Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 533.6.011

УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В. И. Гнесин, В. Л. Гродзинский, Г. А. Соколовский

(Харьков)

Получены обобщенные уравнения газовой динамики в дифференциальной форме в относительной криволинейной деформируемой системе координат, а также в дивергентной форме во вращающейся с постоянной скоростью системе координат. Показано, что известные формы записи уравнений газодинамики являются частными случаями обобщенных уравнений.

При расчетах многомерных нестационарных газодинамических течений в областях со сложной геометрией выделяются два подхода. При использовании одного подхода физическая область разбивается на отдельные подобласти, в каждой из которых течение гладкое и описывается системой дифференциальных уравнений, а на границах подобластей выполняются соотношения на ударных волнах и контактных разрывах. При другом подходе осуществляется сквозной счет, при котором уравнения газовой динамики записываются в единообразный для всей расчетной области форме в виде законов сохранения.

В первом случае повышение точности расчета может быть достигнуто путем выделения особенностей потока (ударных волн, контактных разрывов), связав их положение с координатными линиями криволинейной системы координат. При этом для неустановившихся течений возникает задача дальнейшего обобщения приведенных в [1, 2] уравнений газовой динамики на случай произвольной деформируемой системы координат.

При применении методов сквозного счета уравнения газовой динамики представляют в форме законов сохранения, записанных в инерциальных системах координат — декартовой [1], криволинейной ортогональной [1, 3] или произвольной криволинейной [2, 4]. Однако весьма важен частный случай неинерциальной, вращающейся с постоянной угловой скоростью системы координат (например, в теории лопаточных машин).

1. Произвольная деформируемая система координат. Введем наряду с декартовой системой координат x^i с базисными векторами $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}^i$ криволинейную деформируемую систему координат $q^i(x, t)$ с базисными векторами $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ (верхние и нижние индексы соответствуют контравариантным и ковариантным векторам базиса [2, 5])

$$\mathbf{e}^i = a_\beta{}^i \mathbf{x}^\beta, \quad \mathbf{e}_i = b_i{}^\beta \mathbf{x}_\beta \tag{1.1}$$

$$a_\beta{}^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^\beta}, \quad b_i{}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial q^i}, \quad a_\beta{}^i b_i{}^\beta = \delta_j{}^i \tag{1.2}$$

где $a_\beta{}^i$ и $b_i{}^\beta$ — матрицы прямого и обратного преобразований координат, по повторяющемуся индексу производится суммирование.

Построение системы уравнений проводится в контравариантных составляющих векторов скоростей: абсолютной $\mathbf{V} = V^i\mathbf{e}_i$, относительной $\mathbf{V}_r = V_r^i\mathbf{e}_i$ и переносной $\mathbf{V}_e = V_e^i\mathbf{e}_i$.

Закон сохранения массы во времени t для жидкого объема τ записывается в системе координат q^i в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\tau \rho\sqrt{g}\,dq^1\,dq^2\,dq^3 = 0,\quad g = \det\|g_{ij}\| \tag{1.3}$$

(ρ — плотность среды, g — определитель метрического тензора [2, 5]).

В уравнении (1.3) произведение дифференциалов координат $dq^1dq^2dq^3$ можно считать некоторым элементарным «объемом» в системе координат q^i, рассматриваемой в этом случае как декартовая (вне связи, конечно, с системой x^i). Применение к левой части (1.3) правила дифференцирования интеграла по подвижному объему [2] дает

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\tau \rho\sqrt{g}\,dq^1\,dq^2\,dq^3 =$$
$$=\int\limits_\tau\left[\frac{\partial(\rho\sqrt{g})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\sqrt{g}\mathbf{V}_r)\right]dq^1\,dq^2\,dq^3 = 0$$

здесь $\partial / \partial t$ — частная производная по времени в относительной системе координат; операция div определяется как в декартовой системе координат, т. е.

$$\operatorname{div}(\rho\sqrt{g}\,\mathbf{V}_r) = \partial(\rho\sqrt{g}\,V_r^i) / \partial q^i.$$

Так как объем может быть произвольным, уравнение сохранения массы запишется в виде

$$\frac{\partial(\rho\sqrt{g})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\sqrt{g}V_r^i)}{\partial q^i} = 0 \tag{1.4}$$

Для записи уравнения движения

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{1.5}$$

в гидродинамической форме необходимо выразить абсолютное ускорение $\mathbf{a} = d(V^i\mathbf{e}_i) / dt$ в системе координат q^i. При взятии полной производной по времени учитывается, что базисные векторы жидкой частицы представляются в форме

$$V^i = V^i[q(t), t],\quad \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i[q(t), t]$$

где $q^\alpha = q^\alpha(t)$ — уравнение траектории фиксированной жидкой частицы, т. е. $\partial q^\alpha / dt = V_r^\alpha$. Тогда

$$\mathbf{a} = \frac{d(V^i\mathbf{e}_i)}{dt} = \frac{dV^i}{dt}\mathbf{e}_i + V^i\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \tag{1.6}$$
$$= \left(\frac{\partial V^i}{\partial t} + \frac{\partial V^i}{\partial q^\alpha}\frac{dq^\alpha}{dt}\right)\mathbf{e}_i + V^\alpha\left(\frac{\partial\mathbf{e}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta}\frac{dq^\beta}{dt}\right) =$$
$$= \left[\frac{\partial V^i}{\partial t} + V_r^\alpha\left(\frac{\partial V^i}{\partial q^\alpha} + V^\beta\Gamma^i_{\alpha\beta}\right)\right]\mathbf{e}_i + V^\alpha\frac{\partial\mathbf{e}_\alpha}{\partial t}$$

Здесь $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ — компоненты вектора $\partial e_\alpha / \partial q^\beta$ в базисе e_i (символы Кристоффеля).

Для определения компонент вектора $\partial e_\alpha / \partial t = c_\alpha{}^j e_j$ дифференцируется по времени соотношение $e^i \cdot e_\alpha = \delta_\alpha{}^i$ и учитывается (1.1), т. е.

$$e^i \cdot c_\alpha{}^j e_j + b_\alpha{}^p x_p \cdot \frac{\partial a_\beta{}^i}{\partial t} x^\beta = 0$$

Отсюда

$$c_\alpha{}^i = -\frac{\partial a_\beta{}^i}{\partial t} b_\alpha{}^\beta \tag{1.7}$$

Подстановка (1.6) в (1.5) и представление компонент абсолютной скорости V^i в виде суммы относительной $V_r{}^i$ и переносной $V_e{}^i$ скоростей приводит к уравнению движения в неинерциальной деформируемой системе координат

$$\left\{\left[\frac{\partial V_r{}^i}{\partial t} + V_r{}^\alpha\left(\frac{\partial V_r{}^i}{\partial q^\alpha} + V_r{}^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta}\right)\right] + \left[\frac{\partial V_e{}^i}{\partial t} + V_r{}^\alpha\left(\frac{\partial V_e{}^i}{\partial q^\alpha} + V_e{}^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta}\right)\right] + [(V_r{}^\alpha + V_e{}^\alpha)\, c_\alpha{}^i]\right\} e_i = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{1.8}$$

где $c_\alpha{}^i$ определяются формулами (1.7).

Для определения контравариантных составляющих $V_e{}^i$ вектора переносной скорости в системе координат q^i дифференцируется по t тождество $q^i = q^i\,[x\,(q,\,t),\,t]$. Тогда

$$\frac{\partial q^i}{\partial t} = -\frac{\partial q^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial t}$$

Так как $\partial x^j\,(q,\,t)\,/\,\partial t$ — контравариантная составляющая вектора переносной скорости в системе координат x^i, то в силу преобразования составляющих вектора при переходе к другой системе координат величина $\partial q^i\,(x,\,t)\,/\,\partial t$ — взятая со знаком минус контравариантная составляющая вектора переносной скорости в системе координат q^i, т. е.

$$V_e{}^i = -\,\partial q^i\,(x,\,t)\,/\,\partial t$$

В частном случае $\mathbf{V}_e = \mathrm{const}$, $c_\alpha{}^i = 0$ из (1.8) получается известная форма уравнений движения в инерциальной недеформируемой системе координат [2]

$$\left(\frac{\partial V^i}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial V^i}{\partial q^\alpha} + V^\alpha V^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta}\right) e_i = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$

Рассмотрим недеформируемую систему координат, вращающуюся с угловой скоростью ω. В этом случае первая квадратная скобка в (1.8) — полная производная по времени от относительной скорости в относительной системе координат, т. е. относительное ускорение $(dV_r{}^i e_i\,/\,dt)_r$. Вторая квадратная скобка определяет полную производную по времени от переносной скорости ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор, ε — угловое ускорение)

$$\left[\frac{\partial V_e{}^i}{\partial t} + V_r{}^\alpha\left(\frac{\partial V_e{}^i}{\partial q^\alpha} + V_e{}^\beta \Gamma^i_{\alpha\beta}\right)\right] e_i = \left(\frac{dV_e{}^i e_i}{dt}\right)_r = \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_r \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \quad (\mathbf{V}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{1.9}$$

Преобразуем последнее слагаемое в левой части (1.8)

$$(1.10)\qquad (V_r^\alpha + V_e^\alpha) c_\alpha^i \mathbf{e}_i = (V_r^\alpha + V_e^\alpha)\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial t} = = (V_r^\alpha + V_e^\alpha)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\alpha) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_e$$

Подставляя (1.9), (1.10) в (1.8), получим

$$(1.11)\qquad \frac{d\mathbf{V}_r}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$

При $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ имеем известную форму уравнения движения во вращающейся с постоянной угловой скоростью системе координат [6].

Закон сохранения энергии для нетеплопроводного газа эквивалентен сохранению энтропии жидкой частицы в областях гладкого течения, на которые вся расчетная область разбивается введенной относительной системой координат

$$(1.12)\qquad \frac{\partial S}{\partial t} + V_r^i \frac{\partial S}{\partial q^i} = 0$$

Система уравнений неразрывности (1.4), движения (1.8) и сохранения энергии (1.12) замыкается уравнением состояния.

2. Дивергентные уравнения газовой динамики в криволинейной системе координат, вращающейся с постоянной скоростью. Дивергентная форма уравнения сохранения массы в произвольной системе координат имеет вид (1.4).

Закон сохранения импульса во времени t для жидкого объема τ можно записать в интегральной форме

$$(2.1)\qquad \frac{d}{dt}\int_\tau \rho\mathbf{V}\,d\tau = -\int_s p\mathbf{n}\,ds \equiv -\int_\tau \operatorname{grad} p\,d\tau$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности s, ограничивающей жидкий объем τ.

Вводя обозначения $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_e$ и $\mathbf{a}_r = d\mathbf{V}_r\,/\,dt$ для абсолютного, переносного и относительного ускорений, преобразуем первый интеграл в (2.1) с учетом (1.3) следующим образом ($\rho\mathbf{V}_r\mathbf{V}_r$ — тензор-диада):

$$(2.2)\qquad \frac{d}{dt}\int_\tau \rho\mathbf{V}\,d\tau = \int_\tau \frac{d\mathbf{V}}{dt}\rho\,d\tau = \int_\tau \rho\,(\mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r)\,d\tau$$

$$\int_\tau \rho\mathbf{a}_r\,d\tau = \int_\tau \rho\frac{d\mathbf{V}_r}{dt}\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_\tau \rho\mathbf{V}_r\,d\tau = \int_\tau \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}_r)\,d\tau + + \int_s \rho\mathbf{V}_r(\mathbf{V}_r\mathbf{n})\,ds = \int_\tau\left[\frac{\partial(\rho\mathbf{V}_r)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}_r\mathbf{V}_r)\right]d\tau$$

С учетом (2.2) из (2.1) вытекает уравнение сохранения импульса в векторной форме

$$(2.3)\qquad \partial\,/\,\partial t\,(\rho\mathbf{V}_r) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}_r\mathbf{V}_r) + \operatorname{grad} p = -\rho\mathbf{a}_e - 2\rho\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r$$

Закон сохранения энергии для жидкого объема τ в интегральной форме записывается в виде (ε — внутренняя энергия)

$$\frac{d}{dt}\int_\tau\left(\rho\varepsilon+\rho\frac{V^2}{2}\right)d\tau=-\int_\tau p(\mathbf{Vn})ds \tag{2.4}$$

Входящие в (2.4) интегралы с учетом (1.5) преобразуются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\int_\tau\rho\frac{V^2}{2}d\tau=\int_\tau\rho\frac{d(\mathbf{VV})}{2dt}d\tau=\int_\tau\rho(\mathbf{Va})\,d\tau=$$
$$=\int_\tau\rho\left[(\mathbf{V}_r+\mathbf{V}_e)(\mathbf{a}_e+\mathbf{a}_r+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r)\right]d\tau=$$
$$=\int_\tau\rho\left[\mathbf{V}_r\mathbf{a}_e+\mathbf{V}_r\mathbf{a}_r+\mathbf{V}_e\mathbf{a}+2\mathbf{V}_r(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r)\right]d\tau$$
$$\mathbf{V}_r(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_r)\equiv0,\quad \mathbf{V}_r\mathbf{a}_r=\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{V}_r^2}{dt},\quad \mathbf{V}_e\mathbf{a}=-\mathbf{V}_e\cdot\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p$$

Для вращающейся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ системы координат q^i (метрика g_{ij} не зависит от времени) имеем

$$\mathbf{a}_e=-\operatorname{grad}u^2/2$$

где u — величина линейной скорости точек системы координат q^i. Тогда из (1.4) вытекает

$$\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}_r)=0$$

Отсюда следует

$$\rho\mathbf{V}_r\mathbf{a}_e=-\rho\mathbf{V}_r\operatorname{grad}\frac{u^2}{2}=-\operatorname{div}\left(\rho\mathbf{V}_r\frac{u^2}{2}\right)+$$
$$+\frac{u^2}{2}\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}_r)=-\operatorname{div}\left(\rho\mathbf{V}_r\frac{u^2}{2}\right)-\frac{u^2}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{q^i}=$$
$$=-\operatorname{div}\left(\rho\mathbf{V}_r\frac{u^2}{2}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{u^2}{2}\right)_{q^i}$$
$$\int_s p(\mathbf{Vn})\,ds=\int_\tau\operatorname{div}(p\mathbf{V})\,d\tau=\int_\tau\left[\operatorname{div}(p\mathbf{V}_r)+\operatorname{div}(p\mathbf{V}_e)\right]d\tau=$$
$$=\int_\tau\left[\operatorname{div}(p\mathbf{V}_r)+p\operatorname{div}\mathbf{V}_e+\mathbf{V}_e\operatorname{grad}p\right]d\tau$$
$$\operatorname{div}\mathbf{V}_e=\operatorname{div}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\mathbf{r}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{r})\equiv0$$
$$\int_\tau\rho\mathbf{V}_r\mathbf{a}_r d\tau=\int_\tau\rho\frac{1}{2}\left(\frac{dV_r^2}{dt}\right)_{q^i}d\tau=\frac{d}{dt}\left(\int_\tau\rho\frac{V_r^2}{2}d\tau\right)_{q^i}=$$
$$=\int_\tau\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_r^2)_{q^i}d\tau+\int_s\rho\frac{V_r^2}{2}(\mathbf{V}_r\mathbf{n})\,ds=$$
$$=\int_\tau\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\frac{V_r^2}{2}\right)_{q^i}+\operatorname{div}\left(\rho\mathbf{V}_r\frac{V_r^2}{2}\right)\right]d\tau$$
$$\frac{d}{dt}\int_\tau\rho\varepsilon\,d\tau=\int_\tau\left(\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}\right)_{q^i}+\int_s\rho\varepsilon(\mathbf{V}_r\mathbf{n})\,ds=$$
$$=\int_\tau\left[\left(\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}\right)_{q^i}+\operatorname{div}(\rho\varepsilon\mathbf{V}_r)\right]d\tau$$

Подставляя полученные выражения в (2.4) и учитывая произвольность объема интегрирования τ, получим следующую дивергентную форму уравнения энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}[(E+p)\mathbf{V}_r]=0,\quad E=\rho\left(\varepsilon+\frac{V_r^2-u^2}{2}\right) \tag{2.5}$$

Приведем символическую векторную форму записи дивергентных уравнений нестационарной газовой динамики в произвольной неинерциальной системе координат, вращающейся с постоянной скоростью (для трех пространственных координат)

$$\partial f/\partial t+\nabla_1F_1+\nabla_2F_2+\nabla_3F_3+H=0 \tag{2.6}$$

$$f=\begin{Vmatrix}\rho\\ \rho V^1\\ \rho V^2\\ \rho V^3\\ E\end{Vmatrix},\quad F_1=\begin{Vmatrix}\rho V^1\\ \rho V^1V^1+g^{11}p\\ \rho V^1V^2+g^{12}p\\ \rho V^1V^3+g^{13}p\\ (E+p)V^1\end{Vmatrix}$$

$$F_2=\begin{Vmatrix}\rho V^2\\ \rho V^2V^1+g^{21}p\\ \rho V^2V^2+g^{22}p\\ \rho V^2V^3+g^{23}p\\ (E+p)V^2\end{Vmatrix},\quad F_3=\begin{Vmatrix}\rho V^3\\ \rho V^3V^1+g^{31}p\\ \rho V^3V^2+g^{32}p\\ \rho V^3V^3+g^{33}p\\ (E+p)V^3\end{Vmatrix}$$

$$H=\begin{Vmatrix}0\\ \rho a_e^1+\dfrac{2}{\sqrt{g}}\rho(\omega_2V^3-\omega_3V^2)\\ \rho a_e^2+\dfrac{2}{\sqrt{g}}\rho(\omega_3V^1-\omega_1V^3)\\ \rho a_e^3+\dfrac{2}{\sqrt{g}}\rho(\omega_1V^2-\omega_2V^1)\\ 0\end{Vmatrix}$$

В случае ортогональной системы координат имеем $g_{ii}=H_i^2$ (суммирования по i нет), $g_{ik}=0$, $g=H_1^2H_2^2H_3^2$ (H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ламе), и система (2.6) в результате преобразований может быть представлена в виде системы уравнений сохранения массы, импульса и энергии (e^{ijk} — тензор Леви-Чивита)

$$\frac{\partial(H_1H_2H_3\rho)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_j}\rho V_j\right)=0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_1H_2H_3\rho V_i)+\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_j}(\delta_{ij}p+\rho V_iV_j)\right]=$$

$$=\frac{H_1H_2H_3}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial x^i}\rho V_jV_j+p\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i}\right)-$$

$$-\frac{H_1H_2H_3}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial x^j}\rho V_iV_j-H_iH_1H_2H_3\rho\left(\frac{a_{ei}}{H_i}+2e^{ijk}H_jH_k\omega_jV_k\right)$$

$$\frac{\partial(H_1H_2H_3E)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_j}(E+p)V_j\right]=0$$

$$(i,j,k=1,2,3)$$

Система уравнений (2.7) замыкается уравнением состояния.

Поступила 5 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1, М., «Наука», 1973.
3. Kulter P. Computation of three-dimensional inviscid supersonic flows. Lecture Notes Phys., 1975, vol. 41, No. 1.
4. *Vinokur M.* Conservation equations of gas-dynamics in curvilinear coordinate systems. J. Comput. Phys., 1974, vol. 14, No. 2.
5. *Мак-Коннел А.* Введение в тензорный анализ. М., Физматгиз, 1963.
6. *Жуковский М. И.* Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашинах. Л. «Машиностроение», 1967.