

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ И МАССООБМЕНА

А. А. Борзых, Г. П. Черепанов

(Москва)

Дается эффективное решение плоской задачи о конвективном переносе тепла от нагретого тела произвольной формы, обтекаемого идеальной несжимаемой теплопроводной жидкостью. Решение этой проблемы представляет интерес для теории конвективной теплопередачи в жидких металлах, теории массообмена движущегося пузыря в кипящем слое, теории абляции и замораживания в потоке теплопроводной жидкости и др. В переменных Гельмгольца исходная краевая задача сводится к задаче, эквивалентной задаче о конвективном переносе тепла от нагретой пластины, обтекаемой продольным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Последняя, после некоторых преобразований, решается разделением переменных в эллиптических координатах. Решение представлено в виде рядов по функциям Матье. Для малых и больших чисел Пекле получены простые асимптотические формулы. Дается простая интерполяционная формула для мощности теплового потока во всем диапазоне чисел Пекле.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим нагретый цилиндр, образующие которого параллельны оси  $z$ , так что контур  $L$  его поперечного сечения лежит в плоскости  $xy$ . Цилиндр обтекается стационарным безвихревым плоскопараллельным потоком несжимаемой идеальной теплопроводной жидкости с температуропроводностью  $a$  и теплопроводностью  $k_f$ . На бесконечности скорость жидкости равна  $v_0$ , а ее направление совпадает с направлением оси  $x$ . Температура цилиндра предполагается постоянной и равной  $T_0$ , а температура жидкости на бесконечности — равной нулю. Требуется найти поле температур и тепловой поток от тела к жидкости.

Предположение об идеальности жидкости, т. е. о малости толщины вязкого пограничного слоя по сравнению с характерным размером поперечного сечения (или с толщиной теплового пограничного слоя при больших числах Пекле), оправдывается, например, для жидких металлов, используемых в качестве теплоносителей в атомных реакторах [1].

Данная постановка задачи представляет интерес также для теории массообмена пузыря, движущегося в кипящем слое [2]. В этом случае число Пекле, определяемое по линейному размеру области замкнутой циркуляции, относительной скорости движения пузыря и эффективному коэффициенту диффузии, может принимать самые различные значения.

В горном деле для проходки скважин и стволов, обтекаемых подземными водами, применяется метод замораживания. Для расчета размеров ледопородных тел и тепловых потоков в этом случае также представляет интерес данная постановка задачи [3]. Можно указать и другие области возможных технических приложений.

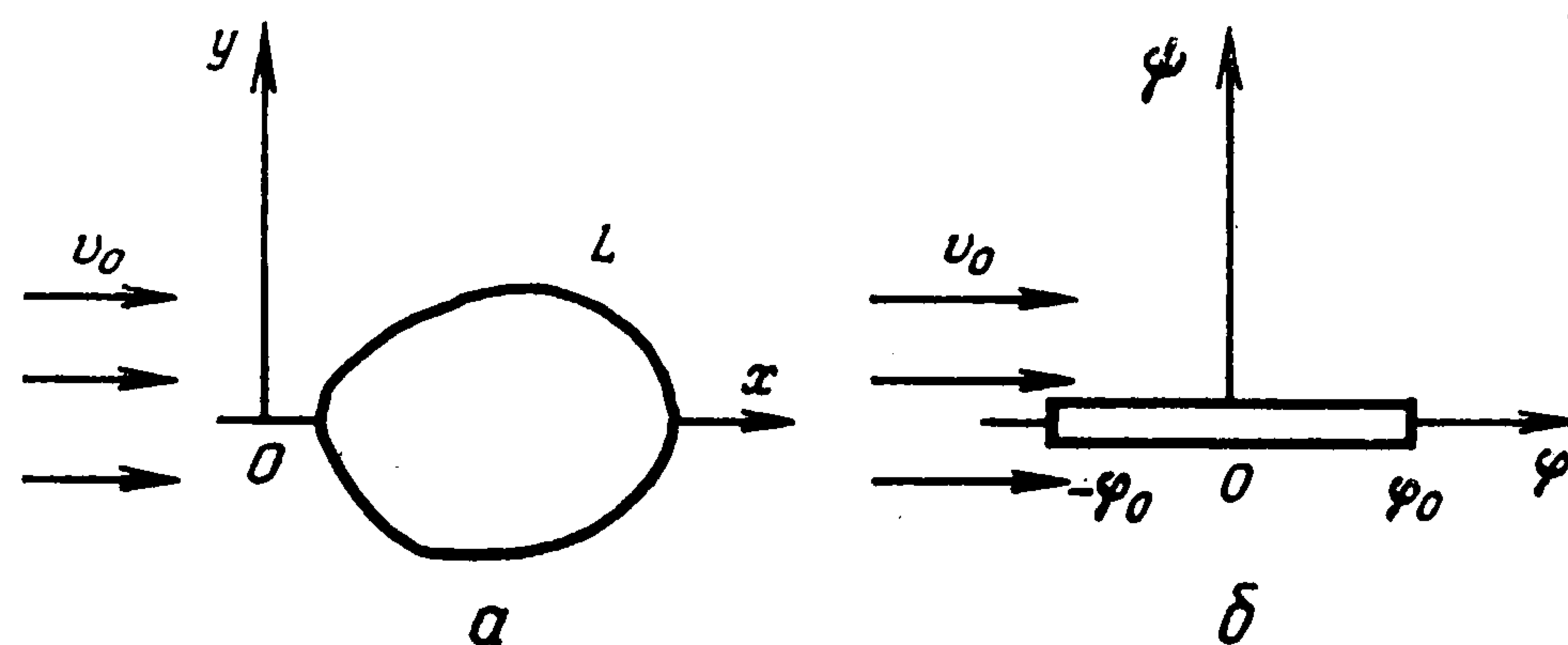
Краевая задача имеет следующий вид:

$$(1.1) \quad v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \Delta T \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$v_x = v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \Delta \varphi = 0$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} T &= 0, \quad v_x = v_0, \quad v_y = 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \\ T &= T_0, \quad \partial \varphi / \partial n = 0 \text{ на } L \end{aligned}$$

Здесь  $T$  — температура,  $v_x$ ,  $v_y$  — компоненты скорости жидкости,  $n$  — направление нормали к контуру. Через  $\varphi$  и  $\psi$  обозначим потенциал и функцию тока потенциального течения жидкости (размерности длины). Для заданного контура  $L$  величины  $\varphi$  и  $\psi$  как некоторые функции  $x$  и  $y$  можно определить методами теории функций комплексного переменного;



Фиг. 1

будем считать эти функции известными. Без ограничения общности можно считать, что на контуре  $L$  будет  $\psi = 0$ ,  $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ . Перейдем к переменным  $\varphi$  и  $\psi$  в формулах (1.1). Получим следующую краевую задачу (см. фиг. 1):

$$(1.3) \quad v_0 \frac{\partial T}{\partial \varphi} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right)$$

$$T = T_0, \quad \psi = 0, \quad |\varphi| < \varphi_0; \quad T = 0, \quad \varphi^2 + \psi^2 \rightarrow \infty$$

Таким образом, в переменных  $\varphi\psi$  приходим к задаче о конвективном переносе тепла от нагретой пластины ширины  $2\varphi_0$ , обтекаемой продольным потоком теплопроводной идеальной жидкости со скоростью потока  $v_0$  (фиг. 1).

Введем новую функцию

$$(1.4) \quad u = T e^{-\lambda \varphi} \quad (\lambda = v_0 / (2a))$$

Получим следующую краевую задачу:

$$(1.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = \lambda^2 u$$

$$u = T_0 e^{-\lambda \varphi}, \quad \psi = 0, \quad |\varphi| < \varphi_0$$

**2. Решение краевой задачи.** Перейдем к эллиптическим координатам  $\xi$  и  $\eta$

$$(2.1) \quad \varphi = \varphi_0 \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad \psi = \varphi_0 \operatorname{sh} \xi \sin \eta$$

и разделим переменные, полагая  $u = Z(\xi)\Psi(\eta)$ . Для  $\Psi(\eta)$  получим

уравнение Матье, а для  $Z(\xi)$  — модифицированное уравнение Матье

$$(2.2) \quad \partial^2 \Psi / \partial \eta^2 + (h - 2q \cos 2\eta) \Psi = 0$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - (h - 2q \operatorname{ch} 2\xi) Z = 0, \quad q = -k^2 = -\left(\frac{v_0 \Phi_0}{4a}\right)^2 < 0$$

Здесь  $h$  — постоянная разделения,  $k$  — число Пекле.

Из условий задачи ясно, что решения (2.2) должны быть четными и периодичными с периодом  $\pi$  или  $2\pi$ . Такими решениями уравнения (2.2) являются функции Матье вида  $ce_{2m}(\eta, -q)$  и  $ce_{2m+1}(\eta, -q)$ , где  $m = 0, 1, \dots$ . Этим функциям соответствуют собственные значения  $h = a_{2m}(q)$  и  $h = b_{2m+1}(q)$ .

Решения уравнения (2.3) должны быть действительными и обращаться в нуль при  $\xi \rightarrow \infty$ . Такими решениями являются модифицированные функции Матье  $Fek_{2m}(\xi, -q)$  и  $Fek_{2m+1}(\xi, -q)$ .

Все обозначения, связанные с функциями Матье, взяты из книг [4, 5]; индексы  $2m$  и  $2m + 1$  указывают, что при  $q = 0$

$$ce_{2m}(\eta, 0) = \cos 2m\eta, \quad ce_{2m+1}(\eta, 0) = \cos(2m + 1)\eta$$

Общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$(2.4) \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n ce_n(\eta, -q) Fek_n(\xi, -q)$$

Функции  $ce_n(\eta)$  образуют полную ортогональную систему, поэтому граничное условие при  $\xi = 0$  можно разложить в ряд по  $ce_n(\eta, -q)$

$$(2.5) \quad e^{-2k \cos \eta} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n ce_n(\eta, -q)$$

$$f_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_n(\eta, -q) e^{-2k \cos \eta} d\eta$$

Для определения  $f_n$  используем представления [5]

$$(2.6) \quad ce_{2m}(\eta, -q) = (-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2m)} \cos 2r\eta$$

$$ce_{2m+1}(\eta, -q) = (-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2m+1)} \cos(2r + 1)\eta$$

где  $A_{2r}^{(2m)}$ ,  $B_{2r+1}^{(2m+1)}$  — коэффициенты разложения функций Матье в ряд, их численные значения приведены в таблицах [4, 6].

Почленное интегрирование таких рядов возможно [4], поэтому получим

$$(2.7) \quad f_{2m} = (-1)^m 2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2m)} I_{2r}(-2k)$$

$$f_{2m+1} = (-1)^m 2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2m+1)} I_{2r+1}(-2k)$$

Напомним следующее представление [4]:

$$(2.8) \quad \int_0^{2\pi} \cos m\eta e^{t \cos \eta} d\eta = 2\pi I_m(t)$$

где  $I_m(t)$  — модифицированные функции Бесселя первого рода  $m$ -го порядка.

Таким образом, решение краевой задачи имеет вид

$$(2.9) \quad T(\eta, \xi) = 2T_0 e^{2k \cos \eta \operatorname{ch} \xi} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \operatorname{ce}_n(\eta, -q) \operatorname{Fk}_n(\xi, -q)$$

$$\operatorname{Fk}_n(\xi, -q) = \frac{\operatorname{Fek}_n(\xi, -q)}{\operatorname{Fek}_n(0, -q)}$$

$$D_{2m} = (-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2m)} I_{2r}(2k) = \frac{\operatorname{ce}_{2m}(0, -q)}{\operatorname{ce}_{2m}(0, q)} A_0^{(2m)}$$

$$D_{2m+1} = (-1)^{m+1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2m+1)} I_{2r+1}(2k) =$$

$$= - \frac{\operatorname{ce}_{2m+1}(0, -q)}{\operatorname{ce}'_{2m+1}(0, q)} k B_1^{(2m+1)}$$

Представления для  $D_n$  через функции Матье нулевого аргумента [4] позволяют использовать при вычислениях таблицы (например, [6]).

Определим мощность теплового потока  $Q$  от тела к жидкости (на единицу длины цилиндра)

$$(2.10) \quad Q = -k_f \oint_L \operatorname{grad}_n T \, dl = -2k_f \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left. \frac{\partial T}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} d\varphi =$$

$$= -2k_f \int_0^{\pi} \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} d\eta$$

Используя решение (2.9), получим  $\partial T / \partial \xi$  при  $\xi = 0$ . Почленно интегрируя и применяя интегралы (2.8), получаем при помощи (2.10) следующую формулу:

$$(2.11) \quad Q^* = \frac{Q}{4\pi k_f T_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} D_n^2 \operatorname{Fk}_n'(0, -q)$$

$$\operatorname{Fk}_n'(\xi, -q) = \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{Fk}_n(\xi, -q) = \frac{\operatorname{Fek}_n'(\xi, -q)}{\operatorname{Fek}_n(0, -q)}$$

$$\pi [A_0^{(2m)}]^2 \operatorname{Fek}'_{2m}(0, -q) = (-1)^{m+1} \operatorname{ce}_{2m}(\pi/2, q) \operatorname{ce}_{2m}^2(0, q)$$

$$\pi k^2 [B_1^{(2m+1)}]^2 \operatorname{Fek}'_{2m+1}(0, -q) = (-1)^{m+1} \operatorname{ce}_{2m+1}(\pi/2, q) [\operatorname{ce}'_{2m+1}(0, q)]^2$$

**3. Исследование решения. Малые числа Пекле.** Исследуем поведение формул (2.9) и (2.11) при малых  $|q|$ , что соответствует малым числам Пекле  $k$ . Все функции, входящие в решение, можно представить в виде рядов по тригонометрическим функциям или функциям Бесселя с коэффициентами  $A_{2r}$  или  $B_{2r+1}$ . Поэтому необходимо определить поведение последних при  $k \rightarrow 0$ . В общем случае они определяются из рекуррентных соотношений и условия нормирования типа (для  $\operatorname{ce}_{2m}(\eta, q)$ )

$$(3.1) \quad a_{2m} A_0 - q A_2 = 0, \quad (a_{2m} - 4) A_2 - q (A_4 + 2A_0) = 0$$

$$(a_{2m} - 4r^2)A_{2r} - q(A_{2r+2} + A_{2r-2}) = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ce}_{2m}^2(\eta, q) d\eta = 2[A_0^{(2m)}]^2 + \sum_{r=1}^{\infty} [A_{2r}^{(2m)}]^2 = 1$$

Главные члены разложений коэффициентов  $A_{2r}^{(2m)}$  и  $B_{2r}^{(2m+1)}$  при малых  $k$  были получены [4] Матье в виде

$$(3.2) \quad A_{m+2p}^{(m)} \approx B_{m+2p}^{(m)} \approx (-1)^p \frac{m!}{p!(m+p)!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2p}$$

$$A_{m-2p}^{(m)} \approx B_{m-2p}^{(m)} \approx \frac{(m-p-1)!}{p!(m-1)!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2p}, \quad m > 0 \quad p \geq 0$$

Согласно этим оценкам, коэффициенты  $A_m^{(m)}$  и  $B_m^{(m)}$  имеют порядок единицы. Более точное разложение коэффициентов  $A_m^{(m)}$  ( $B_m^{(m)}$ ) будет иметь вид

$$A_m^{(m)} \approx 1 - E_m (k/2)^4$$

где  $E_m$  — подлежащие определению коэффициенты.

Используя (3.2) и условия нормирования (3.1), отсюда получим

$$(3.3) \quad A_1^{(1)} \approx 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{k}{2}\right)^4, \quad A_2^{(2)} \approx 1 - \frac{19}{18} \left(\frac{k}{2}\right)^4$$

$$A_m^{(m)} \approx 1 - \frac{m^2+1}{(m^2-1)^2} \left(\frac{k}{2}\right)^4, \quad m > 2$$

Аналогично строятся разложения для коэффициентов  $A_{2r}^{(0)}$

$$(3.4) \quad A_0^{(0)} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 1 - \left(\frac{k}{2}\right)^4 + \frac{19}{4} \left(\frac{k}{2}\right)^8 \right]$$

$$A_{2r}^{(0)} \approx (-1)^r \frac{\sqrt{2}}{(r!)^2} \left(\frac{k}{2}\right)^{2r} \left[ 1 - \frac{4r^2+6r+1}{(r+1)^2} \left(\frac{k}{2}\right)^4 \right], \quad r \geq 1$$

Используя (3.3) и (3.4), получим из (2.6) разложения для  $\operatorname{ce}_0(\eta, \pm q)$  по степеням  $k^2$  (или  $|q|$ ). Например

$$\operatorname{ce}_0(\eta, -q) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 1 + 2 \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cos 2\eta - \left(\frac{k}{4}\right)^4 \left(1 - \frac{\cos 4\eta}{2}\right) \right]$$

Используя представления [4]

$$(3.5) \quad \operatorname{Fek}_{2m}(\xi, -q) = (-1)^m \frac{\operatorname{ce}_{2m}(0, q)}{\pi A_0^{(2m)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2m)} K_{2r}(2k \operatorname{ch} \xi)$$

$$\operatorname{Fek}_{2m+1}(\xi, -q) =$$

$$= (-1)^m \frac{\operatorname{se}_{2m+1}'(0, q)}{\pi k B_1^{(2m+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2m+1)} K_{2r+1}(2k \operatorname{ch} \xi)$$

а также разложения модифицированных функций Бесселя третьего рода  $K_n$  по степеням аргумента и формулы (3.3) и (3.4), можно получить разложения для  $\operatorname{Fek}_n(\xi, -q)$ .

В результате получаем следующие формулы:

$$(3.6) \quad \frac{T}{T_0} \approx \left\{ 1 + \frac{\ln \operatorname{ch} \xi + \kappa_0(0) - \kappa_0(\xi)}{\ln \gamma k} - \frac{4 \cos \eta [1 + \kappa_1(\xi)]}{\operatorname{ch} \xi [1 + \kappa_1(0)]} k \right\} \times$$

$$\times \exp(2k \cos \eta \operatorname{ch} \xi) \quad (k \ll 1)$$

$$(3.7) \quad Q^* \approx - (1 + 9k^2 / 4) \ln^{-1} (\gamma k / 2) - 2k^2$$

$$\kappa_0(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i, \quad \kappa_1(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{i+1} g_i, \quad g_i = \frac{(2i-1)!}{4^i (i!)^2 \operatorname{ch}^{2i} \xi}$$

где  $\ln \gamma = c$ ,  $c = 0.577 \dots$  — постоянная Эйлера.

*Большие числа Пекле.* Из физических соображений ясно, что при больших  $k$  нагрев жидкости происходит лишь в сравнительно узком слое, вытянутом вдоль оси  $\varphi$ , т. е. при больших  $k$  выполняется условие теплового погранслоя

$$\partial^2 T / \partial \psi^2 \gg \partial^2 T / \partial \varphi^2$$

Поэтому для получения асимптотических оценок при больших числах Пекле можно использовать решение следующей автомодельной задачи тепловом погранслое:

$$v_0 \frac{\partial T}{\partial \varphi} = a \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \quad (\varphi > -\varphi_0, \psi > 0)$$

$$T = T_0, \quad \psi = 0; \quad T = 0, \quad \varphi = -\varphi_0$$

Решение этой задачи имеет вид

$$(3.8) \quad T = T_0 \operatorname{erfc} \left\{ \left[ \frac{k\psi^2}{\varphi_0(\varphi + \varphi_0)} \right]^{1/2} \right\}$$

$$(3.9) \quad Q^* = (2/\pi)^{3/2} \sqrt{k} (k \gg 1)$$

Видно, что решение (3.8) в приближении погранслоя не годится вблизи особой точки  $\varphi = -\varphi_0, \psi = 0$ , где нужно пользоваться точным общим решением (2.9), (2.11).

*Окрестность особой точки.* Поле вблизи особой точки  $\varphi = -\varphi_0, \psi = 0$  при любых числах Пекле можно найти из решения следующей сингулярной краевой задачи [7]:

$$(3.10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = \lambda^2 u, \quad u = T e^{-\lambda \varphi}$$

$$u = T_0 e^{-\lambda \varphi} = u_0 e^{-\lambda(\varphi + \varphi_0)}, \quad \psi = 0, \quad \varphi > -\varphi_0$$

$$\partial u / \partial \psi = 0, \quad \psi = 0, \quad \varphi < -\varphi_0$$

Перейдем к полярным координатам  $r\theta$

$$\varphi + \varphi_0 = r \cos \theta, \quad \psi = r \sin \theta$$

Методом разделения переменных можно получить следующее интегральное представление (типа Конторовича — Лебедева) решения задачи (3.10), исчезающего при  $r \rightarrow \infty$  ( $A$  и  $B$  — неизвестные функции  $\nu$ ):

$$u = \int_0^{\infty} (A \operatorname{ch} \nu \theta + B \operatorname{sh} \nu \theta) K_{i\nu}(\lambda r) d\nu$$

Используя граничные условия и таблицы интегральных преобразований Конторовича—Лебедева [8], получим

$$\pi u = 2u_0 \int_0^{\infty} (\operatorname{ch} \nu \theta - \operatorname{th} \nu \pi \operatorname{sh} \nu \theta) K_{i\nu}(\lambda r) d\nu$$

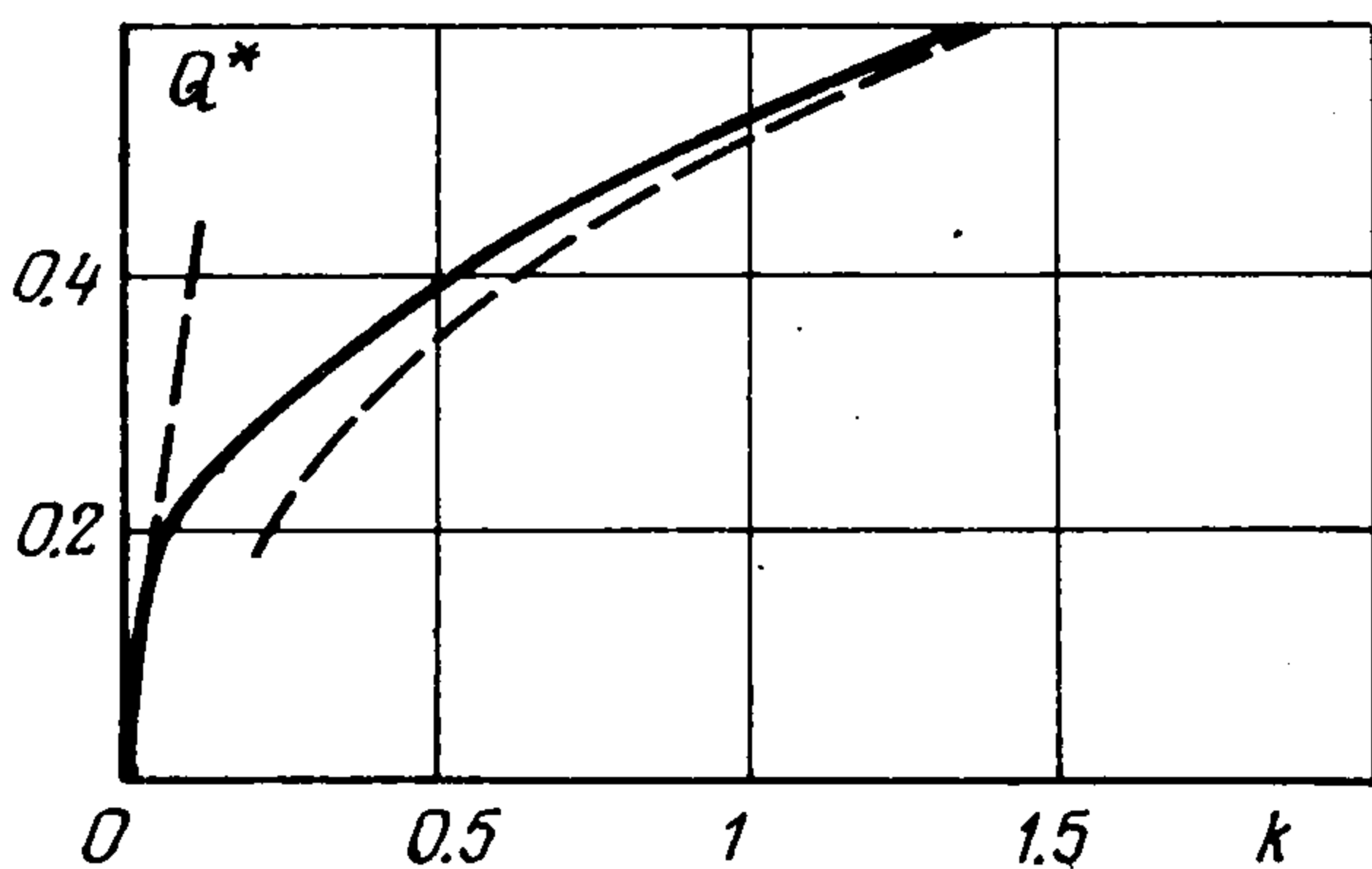
Отсюда находим мощность теплового потока от отрезка  $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$

$$(3.11) \quad Q = -2k_f \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{\partial T}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} d\varphi = -2k_f e^{-\lambda\varphi_0} \int_0^{2\varphi_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} e^{\lambda r} \frac{dr}{r} = \\ = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} k_f T_0 \int_0^{2\lambda\varphi_0} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} k_f T_0 \sqrt{\lambda\varphi_0}$$

Здесь было использовано следующее соотношение [8]:

$$\int_0^{\infty} v \operatorname{th} v \pi K_{iv}(x) dv = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} e^{-x}$$

В результате вновь получаем формулу (3.9).



Фиг. 2

Замечательно, что соответствующее выражение, полученное ранее при помощи приближенной теории пограничного слоя, в точности совпадает с результатом, полученным при помощи точного сингулярного решения в окрестности особой точки.

4. Интерполяционная формула мощности теплового потока. Сложное точное выражение (2.11) для мощности теплового потока, неудобное для расчета во всем диапазоне чисел Пекле, можно аппроксимировать следующей простой формулой:

$$(4.1) \quad Q_a^* = \frac{Hg^{M+1} + |G|^{-N}}{Hg^M + |G|^{-N-1}} (Q^* \approx Q_a^*)$$

$$g = (2/\pi)^{1/2} \sqrt{k}, \quad G = -(1 + 9k^2/4) \ln^{-1}(\gamma k/2) - 2k^2$$

( $H, M, N$  — некоторые постоянные.) Функция  $Q_a^*(k)$  при  $k \ll 1$  и при  $k \gg 1$  ведет себя, как точные асимптотические решения (3.7) и (3.9) соответственно.

Постоянные  $H, M$  и  $N$  определим при помощи следующего метода. Составим среднюю квадратичную ошибку интерполирования по десяти точкам  $k_i$ , равномерно распределенным в интервале  $0.01 < k < 5$

$$\sigma(H, M, N) = \left\{ \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} [Q^*(k_i) - Q_a^*(k_i)]^2 \right\}^{1/2}$$

Величины  $Q^*(k_i)$  были найдены из точного решения (2.11) при помощи ЭВМ. Далее, минимизируем нелинейную функцию  $\sigma(H, M, N)$ , используя метод Зейделя (метод покоординатного спуска). В результате получены следующие значения постоянных:  $H = 20, M = 0.02, N = 1.30$ . При этом ошибка интерполяционной формулы (4.1) не превышает 2%.

На фиг. 2 приведена сплошная кривая зависимости  $Q^*(k)$ , построенная по формуле (2.11) при помощи ЭВМ. На этой же фигуре штриховыми линиями показаны асимптотические решения (3.7) и (3.9). Таким образом,

для приближенных вычислений при  $k \leq 5 \cdot 10^{-3}$  с погрешностью менее 4% применимо решение (3.7), а при  $k \geq 1$  с погрешностью менее 2% — решение (3.9).

Поступила 27 I 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М. Физматгиз, 1959.
2. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. О массообмене между пузырями и непрерывной фазой в псевдооживленном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
3. Максимов В. А. К определению формы тел, образовавшихся при застывании потока жидкой фазы. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
4. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. 3. М., «Наука», 1967.
6. Tables relating to Mathieu function. New York, Columbia Univ. Press, 1951.
7. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований т. 2. М., «Наука», 1970.