

## О МОДЕЛЯХ ТИКСОТРОПНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

С. А. Регирер, Н. Х. Шадрин

(Москва, Ленинград)

Показано, что в рамках линейной термодинамики необратимых процессов могут быть получены феноменологические уравнения, имеющие смысл уравнений агрегационной кинетики для суспензий, и реологические уравнения, описывающие поведение смеси с изменяющейся структурой, в частности тиксотропной среды. С позиций теории размерностей рассмотрена простейшая структура определяющих уравнений. Обсуждается возможная роль диффузионных эффектов в течениях тиксотропной среды.

1. Среди жидкостей с неньютоновскими реологическими свойствами значительный интерес представляют так называемые тиксотропные среды. В общем случае для тиксотропной среды имеет место реологическое определяющее уравнение с коэффициентами, которые зависят не только от обычных параметров состояния, но еще от ряда «структурных» параметров, удовлетворяющих уравнениям «структурной кинетики». В суспензиях, течение которых сопровождается образованием и разрушением агрегатов из взвешенных частиц, такими структурными параметрами являются осредненные характеристики размеров и формы агрегатов, а дополнительные уравнения описывают кинетику процессов агрегации частиц. Интерес к тиксотропным средам такого типа связан, в частности, с последними исследованиями по реологии крови, свидетельствующими о сильном влиянии агрегационных явлений на ее реологические, электрические и оптические свойства [1-4].

Известен ряд подходов к описанию тиксотропных суспензий: от наиболее примитивного, когда для коэффициента вязкости принимается эмпирически найденная зависимость от времени [5], до весьма сложного, когда коэффициент вязкости наследуется памятью о предыстории течения [6]. Непосредственное замыкание системы гидродинамических уравнений при помощи уравнения, заимствованного из кинетики коагуляции, осуществлено в статьях [7, 8]. С аналогичной целью в работе [9] были рассмотрены более общие кинетические уравнения, учитывающие специфику явлений в крови. Недавно опубликована статья [10], содержащая приближенное обоснование реологического уравнения Кессона как следствия из кинетического уравнения в случае агрегационного равновесия. Заметим, что впервые идея об описании агрегационных явлений в крови при помощи уравнений Смолуховского была высказана в малоизвестной статье [11].

Вопрос о возможности построения модели тиксотропной жидкости обычным феноменологическим путем, с использованием термодинамических соображений, до настоящего времени не решен (известны лишь недостаточно обоснованные попытки [12, 13]).

2. Рассмотрим смесь, состоящую из несжимаемой ньютоновской жидкости и взвешенных частиц с той же истинной плотностью. При сдвиговом течении смеси происходят «столкновения» частиц, в результате чего могут образовываться агрегаты, обладающие конечной прочностью. Агрегаты

могут распадаться под действием гидродинамических сил и обмениваться частицами [9].

Состав смеси будем характеризовать средней объемной концентрацией частиц  $C$ , кажущейся концентрацией  $H$ , средним числом частиц в агрегате  $n$  и средним объемом агрегата  $w$ . Если  $w_0$  — объем индивидуальной частицы, то  $w = n(w_0 + w_*)$ , где  $nw_*$  — объем жидкости, связанной («запертой») в агрегате, и  $H = C(w_0 + w_*) / w_0$ . Числовые концентрации частиц  $N_p$  и агрегатов  $N_a$  связаны соотношениями  $N_p = nN_a$ ,  $N_a w = H$ ,  $N_p w_0 = C$ . В силу постоянства и равенства плотностей фаз массовые концентрации численно равны объемным.

Для простоты изложения (см. п. 5) будем считать частицы недеформируемыми и не изменяющими свой объем. В каждом агрегате частицы граничат либо с окружающей жидкостью, либо с другими частицами, либо с запертой жидкостью. Примем, что соотношения между площадями соответствующих поверхностей раздела однозначно определяются средним размером агрегата (при заданной концентрации  $C$ ).

Все рассуждения будут ниже проведены в одножидкостном приближении (для смеси в целом) без учета микровращений и микродеформаций (т. е. в обычных кинематических переменных).

Основная гипотеза состоит в том, что полная энергия смеси в расчете на единицу массы выражается формулой

$$(2.1) \quad E \equiv \frac{u^2}{2} + U = \frac{u^2}{2} + U_V + U_\Sigma$$

Здесь  $u_l$  — барицентрическая скорость смеси,  $U_V$  и  $U_\Sigma$  — «объемная» и «поверхностная» части внутренней энергии. Последняя включает в себя суммарную энергию поверхностей (свободных и связанных) всех частиц.

По аналогии с рассуждениями статьи [14] примем, что

$$(2.2) \quad \begin{aligned} U_V &= U_T(S_T, C) + U_F(S_F, w, N_a) \\ U_\Sigma &= U_\Sigma(S_\Sigma, w, N_a), \quad S = S_T + S_F + S_\Sigma \\ \frac{\partial U_T}{\partial S_T} &= T_T, \quad \frac{\partial U_T}{\partial C} = \mu, \quad \frac{\partial U_F}{\partial S_F} = T_F, \quad \frac{\partial U_\Sigma}{\partial S_\Sigma} = T_\Sigma \end{aligned}$$

Введем также обозначения для производных  $U_F$ ,  $U_\Sigma$

$$(2.3) \quad \frac{\partial U_F}{\partial w} = \lambda_F, \quad \frac{\partial U_\Sigma}{\partial w} = \lambda_\Sigma, \quad \frac{\partial U_F}{\partial N_a} = \mu_F, \quad \frac{\partial U_\Sigma}{\partial N_a} = \mu_\Sigma$$

Индексами  $T$ ,  $F$  обозначены составляющие внутренней энергии  $U$  и энтропии  $S$ , а также другие величины, соответствующие тепловому и флуктуационному движениям в смеси (понятие флуктуационного движения здесь применено к частицам и агрегатам; флуктуации суть гидродинамические следствия взаимодействий агрегатов [14]).

Из уравнений сохранения массы, импульса и энергии для смеси получим теперь последовательно уравнения притока тепла и баланса энтропии. Исходные уравнения имеют вид

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \partial_t u_l &= 0, \quad d_t C = -\partial_l J_l \\ \rho d_t u_k &= -\partial_l p_{lk} + \rho f_k \\ \rho d_t E &= -\partial_l (q_l + u_k p_{lk}) + \rho f_k u_k \end{aligned}$$

Здесь  $J_l$  — диффузионный поток частиц,  $f_k$  — внешняя массовая сила,  $q_l$  — поток тепла,  $\partial_l = \partial/\partial x_l$ ,  $d_t = d/dt$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ .

Кроме уравнений (2.4) необходимо еще воспользоваться дополнительными уравнениями диффузии агрегатов. Удобно записать их, исходя из результатов статьи [9], относительно переменных  $N_a$  и  $H = N_a w$

$$(2.5) \quad d_t N_a = -\partial_l J_l' + G, \quad d_t H = -\partial_l J_l'' + g$$

Здесь  $J_l'$ ,  $J_l''$  — соответственно числовой и объемный потоки агрегатов,  $G$  — скорость образования агрегатов,  $g$  — скорость связывания жидкости в агрегатах. Потоки в (2.4), (2.5) связаны равенствами  $J_l = w_0 n J_l' = C J_l' / N_a$ ,  $J_l'' = w J_l'$ . Из уравнений (2.5) следует, что

$$(2.6) \quad d_t w = -\frac{J_l'}{N_a} \partial_l w + \frac{1}{N_a} (g - Gw)$$

Из уравнения энергии (2.4) обычным образом находим

$$\rho d_t U = -\partial_l q_l - p_{lk} e_{lk}, \quad e_{lk} = 1/2 (\partial_k u_l + \partial_l u_k)$$

После формального расщепления на «разнотемпературные» составляющие будем иметь ( $\theta$  выражает обмен энергией между степенями свободы)

$$(2.7) \quad \rho d_t (U_T + U_\Sigma) = -\partial_l q_{Tl} - p_{Tlk} e_{lk} + \theta$$

$$\rho d_t U_F = -\partial_l q_{Fl} - p_{Flk} e_{lk} - \theta$$

$$q_l = q_{Tl} + q_{Fl}, \quad p_{lk} = p_{Tlk} + p_{Flk}$$

Используя далее (2.2) — (2.6), из (2.7) получим сначала выражения для  $d_t(S_T + S_\Sigma)$   $d_t S_F$ , а затем окончательно

$$(2.8) \quad \rho d_t S + \partial_l G_l = R, \quad R = \sum_{s=1}^7 Y^s X^s$$

$$G_l = \rho S u_l + \frac{q_{Tl}}{T_T} + \frac{q_{Fl}}{T_F} - J_l' \left( m + \frac{\mu}{T_T} \frac{C}{N_a} \right)$$

$$m = \mu_\Sigma / T_T + \mu_F / T_F$$

Входящие в диссипативную функцию  $R$  термодинамические силы  $X^s$  и потоки  $Y^s$  выражаются формулами:

$$(2.9) \quad X^1 = T_F - T_T, \quad Y^1 = T_T^{-1} T_F^{-1} \theta$$

$$X^2 = -m + \Lambda \frac{w}{N_a}, \quad Y^2 = G \quad \left( \Lambda = \frac{\lambda_\Sigma}{T_T} + \frac{\lambda_F}{T_F} \right)$$

$$X^3 = \Lambda / N_a, \quad Y^3 = g$$

$$X_l^4 = \partial_l T_T, \quad Y_l^4 = -\frac{1}{T_T^2} \left( q_{Tl} - \frac{\mu C}{N_a} J_l' \right)$$

$$X_l^5 = \partial_l T_F, \quad Y_l^5 = -\frac{1}{T_F^2} q_{Fl}$$

$$X_l^6 = \frac{C}{T_T N_a} \partial_l \mu + \partial_l m - \frac{\Lambda}{N_a} \partial_l w, \quad Y_l^6 = -J_l'$$

$$X_{lk}^7 = e_{lk}, \quad Y_{lk}^7 = -\left( \frac{p_{Tlk}}{T_T} + \frac{p_{Flk}}{T_F} - A \delta_{lk} \right)$$

Здесь  $A$  — неопределенный скаляр, введенный для учета несжимаемости смеси.

Выпишем далее линейные соотношения между потоками и силами с учетом принципа симметрии и изотропности среды. Опуская несущественные для дальнейших рассуждений слагаемые, не дающие вклада в диссипацию (см. [14]), получим

$$(2.10) \quad Y^r = \sum_s A^{r,s} X^s, \quad A^{s,r} = A^{r,s} \quad (s, r = 1, 2, 3)$$

$$Y_l^r = \sum_s A^{r,s} X_l^s \quad (s, r = 4, 5, 6)$$

$$Y_{lk}^7 = A^{7,7} X_{lk}^7 + \sum_{s=1}^3 A^{7,s} X^s \delta_{lk}$$

$$p_{lk} = -A_*^{7,7} e_{lk} - \sum_{s=1}^3 A_*^{7,s} X^s \delta_{lk} + A_* \delta_{lk}$$

$$p_{F lk} = -A_F^{7,7} e_{lk} - \sum_{s=1}^3 A_F^{7,s} X^s \delta_{lk} + A_F \delta_{lk}$$

$$A_*^{r,s} = T_T A_T^{r,s} + T_F A_F^{r,s}, \quad A_* = A_T T_T + A_F T_F$$

$$A^{r,s} = A_T^{r,s} + A_F^{r,s}, \quad A_*^{s,r} = A_*^{r,s}$$

Не теряя общности, можно принять здесь  $A_F = 0$  и отождествлять  $A_*$  с гидростатическим давлением  $p$ . Коэффициенты переноса  $A^{r,s}$  могут зависеть от параметров состояния, каковыми являются  $C$ , одна из температур  $T_T$  или  $T_F$ , а также — при определенных условиях — величины  $w$ ,  $N_a$ . Эти условия состоят в возможности термодинамического равновесия при  $T_T = T_F$  и произвольных  $C$ ,  $w$ ,  $N_a$  и реализуются для систем, в которых самопроизвольное (за счет сил  $X^2$ ,  $X^3$ ) изменение агрегационного состояния протекает достаточно медленно. Примером могут служить суспензии крупных частиц, где броуновской агрегацией по сравнению со сдвиговой можно пренебречь.

3. В случае квазистационарного режима для флуктуационной температуры [14] и в пренебрежении кондуктивными членами второе уравнение (2.7) приближенно сводится к конечному соотношению  $\Theta(X^1, X^2, X^3) = -p_{F lk} e_{lk}$ . Правая часть здесь, согласно (2.10), пропорциональна  $I_2 = e_{lk} e_{lk}$ , поэтому отсюда следует выражение для  $T_F$ :  $T_F = T_F(I_2, C, T_T, w, N_a)$ . Тогда формулы (2.10) для  $Y^2$ ,  $Y^3$  могут быть также переписаны в виде  $G = G(I_2, C, T_T, w, N_a)$ ,  $g = g(I_2, C, T_T, w, N_a)$ . Таким образом, интенсивность флуктуаций, скорость роста числа агрегатов и скорость записывания жидкости представляются функциями второго инварианта тензора скоростей деформаций. При  $J_1 = 0$  (диффузия пренебрежимо слабая):

$$(3.1) \quad \frac{dN_a}{dt} = G, \quad \frac{dH}{dt} = g, \quad \frac{dw}{dt} = z$$

$$\left( z = \frac{g - Gw}{N_a} \right)$$

Следовательно, используя линейный (в смысле связи сил и потоков) формализм неравновесной термодинамики, получаем для  $N_a$ ,  $H$ ,  $w$  нелинейные уравнения агрегационной кинетики весьма общего вида (правые части в (3.1) становятся практически произвольными функциями своих аргументов, если дополнить первую тройку соотношений (2.10) нелинейными недиссипативными членами). Уравнения (3.1) сопоставимы с первыми моментными уравнениями работы [9], так что можно проследить связь между  $G$ ,  $g$  и вероятностными характеристиками агрегационных взаимодействий (в [9] не учитывалось запираание жидкости; это нетрудно сделать, принимая во внимание аналогию запираания с процессом конденсации [15]).

В (3.1) независимы лишь два уравнения (см. п. 2). В частном случае, когда процесс запираания однозначно определяется ходом агрегации, следует положить  $w = w(C, N_a)$  и независимым остается только одно из этих уравнений. Если принять дополнительно, что  $C = \text{const}$  и не рассматривать теплообмен ( $T_T \approx \text{const}$ ), то первое и третье уравнения (2.4), формула для  $p_{ik}$  (2.10) с коэффициентами  $A_*^{7,s}$ , не зависящими от  $T_F$ , и одно из уравнений (3.1) образуют систему, описывающую движение простейшей тиксотропной жидкости — с одним структурным параметром.

4. Конкретизация функций  $G$ ,  $g$  и коэффициентов переноса в рассмотренной выше модели возможна на основе опытных данных или детальных физических соображений, включающих исследование гидродинамики мелкомасштабных движений. При анализе структуры функций, входящих в описание среды, могут быть полезны методы теории размерностей.

Рассмотрим в качестве примера простое сдвиговое течение обобщенной тиксотропной среды с одним структурным параметром, допуская зависимость коэффициентов переноса от флуктуационной температуры в предположении о ее квазистационарности, т. е. фактически от скоростей сдвига.

Для такого течения согласно (2.10), (3.1)

$$(4.1) \quad \tau = 2\eta(w, \dots)e, \quad dw/dt = z(w, \dots) \quad (\eta \equiv A_*^{7,7})$$

Пусть напряжение сдвига — функция скорости сдвига  $e$ , вязкости жидкой фазы  $\eta_0$ , истинной концентрации частиц  $C$ , плотности смеси  $\rho$ , среднего объема агрегата  $w$ , параметра  $kT_T$  ( $k$  — постоянная Больцмана), характеризующего интенсивность броуновского движения, и безразмерных величин  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, w/l_1^3, w/l_2^3, \dots$ . Безразмерные постоянные  $\kappa_i$  и постоянные  $l_i$  с размерностью длины своим происхождением обязаны дополнительным соотношениям, которыми параметр  $w$  связан с другими существенными структурными параметрами (напомним, что по предположению модель содержит только один независимый структурный параметр). Очевидно, что вместо всех этих постоянных можно включить в число аргументов  $\tau$  непосредственно сами зависимые структурные параметры. К ним относятся: кажущаяся концентрация  $H = H(C, w)$ , показатель несимметрии агрегатов  $\lambda = w^{1/2}/l_{\max}(w)$  ( $l_{\max}$  — максимальный линейный размер агрегата), относительная дисперсия агрегатов по размерам  $\delta(w) = (w_{\max} - w_{\min})/w$  и т. п.

С учетом этих замечаний можно записать

$$(4.2) \quad \tau = 2\eta_0 e f \left( H, \lambda, \delta, \dots; \frac{\eta_0 e w}{kT_T}, \frac{\rho e w^{2/3}}{\eta_0} \right)$$

Будем далее считать, что  $C = \text{const}$  и входит в  $f$  только через  $H, \lambda, \dots$ , поскольку «фазовый» состав смеси определяется именно кажущейся концентрацией  $H$ .

Последний из аргументов в  $f$  есть число Рейнольдса  $R_a$  для агрегата. Механизмы тиксотропии и нелинейной вязкости, как правило, не связаны с инерционными эффектами (для крови, например, интересны режимы, когда  $R_a \leq 10^{-2}$ ), поэтому далее положим

$$(4.3) \quad \tau = 2\eta_0 e f \left( H, \lambda, \delta, \dots; \frac{\eta_0 e w}{kT_T} \right)$$

Видно, что существуют два принципиально различных механизма нелинейности функции  $\tau(e)$ . Один из них обеспечивается броуновским движением и сопровождается зависимостью вязкости от размера частиц (см. последний аргумент в  $f$ ), что полностью согласуется с микрореологическими представлениями [16, 17]. Второй механизм не связан с броуновскими эффектами и обусловлен зависимостью структурных параметров  $H, \lambda, \delta, \dots$  от  $e$  в силу второго уравнения (4.1). Именно второй механизм и соответствует случаю чисто тиксотропной среды:  $\tau = 2\eta_0 e f(H, \lambda, \delta, \dots)$ .

Из (4.3) следует, что при отсутствии запираания жидкости ( $H = C = \text{const}$ ) в монодисперсной суспензии ( $\delta = 0$ ) вязкость не зависит от абсолютного размера частиц, если они изменяются геометрически подобным образом ( $\lambda = \text{const}$ ). Для сферических частиц этот вывод подтвержден экспериментально и неоднократно получался из иных соображений [18]. Формула (4.3) показывает также, что для полидисперсной суспензии вязкость не определяется одной только концентрацией, а еще и фракционным составом (соответствующие опытные данные приведены, например, в [19]).

Обратимся теперь ко второму уравнению (4.1), описывающему изменение среднего объема агрегата. Заметим предварительно, что при  $w = w(C, N_a)$ ,  $C = \text{const}$ ,  $H = H(C, w)$  функции  $z, g, G$  отличаются множителями, зависящими только от  $C, w$ . Согласно [9] функция  $G$ , а следовательно и  $z$ , представляется суммой трех слагаемых  $z_a, z_f, z_e$ , отвечающих соответственно слипанию, распаду и обменным взаимодействиям агрегатов. Предположим для простоты, что обменные взаимодействия таковы, что не изменяют числовой концентрации агрегатов; тогда  $z_e = 0$ .

Пусть  $z_a = z_a'(w, H, \lambda, \delta, \dots, e, \eta_0, kT_T)$ ,  $z_f = z_f(w, H, \lambda, \delta, \dots, e, \eta_0, \sigma_f)$ , где  $\sigma_f$  — среднее разрушающее напряжение для агрегата, и  $\eta_0$  входит в  $z_f$  только в виде комбинации с  $e$ , а именно через напряжение  $\tau$  (4.3). Тогда

$$(4.4) \quad \frac{dw}{dt} = w e \left[ \zeta_a \left( H, \lambda, \delta, \dots; \frac{\eta_0 e w}{kT_T} \right) - \zeta_f \left( H, \lambda, \delta, \dots; \frac{\sigma_f}{\tau} \right) \right]$$

Чисто тиксотропная среда, для которой эффекты броуновского движения пренебрежимо малы, описывается соотношениями

$$(4.5) \quad \tau = 2\eta_0 e f(H, \lambda, \delta, \dots), \quad H = H(w), \quad \lambda = \lambda(w), \dots$$

$$\frac{dw}{dt} = w e \left[ \zeta_a(H, \lambda, \delta, \dots) - \zeta_f \left( H, \lambda, \delta, \dots, \frac{\sigma_f}{\tau} \right) \right]$$

При отсутствии распадов ( $\zeta_f = 0$ ) и запираания ( $H = C$ ), если  $\lambda = \text{const}$ ,  $\delta = \text{const}$ , получаем отсюда известное уравнение сдвиговой коагуляции [15]. В общем случае скорость сдвига  $e$  есть функция времени  $e = e_* \varphi(t/t_*)$ , характеризуемая не более чем двумя размерными постоянными  $e_*$ ,  $t_*$ . Поэтому вместо (4.4) можно записать

$$(4.6) \quad \frac{dw}{d(t/t_*)} = e_* t_* w \varphi \left( \frac{t}{t_*} \right) (\zeta_a - \zeta_f)$$

Если сдвиговой механизм агрегации преобладает, то при  $e_* t_* \gg 1$  получаем  $\zeta_a - \zeta_d \approx 0$ , откуда следует конечная связь между  $\tau$ ,  $e$ ,  $w$ . Объединяя ее с (4.3), приходим к модели нелинейно-вязкой среды с реологическим уравнением, не содержащим явно размера частиц. Физический смысл неравенства  $e_* t_* \gg 1$  очевиден: характерное время изменения структуры ( $\sim 1/e_*$ ) много меньше характерного «гидродинамического» времени  $t_*$ . В другом предельном случае, когда  $e_* t_* \ll 1$  (например малая амплитуда или высокая частота) при периодическом изменении  $e$ , получаем  $w = w_0(1 + O(e_* t_*))$ . Постоянная  $w_0$  находится из уравнения (4.6) при осреднении по периоду.

При  $e = 0$ , вообще говоря, нужно учитывать броуновские эффекты. Вместо (4.4) при отсутствии самопроизвольного распада агрегатов будем иметь

$$\frac{dw}{dt} = \frac{kT_T}{\eta_0} \zeta_a^\times(H, \lambda, \delta, \dots)$$

Видно, что при  $H = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ ,  $\delta = \text{const}$  средний размер агрегатов растет линейно, а числовая концентрация  $N_a \sim t^{-1}$ . Это полностью соответствует результатам кинетической теории коагуляции [9, 20].

В числе сделанных предположений не содержалось каких-либо ограничений на кратность взаимодействий; тем не менее (4.5) сходно с уравнением, которое получается из общих кинетических уравнений [9] при парных столкновениях. Причиной тому служит отсутствие (в отличие, скажем, от уравнений химической кинетики) сечения взаимодействия среди независимых аргументов  $z_a$ . Уравнения более общего, нежели (4.5), вида возникают при введении в  $z_a$ ,  $z_f$  дополнительных независимых аргументов, отражающих физические свойства агрегатов и образуемых при помощи постоянных, входящих в  $U_\Sigma$ ,  $U_F$ , а также при учете влияния конечных  $R_a$  на агрегацию.

5. Отметим некоторые возможные обобщения и видоизменения рассуждений, проведенных в п. 2.3.

1. Выше предполагалось, что составляющие внутренней энергии  $U_\Sigma$ ,  $U_F$  и ряд других величин зависят только от двух характеристик структуры —  $w$  и  $H$  (или  $N_a$ ,  $H$ ), т. е. от двух первых моментов функции распределения агрегатов по размерам [9]. В п. 4 лишь один из моментов считался независимым. Возможно, однако, что названные величины зависят и от более высоких моментов. Их введение повлечет за собой появление новых слагаемых в диссипативной функции, новых определяющих уравнений, новых перекрестных эффектов и к повышению порядка системы структурных уравнений.

2. В некоторых случаях внутренняя энергия вообще определяется не только распределением агрегатов по размерам, но и более тонкими статистическими характери-

стиками, например распределением по удлинениям  $\lambda$ , по количеству запертой жидкости и т. п.

3. Учет внутренних степеней свободы — микровращения и микродеформации агрегатов — приводит к ряду дополнительных эффектов, в частности к зависимости флуктуационной температуры и скоростей изменения структуры от инвариантов тензоров микродвижений, не изменяя общего характера модели.

4. Если, как это сделано в [14], рассматривать двухфазную среду, состоящую из жидкой фазы и агрегатов, то запертие жидкости будет описываться как фазовый переход. В отличие от однофазного случая при двухфазном рассмотрении градиенты  $\partial H / \partial x_k$  (или  $\partial C / \partial x_k$ ) будут служить параметрами состояния. Поэтому может существовать анизотропия процессов переноса, а в число аргументов термодинамических потоков, в частности, функции  $G$ , могут входить также скаляры вида

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} X_k^s, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial x_l} X_{lk}^s$$

где  $X_k^s$  и  $X_{lk}^s$  — соответственно тензоры первого и второго рангов, имеющие смысл термодинамических сил (см. (2.9)).

Возможно также многофазное рассмотрение, когда принимается, что смесь состоит из жидкой (нулевой) фазы и твердых фаз, каждая из которых объединяет агрегаты одинакового размера. Комбинируя рассуждения п. 2 и статей [14, 21], удастся найти скорости  $G^n$  образования агрегатов из  $n$  частиц как функции (в квазистационарном случае) скоростей деформации и числовых концентраций  $N_a^m$  агрегатов различных сортов. Уравнения для  $N_a^m$ , куда входят  $G^n$ , образуют аналог кинетических уравнений агрегации для дискретного распределения по размерам [9]. Один из вариантов многофазной модели такого типа предложен ранее (см. [14], стр. 687).

6. Для диффузионных потоков  $J_l$  из (2.10) получаются представления через градиенты  $\mu$ ,  $T_T$ ,  $T_F$ ,  $w$  и  $N_a$  с переменными коэффициентами. Как и в [14], эти соотношения учитывают флуктуационный механизм усиления диффузии и, кроме того, отражают тенденцию к выравниванию состава смеси как по концентрации, так и по размерам агрегатов.

Обсуждение в п. 3, 4 не учитывало этих диффузионных эффектов и кондуктивного переноса флуктуационной энергии. Такое приближение справедливо, если соответствующие коэффициенты переноса («флуктуационной теплопроводности» и диффузии) малы, а зоны высоких градиентов  $T_F$ ,  $H$ , . . . отсутствуют. Однако в потоке могут существовать области, где малы также и недифференциальные члены соответствующих уравнений, например области, где  $I_2 \approx 0$ . С точки зрения уравнений п. 3, 4 в этих областях  $T_F = T_T$ ,  $dw / dt \geq 0$  (происходит очень медленный броуновский рост агрегатов). Но если коэффициенты переноса (например вязкость) сильно зависят от  $T_F$  вблизи  $T_T$  и от  $w$ , то допущенная малая абсолютная ошибка в вычислении  $T_F$ ,  $w$  приведет к большим погрешностям при определении других величин. Таким образом, справедливость простейших моделей тиксотропной среды нарушается не только в пограничных слоях с большими градиентами, но и в пограничных слоях специального типа, где одновременно слабы кондуктивные эффекты и процессы, индуцируемые сдвигом в потоке (флуктуации, образование и распад агрегатов). Более точный анализ процессов в областях, где  $I_2 \approx 0$ , может быть проведен с использованием метода сингулярных возмущений.

Рассмотрим в качестве модельного примера стационарную задачу о течении типа Пуазейля в плоской щели  $|Y| \leq 1$  ( $Y = y/h$  — безразмерная координата). Пусть распределение скорости  $u(Y)$  известно и требуется отыскать функцию  $Z(Y)$ , подчиняющуюся уравнению (ниже все величины безразмерны)

$$(6.1) \quad \varepsilon (DZ)' - W(Y, Z) = 0, \quad \varepsilon DZ = 0 \text{ при } Y = \pm 1$$

«Вырожденное» (при  $\varepsilon = 0$ ) решение  $Z_\infty(Y)$  удовлетворяет уравнению  $W(Z_\infty, Y) = 0$ . Отличия  $Z$  от  $Z_\infty$  локализованы в «пограничных слоях» вблизи оси

и стенок канала, причем  $Z - Z_\infty = O(\varepsilon^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ . Основным интересом представляет величина  $Z_0(\varepsilon) = Z(0)$ .

Пусть  $Z_\infty \approx AY^n$ ,  $W/D \approx BZ_0^m Y^k$ ,  $Z \sim Z_0$  при  $Y \ll 1$ , причем  $n \geq 0$ ,  $m \geq 1$ ,  $k \geq 0$ . Тогда в окрестности оси  $\varepsilon Z'' \approx BZ_0^m Y^k$ , откуда  $Z \approx Z_0 + \varepsilon^{-1} BZ_0^m Y^{k+2} / (k+1)(k+2)$ . При некотором  $Y = \delta$  это решение должно гладко сопрягаться с  $Z_\infty$ ; поэтому положим

$$(6.2) \quad \begin{aligned} A\delta^n &= Z_0 + \varepsilon^{-1} BZ_0^m \delta^{k+2} / (k+1)(k+2) \\ An\delta^{n-1} &= \varepsilon^{-1} BZ_0^m \delta^{k+1} / (k+1) \end{aligned}$$

Отсюда  $\delta$ ,  $Z_0$  находятся явно через остальные параметры задачи. Второе соотношение (6.2) показывает, что  $Z_0^m / \varepsilon \sim \delta^{n-2-k}$ , тогда из первого следует оценка порядка  $Z_0$  и окончательно, оценки  $\delta \sim \varepsilon^{n(1-m)+k-2}$ ,  $Z_0 \sim \delta^n$ . Видно, что порядок малости  $\delta$ ,  $Z_0$  может оказаться существенно ниже  $\varepsilon$ .

Аналогичные результаты получаются и при решении (6.1) методом интегральных соотношений.

Согласно (2.7), (2.10) простейшее уравнение для флуктуационной температуры в плоской щели имеет вид

$$(6.3) \quad \varepsilon (k_F T_F')' - k_1 (T_F - T_T) + k_2 (u')^2 = 0$$

Если  $k_F(0)$ ,  $k_1(0)$ ,  $k_2(0)$  конечны и отличны от нуля, а  $(u')^2 \sim Y^2$ , то  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $k = 0$  и, следовательно,  $T_F - T_T \sim \varepsilon$ ,  $\delta \sim \sqrt{\varepsilon}$ .

С учетом (2.5) и п. 4 примем, что числовая концентрация агрегатов удовлетворяет упрощенному уравнению

$$(6.4) \quad \varepsilon (DN_a')' - \zeta_{f0} |u'|^\beta N_a^b + \zeta_{a0} |u'|^\alpha N_a^a = 0$$

Здесь  $D$ ,  $\zeta_{f0}$ ,  $\zeta_{a0}$  конечны и отличны от нуля на оси канала,  $\gamma = (\alpha - \beta) / (b - a) > 0$ ,  $a, b, \alpha, \beta$  неотрицательны. Тогда  $n = \gamma$ ,  $m = b$ ,  $k = \beta$  при  $\beta < \alpha$  и  $m = a$ ,  $k = \alpha$  при  $\beta > \alpha$  и т. д.

Несколько сложнее осуществить оценку  $T_F$  и  $N_a$  в нестационарных течениях; в этом случае для  $Z_0$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение.

Поступила 29 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Некоторые вопросы гидродинамики кровообращения. В кн.: Гидродинамика кровообращения. М., «Мир», 1971.
2. Шадрина Н. Х., Стрельникова Л. А., Левкович Ю. И., Левтов В. А. Исследование агрегации эритроцитов текущей крови методом микрофотосъемки. Физиол. ж., 1974, т. 60, № 10.
3. Siskovic N., King R. G., Huang C. R., Copley A. L. A microscopic method for the visualization of flowing suspended particles of biological and non-biological origin during steady and oscillatory shear. Rheol. Acta, 1975, vol. 14, No. 7, p. 662—663.
4. Зеликсон Б. Б., Левтов В. А., Шадрина Н. Х. Оптические и электрические методы косвенного изучения реологических свойств крови. Тр. Рижск. н.-и. ин-та травматологии и ортопедии, 1975, вып. 13.
5. Billington E. W. Some measurements of the time dependence of the viscosity of thixotropic fluids. Proc. Phys. Soc., 1960, vol. 75, No. 1, p. 40—50.
6. Harris J. A continuum theory of time-dependent inelastic flow. Rheol. Acta, 1967, vol. 6, No. 1, p. 6—12.
7. Ruckenstein E., Mewis J. Kinetic of structural changes in thixotropic fluids. J. Coll. Interface Sci., 1973, vol. 44, No. 3, p. 532—541.
8. Merseer H. A., Weymann H. D. Time-dependent behavior of thixotropic suspensions. Rheol. Acta, 1974, vol. 13, No. 3, p. 413—417.
9. Попель А. С., Регирер С. А., Шадрина Н. Х. Об уравнениях кинетики агрегационных процессов в суспензиях. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
10. Murata T. Theory of non-Newtonian viscosity of blood at low shear rate — effect of rouleaux. Biorheology, 1976, vol. 13, No. 5, p. 287—296.

11. *Ponder E.* On sedimentation and rouleaux formation. II. *Quart. J. Exptl Physiol.*, 1926, vol. 16, No. 2, p. 173—194.
12. *Huang C. R.* A thermodynamic approach to generalized rheological equations of state for time-dependent and time-independent non-newtonian fluids. *Chem. Engng. J.*, 1972, vol. 3, No. 1, p. 100—104.
13. *Mahalingam R., Poon T. K.* Quasi-thermodynamic interpretation of the behavior of formed elements in blood flow. *Biorheology*, 1973, vol. 10, No. 3, p. 329—341.
14. *Регурер С. А.* К вопросу о континуальных моделях суспензий. *ПММ*, 1978, т. 42, вып. 4.
15. *Волощук В. М., Седунов Ю. С.* Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л., Гидрометеиздат, 1975.
16. *Brenner H.* Dynamics of neutrally buoyant particles in low Reynolds number flows. In: *Progr. Heat and Mass Transfer*, vol. 6. Oxford, Pergamon Press, 1972.
17. *Hinch E. J., Leal L. G.* Constitutive equations in suspension mechanics, pt 2. Approximate forms for a suspension of rigid particles affected by Brownian rotations. *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 76, No. 1, p. 187—208.
18. *Sather N. F., Lee K. J.* Viscosity of concentrated suspensions of spheres. In: *Progr. Heat and Mass Transfer*, vol. 6. Oxford, Pergamon Press, 1972.
19. *Мошев В. В.* Вязкостные закономерности высоконаполненных суспензий. В сб.: *Реология (полимеры и нефть)*. Новосибирск, Изд-во Ин-та теплофиз., 1977.
20. *Smoluchowski M.* Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen. *Z. Phys. Chem.*, 1918, Bd 92, H 2, S. 129—168. (Рус. перев.: М., ОНТИ, 1936.)
21. *Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами тепло- и массопереноса. *ПММ*, 1975, т. 39, вып. 3.