Лемма. Пусть $h \in C_L^{1+\nu,\,1+\nu}(\Omega)$ и $B_0 h \in C_L^{\nu,\,0}(\Omega)$; тогда оператор левой части (1) отображает множество функций, принадлежащих $C_L^{1+\nu,\,1+\nu}(\Omega)$ в множество $C_L^{\nu,\,0}(\Omega)$.

Доказательство проводится следующим образом. Интеграл с ядром K_0^- представляется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0^-(x-\xi;\, h,\, \eta)\, d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty} D_0(h)\left[1 - \frac{D_1^2(h)}{1+D_1^2(h)}\right] d\xi \tag{1.3}$$

$$D_0(h) = \xi^{-2}[h\,(x,\ t) + \xi h_x(x,\ t) - h\,(x+\xi,\ t)],$$

$$D_1 = \xi^{-1}[h\,(x,\ t) - h\,(x+\xi,\ t)]$$

Достаточно показать, что интеграл от D_0 принадлежит множеству $C_L^{\nu,\,0}$. Это осуществляется разбиением интеграла на два, соответствующих отрезкам $|\,\xi\,| < 1$ и $|\,\xi\,| > 1$.

Пользуясь соотношением (1.3), уравнение (2.2) запишем в виде

$$h_t(x,\, t) + \frac{k_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D_0(h)\, d\xi = B_1 h \tag{1.4}$$

$$B_1 h = B_0 h - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_t(\xi,\, t)\, K_0^-\, d\xi + \frac{k_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_0(h)\, D_1^2(h)}{1+D_1^2(h)}\, d\xi$$

причем, согласно лемме, $B_1 h \in C_L^{\nu,\,0}$.

Для исследования задачи (1.2), (1.4) рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $h\,(x,\ t)$, удовлетворяющую уравнению

$$h_t(x,\, t) + \frac{k_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D_0(h)\, d\xi = f\,(x,\, t) \tag{1.5}$$

и условию (1.2), если $h_e \in C_L^{1+\nu}$, $h^\circ_e \in C_L{}^{\nu}$, $f\,(x,\ t) \in C_L^{\nu,\,0}$, где

$$\Phi h_e{}^\circ(x) = |\,\alpha\,|\,\Phi h_e, \quad \Phi h \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h\,(x,\, t)\, e^{-i\alpha x}\, dx$$

Теорема. Пусть $h_e \in C_L^{1+\nu}$, $f\,(x,\ t) \in C_L^{\nu,\,0}$ и $h_e{}^\circ \in C_L{}^{\nu}$. Тогда решение задачи (1.2), (1.5) принадлежит множеству $C_L^{1+\nu,\,1+\nu}$ и определяется формулой

$$h\,(x,\ t) = h_e\,(x) * \psi\,(x,\ t) + Bf \tag{1.6}$$

$$Bf \equiv \Phi^{-1}\int_0^t \exp\,[-k_0\,|\,\alpha\,|\,(t-\tau)]\,\Phi f\,(x,\, \tau)\, d\tau$$

$$h_e * \psi = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(x-\xi)\,\psi(\xi,\, t)\, d\xi, \quad \psi\,(x,\, t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{k_0 t}{x^2 + k_0{}^2 t^2}$$

Решение (1.6) находится при помощи преобразования Фурье. Пользуясь равенством

$$Bf = tf\,(x,\ t^\circ) * \psi\,(x,\ t_0), \quad t^\circ = t\,(1-\theta), \quad t_0 = \theta t$$

$$0 < \theta < 1$$

получим соотношения

$$(1.7)\qquad h_x = h_e'(x) * \psi(x, t) + \frac{2}{k_0\pi\theta}\int_0^\infty [f(x + \lambda k_0 t_0, t^\circ) -$$
$$- f(x - \lambda k_0 t_0, t^\circ)] \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2+1)^2}$$
$$h_t = -k_0 h_e^\circ * \psi(x, t) + f(x, t) - k_0 t f(x, t^\circ) * \frac{\partial\psi}{\partial t}(x, t_0)$$

Из (1.6) и (1.7) следуют оценки

$$(1.8)\qquad |h| \leqslant \sup_x |h_e| + t \sup_x |f|$$
$$\int_{-\infty}^\infty |h|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^\infty |h_e|\, dx + t \int_{-\infty}^\infty |f|\, dx$$
$$|h_x| \leqslant \sup_x |h_e'| + \frac{2}{k_0\pi\theta} \sup_\lambda |f(x + \lambda k_0 t_0, t^\circ) - f(x - \lambda k_0 t_0, t^\circ)|$$
$$\int_{-\infty}^\infty |h_t|\, dx \leqslant k_0 \int_{-\infty}^\infty |h_e^\circ|\, dx + 2\int_{-\infty}^\infty |f(x, t^\circ)|\, dx$$
$$|h_x(x, t) - h_x(y, t)| \leqslant [c_1 + c_2(1 + 1/(\pi k_0)]\, |x - y|^\nu$$
$$|h_t(x, t) - h_t(y, t)| \leqslant [k_0 c_3 + c_2(1/\pi + 3/2)]\, |x - y|^\nu$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — постоянные в условиях Гёльдера функций $h_e f$ и h_e° соответственно.

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. Элементы множества BB_2h, где B_2 — любой оператор, переводящий множество $h \in C_L^{1+\nu, 1+\nu}$ в $C_L^{\nu, 0}$, принадлежат множеству $C_L^{1+\nu, 1+\nu}$ (здесь B определяется формулой (1.6)).

Согласно теореме 1 и следствию, задача (1.2), (1.4) (или (1.1)) эквивалентна уравнению

$$(1.9)\qquad h - h_0 - BB_1 h = 0, \qquad h_0 = h_e * \psi(x, t)$$

причем любое решение этого уравнения $h \in C_L^{1+\nu, 1+\nu}$

Замечание. В дальнейшем в определении множеств $C_L^{\nu, 0}$ и $C_L^{1+\nu, 1+\nu}$ условие абсолютной интегрируемости заменяется условием

$$|h|, \quad |h_x(x, t)|, \quad |h_t| \leqslant \mathrm{const}\ (1 + |x|^{1+\beta})^{-1}, \quad \beta > 0$$

Введем норму

$$(1.10)\qquad \|h\|_{C_*} = \max_t \sup_x e^{-Mt} [(1 + |x|^{1+\beta})(|h| + \lambda_1 |h_x| + \lambda_2 |h_t|) +$$
$$+ \lambda_3 \|h\|_\nu]$$
$$\|h\|_\nu = \sup_{x, y} \frac{|h_x(x, t) - h_x(y, t)| + |h_t(x, t) - h_t(y, t)|}{|x - y|^\nu}$$

Здесь M, λ_j ($j = 1, 2, 3$) — положительные параметры, определяемые ниже.

Пусть в некоторой сфере $\|h - h_0\| \leqslant R$ существуют производные B_0', B_0'' нелинейной операции B_0, отображающие множество $C_L^{1+\nu, 1+\nu}$ в $C_L^{\nu, 0}$, причем

$$(1.11)\qquad |B_0'(h)\Delta h| \leqslant c_4 \|\Delta h\|, \quad |B_0''\Delta h \Delta' h| \leqslant c_5 \|\Delta h\|\, \|\Delta' h\|$$

Тогда можно рассмотреть нелинейную операцию $P(h)$, соответствующую левой части (1.9), и отображающую сферу $\| h - h_0 \| \leqslant R$ в пространство C_*. Операция $P(h)$ имеет в этой сфере производные первого и второго порядка

$$P'(h)\Delta h = \Delta h - BB_1'(h)\Delta h, \quad P''\Delta h\Delta' h = -BB_1''(h)\Delta h\Delta' h$$

Здесь следует отметить, что, пользуясь линейностью операций D_0 и D_1, нетрудно показать принадлежность $B_1'(h)\Delta h$ и $B_1''(h)\Delta h\Delta' h$ множеству $C_L^{\nu,0}$.

Для исследования нелинейного уравнения $P(h) = 0$ применим метод Ньютона — Канторовича [3,4]. Взяв в качестве начального приближения процесса Ньютона функцию h_0, оценим норму обратного оператора $[P'(h_0)]^{-1} = [E - A]^{-1}$, дающего решение линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\text{(1.12)} \qquad u - Au = -P(h_0), \quad P(h_0) = -BB_1(h_0)$$
$$Au \equiv BB_1'(h_0)u, \quad u = \Delta h = h_1 - h_0, \quad h_0 = h_e * \psi$$

Здесь $h_1(x, t)$ — искомое первое приближение, E — единичный оператор. Следовательно, решение $u(x, t)$ уравнения (1.12) определяет первое приближение процесса Ньютона для уравнения (1.9) (или задачи (1.1), (1.2)).

Так как $B_1'(h)\Delta h \in C_L^{\nu,0}$, то согласно следствию теоремы 1, можно воспользоваться оценками (1.8). Тогда с учетом равномерной ограниченности функций u, u_x, u_t и равенств

$$\partial / \partial x BB_1'u = tBB_1'u(x, t_0) * \psi_x'(x, t^\circ)$$
$$\partial / \partial t BB_1'u = BB_1'u - k_0 tBB_1'u(x, t_0) * \psi_t'(x, t^\circ)$$

получим

$$e^{-Mt}\left(| Au | + \lambda_1 \left| \frac{\partial}{\partial x} Au \right| + \lambda_2 \left| \frac{\partial}{\partial t} Au \right| + \lambda_3 \| Au \|_\nu \right) \leqslant$$
$$\leqslant c_6 \left[\frac{1 - e^{-Mt}}{M} + \frac{4\lambda_1}{\pi k_0} + \lambda_2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \right) + \frac{\lambda_3 c_\nu}{R} \right] \max_t \sup_x | ue^{-Mt} |$$

Здесь c_ν — сумма постоянных в условиях Гельдера.

Наличие веса $1 + | x |^{1+\beta}$ приводит к замене c_6 другой постоянной. Поэтому имеем

$$\text{(1.13)} \qquad \| A \| \leqslant c_7 \left[\frac{1 - e^{-Mt}}{M} + \frac{4\lambda_1}{\pi k_0} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \right) \lambda_2 + \lambda_3 c_8 \right] \equiv \varkappa$$

Аналогично можно получить оценку

$$\| BB_1'' \| \leqslant c_7(1 - e^{-Mt}) / M + c_9(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \equiv \varkappa_1$$

Будем предполагать M достаточно большим, а λ_j достаточно малыми, так что $\varkappa < 1$. Пусть начальная функция $h_e(x)$ обеспечивает неравенство $\| P(h_0) \| \leqslant (1 - \varkappa)R$, тогда, согласно принципу сжатых отображений, в шаре $\| u \| \leqslant R$ существует единственное решение уравнения (1.12), причем

$$\text{(1.14)} \qquad \| [E - A]^{-1} \| \leqslant (1 - x)^{-1}$$

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1) нелинейная операция B_0 и ее производные B_0', B_0'' отображают множество функций $h \in C_L^{1+\nu,\,1+\nu}$ в $C_L^{\nu,\,0}$, причем имеет место оценка (1.11);

2) функция $h_e(x) \in C_L^{1+\nu}$ такова, что

$$\| P(h_0) \| \leqslant {}^1/_2(1-\varkappa) R \tag{1.15}$$

3) параметр M обеспечивает выполнение неравенств

$$\varkappa_0 R (1-\varkappa_0)^{-1} < 1, \quad \varkappa \,|_{\lambda_j=0} = \varkappa_0 < \varkappa < 1 \tag{1.16}$$

Тогда единственное решение задачи Коши (1.1), (1.2) можно получить процессом Ньютона.

Параметры λ_j подбираются так, чтобы (1.16) превратились в нестрогие неравенства. При этом существует единственное решение уравнения (1.12), и имеют место все условия известной теоремы Л. В. Канторовича [3,4], из которой следует утверждение теоремы 2. Заметим, что условие (1.15) и оценка (1.14) обеспечивают справедливость неравенств

$$(1-\sqrt{1-2\eta_0})\,\eta_0^{-1} \leqslant R\,(\|[P'(h_0)]^{-1}\|\,\|P(h_0)\|)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (1+\sqrt{1-2\eta_0})\,\eta_0^{-1}$$
$$\eta_0 = {}^1/_2\varkappa_1 R\,(1-\varkappa)^{-1}$$

Здесь равенство возможно только при условии $\eta_0 = {}^1/_2$.

Рассмотрим случай разрывных начальных условий. Пусть $h_e(x) \in L$ — ступенчатая функция. Тогда, не нарушая общности, можно рассматривать одноступенчатую функцию

$$h_e(x) = d = \text{const}, \ |x| < 1, \quad h_e(x) = 0, \quad |x| \geqslant 1$$

Предельное значение производной $h_t(x, +0)$ можно получить, предполагая, что уравнение (1.1) имеет место вплоть до $t = +0$, за исключением точек $|x| = 1$, т. е.

$$u - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [k_0 + u(\xi)]\,K(x,\xi)\,d\xi = f(x), \quad |x| \neq 1$$
$$u = h_t(x, +0), \quad f(x) = Bh\,|_{t=+0}$$
$$K(x,\xi) = \begin{cases} 0, |\xi| < 1, \quad |x| < 1; \quad -d\,[1+(x-\xi)^2]^{-1}, \quad |\xi| > 1, \quad |x| < 1 \\ d\,[1+(x-\xi)^2]^{-1}, \quad |\xi| < 1, \quad |x| > 1; \quad 0, \quad |\xi| > 1, \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Если для функции $f(x)$ справедлива формула Фурье, то применением преобразования Фурье решение этого уравнения находится в явном виде

$$u = f_2 + f^- + u_1 * \psi(x, 1), \quad |x| > 1 \tag{1.17}$$

$$u = f_1 + f^+ + (f_1 + f^+) * \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi(x, 2k) -$$
$$- f_2 * \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi(x, 2k+1), \quad |x| < 1$$
$$f^+ = f(x)\,\chi(1 - |x|), \quad f^- = f(x)\chi(|x| - 1)$$

$$\chi(x) = 1,\ x > 0;\quad \chi(x) = 0,\ x < 0;\quad \psi(x, a) = a/[\pi(x^2 + a^2)]$$
$$f_1(x) = -dk_0/\pi^{-1}[\pi - \operatorname{arctg}(x + 1) + \operatorname{arctg}(x - 1)]\chi(1 - |x|)$$
$$f_2(x) = dk_0/\pi^{-1}[\operatorname{arctg}(x + 1) - \operatorname{arctg}(x - 1)]\chi(|x| - 1)$$

Очевидно, что

$$\lim_{t\to+0} h_x(x, t) = 0, \quad |x| \neq 1 \tag{1.18}$$

В этом случае представление уравнения (1.1) в виде (1.4) возможно лишь при $t > 0$, поэтому если $f(x, t) \in C_L^{\nu, 0}$ в области с выколотыми точками $(x, t) = (\pm 1, 0)$, то в отличие от (1.17) и (1.18) поведение производных h_x, h_t решения задачи (1.2), (1.4) около точки разрыва $|x| = 1$ будет порядка $O(t^{-1})$ при $t \to +0$. При этом левая часть (1.9) имеет конечный предел при $t \to +0$ ($|x| \neq 1$), но отдельные ее члены имеют особенность указанного типа. В этой связи в оценках для h_x, h_t вместо постоянных будут участвовать функции от t, которые стремятся к бесконечности при $t \to +0$. Не останавливаясь на доказательстве, отметим, что разрешимость задачи доказывается в норме (1.10), где $t \in [T_0, T]$, $T_0 > 0$ только для $t \in [T_0, T]$.

В качестве примера для B_0 можно рассмотреть оператор

$$B_0 h = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [k_0 + h_t(\xi, t)]\, K_0^+(x - \xi; h, \eta)\, d\xi - \tag{1.19}$$
$$- q(t) K_0(x; h, c_0 + h_\infty) - k_0$$

$$K_0^+(x; h, \eta) = [x h_x - (h + \eta - 2h_\infty)][x^2 + (h + \eta - 2h_\infty)^2]^{-1}$$

$$K_0(x, h, \eta) = K_0^-(x; h, \eta) + K_0^+(x; h, \eta)$$

$$h_\infty = \lim_{|x|\to\infty} h_u, \quad h_u = h + h_\infty, \quad 0 < c_0 < 1 - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0$$

Предполагается, что $h_e(x) \equiv 0$, $h_u(x, +0) = h_\infty = 1$ при $q \not\equiv 0$, где h_u — уровень грунтовых вод, отсчитываемый от водоупора.

Здесь $q \equiv 0$ соответствует задаче о растекании бугра грунтовых вод в пласте конечной мощности (при $B_0 h \equiv 0$ в пласте неограниченной мощности), а $q \not\equiv 0$ соответствует задаче [2] о понижении уровня грунтовых вод под действием стока с интенсивностью $q(t)$, расположенного в точке $(x, z) = (0, c_0)$ области движения $\{(x, z)\colon -\infty < x < +\infty,\ 0 < z < h(x, t)\}$.

В первом случае ($q \equiv 0$) условие 1) теоремы 2 выполняется для любого конечного радиуса R, $R > \exp(-MT) \sup |h_e|$, а во втором случае $R \leqslant (1 - c_0 - \varepsilon_0) \exp(-MT)$. Необходимость последнего ограничения следует из вида $K_0(x, h; c_0 + h_\infty)$ и связана с тем, что при приближении уровня грунтовых вод к контуру трубчатой дрены, которая заменена линейным стоком, происходит потеря однозначности решения [5]. В данном случае при $h_u(0, t) \to c_0$ нарушается предположение о принадлежности кривой $z = h_u(x, t)$ к кривым Ляпунова [2].

Условию (1.15) можно удовлетворить соответствующим выбором функций $h_e(x)$ $(q \equiv 0)$ или $q(t)$ $(q \not\equiv 0)$.

2. Линеаризация нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Уравнение (1.1) с учетом (1.19) имеет вид

$$h_t - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [k_0 + h_t(\xi, t)]\, K_1(x-\xi; h, \eta)\, d\xi + \tag{2.1}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_t(\xi, t)\, d\xi}{(x-\xi)^2+4} - q(t)\, K_0(x; h, c_0 + h_\infty) = 0$$

$$K_1(x-\xi; h, \eta) = K_0(x-\xi; h, \eta) + 2\,/\,[(x-\xi)^2+4]$$

Для получения приближенного решения задачи (1.2), (2.1) можно применить способ линеаризации. При этом отрезок времени $[0, T]$ разбивается точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ на N частей, и K_0, K_1 на малых отрезках $(t_m, t_{m+1}]$ заменяются их значениями при $t = t_m - 0$ $(m = 1, 2, \ldots, N-1)$

$$K_1(x-\xi; h, \eta) \approx K_1(x-\xi; h, \eta)\,|_{t=t_m-0} \equiv K_1(x, \xi; t_m)$$

$$K_0(x; h, c_0 + h_\infty) \approx K_0(x; h(x, t_m - 0), \; c_0 + h_\infty) \equiv K_0(x, t_m)$$

При $m = 0$ функции h, η в K_0 и K_1 заменяются своими начальными значениями. Тогда вместо (2.1) получается линейное уравнение

$$u_{m+1}(x, t) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t)\, K_1(x, \xi; t_m)\, d\xi + \tag{2.2}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{m+1}(\xi, t)\, d\xi}{(x-\xi)^2+4} = f_0(x, t; t_m), \quad t \in (t_m, t_{m+1}]$$

$$f_0(x, t; t_m) = \frac{k_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, \xi; t_m) + q(t)\, K_0(x, t_m)$$

$$u_{m+1}(x, t) = h_t(x, t), \quad t \in (t_m, t_{m+1}]$$

Если предположить, что показатель Гельдера $\nu > 1/2$ и для f_0 справедлива формула Фурье, то преобразование Фурье позволяет свести (2.2) к уравнению Фредгольма второго рода

$$u_{m+1}(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_{m+1}(\xi, t)\, K(x, \xi; t_m)\, d\xi = f(x, t_m) \tag{2.3}$$

$$K = K_1 + K_2, \quad K_2 = K_1(x, \xi; t_m) * g(x)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi(x, 2k), \quad f = f_0 + f_0 * g$$

Однородное уравнение, соответствующее (2.3), имеет только тривиальное решение. Действительно, в силу однозначности преобразования Фурье, (2.3) эквивалентно уравнению (2.2). Однородное уравнение, соответствующее последнему, совпадает в пределе с однородным уравнением внешней задачи Неймана для расширяющихся областей, стремящихся к полосе

$$\{(x, z): -\infty < x < +\infty, \; -h_u(x, t) < z < h_u(x, t)\}, \quad t \in (t_m, t_{m+1}]$$

Отсюда следует тривиальность решения однородного уравнения и однозначная разрешимость (2.3).

Заметим, что при достаточно гладкой начальной функции $h_e(x)$ решение (2.3) $m = N - 1$, $u_N \in C_L^{1+\nu,0}$, $u_N' \in C_L^{\nu,0}$, и, следовательно, будет справедлива формула Фурье для функции $f_0(x; t; t_m)$, $m = 1, 2, \ldots, N - 1$.

Погрешность линеаризации

$$\varepsilon_{m+1} = u(x, t) - u_{m+1}(x, t), \quad t \in (t_m, t_{m+1}], \quad u = h_t$$

где $h(x, t)$ — точное решение уравнения (2.1), удовлетворяет уравнению вида (2.3) с ядром $K = K_1(x - \xi; h_{m,m}; \eta_{m,m})$ и правой частью $f = f_\varepsilon \Delta h_m$, причем f_ε — некоторая линейная операция над Δh_m. Это уравнение аналогично (2.2), сводится к уравнению Фредгольма второго рода и, кроме того, имеет место равенство

$$\Delta h_m = (t - t_m)\, u(x, t_m^\circ) + \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})\, \varepsilon_k(x, t_{k-1}^\circ), \quad m \geqslant 1$$

$$\Delta h_0 = tu(x, t_0^\circ), \quad t_{k-1} < t_{k-1}^\circ < t_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$h_{m,m} = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u_{k+1}(x, \tau)\, d\tau$$

Отсюда, если предположить, что $h \in C_L^{1+\nu,0}$, погрешность линеаризации ε_m $(m = 1, 2, \ldots, N)$ имеет порядок $O(\Delta t)$, где $\Delta t = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} (t_k - t_{k-1})$. При этом отличие способа линеаризации от ранее применявшегося к такого типа интегро-дифференциальным уравнениям модификации метода Эйлера [1] аналогично тому, которое наблюдается в случае применения неявных и явных разностных схем к решению задач для уравнений параболического типа.

Поступила 25 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). М., «Наука», 1969.
2. *Бегматов А.* К вопросу определения свободной поверхности грунтовых вод. В сб.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений, вып. 4. Ташкент, «Фан», 1974.
3. *Канторович Л. В.* О методе Ньютона. Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1949, т. 28.
4. *Красносельский М. А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
5. *Галин Л. А.* Нелинейная задача о неустановившейся фильтрации тяжелой жидкости со свободной поверхностью. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.