

**БИФУРКАЦИИ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ОДНОЙ СИСТЕМЫ  
УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ЗАДАЧЕ О ПОТЕРЕ  
УСТОЙЧИВОСТИ АУТОКОЛЕБАНИЙ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА 1 : 4**

**А. И. Нейштадт**

(Москва)

Рассматривается зависящая от параметров система дифференциальных уравнений на плоскости, возникающая в задаче о потере устойчивости периодического решения вблизи резонанса 1 : 4. В случаях, когда эта система близка к гамильтоновой, описаны типы ее фазового портрета.

**1. Уравнения в полярных координатах.** В [1] показано, что для описания явлений, происходящих при потере устойчивости периодического решения вблизи резонанса 1 : 4, необходимо изучить бифуркации фазового портрета уравнения

$$(1.1) \quad z' = \varepsilon z + Az |z|^2 + B\bar{z}^3$$

где  $z = x + iy$  — точка комплексной плоскости,  $\varepsilon$ ,  $A$ ,  $B$  — комплексные параметры. В данной работе описаны типы фазового портрета (1.1), возникающие при малых  $\operatorname{Re} \varepsilon$ ,  $\operatorname{Re} A$ . Основные вопросы здесь связаны с выяснением расположения и бифуркаций предельных циклов.

Опишем кратко связь между задачей о потере устойчивости и уравнением (1.1). Пусть у системы дифференциальных уравнений, зависящей от параметров, есть при некотором значении параметров периодическое решение, все мультипликаторы которого лежат в единичном круге. Пусть при изменении параметров рассматриваемое решение теряет устойчивость следующим образом: пара комплексно-сопряженных мультипликаторов пересекает единичную окружность, а остальные лежат в единичном круге. В момент потери устойчивости и в близкие моменты в окрестности рассматриваемого периодического решения обязательно происходят бифуркации: рождаются и исчезают другие периодические решения и двумерные инвариантные торы. В случаях, когда мультипликаторы пересекают единичную окружность не слишком близко к точкам  $\pm i$ , эти бифуркации описаны в [1,2]. Случай мультипликаторов, близких к  $\pm i$ , пока полностью не изучен.

Движение в окрестности периодического решения изучают, рассматривая нормальную форму системы дифференциальных уравнений около этого решения. Если мультипликаторы близки к  $\pm i$ , то при построении нормальной формы надо учитывать резонанс 1 : 4 между движением по исходному периодическому решению и колебаниями решений уравнений в вариациях около него. Тогда в нормальной форме в главном приближении отщепляется уравнение (1.1). Параметр  $\varepsilon$  в нем описывает отклонение мультипликатора от точки  $i$ . Равновесию  $z = 0$  отвечает исходное периодическое решение, другим равновесиям — периодические решения, близкие к исходному, но с периодом приблизительно в четыре раза большим, предельным циклом (1.1) отвечают

двумерные инвариантные торы исходной системы уравнений. Бифуркации в окрестности периодического решения можно описать, изучая бифуркации фазового портрета (1.1).

Поворотом фазовой плоскости  $(x, y)$  можно добиться того, чтобы параметр  $B$  в (1.1) был вещественным. Обозначим  $\varepsilon = \sigma + i\tau$ ,  $A = -\gamma - i\alpha$ ,  $B = \beta$ . Следуя [1], введем симплектические полярные координаты  $\rho$ ,  $\varphi$  и перепишем исходное уравнение (1.1) в виде системы

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \rho' &= -\partial H/\partial\varphi + 2\rho(\sigma - 2\gamma\rho), & \varphi' &= \partial H/\partial\rho \\ (\rho &= |z|^2/2, & \varphi &= \arg z, & H &= \tau\rho - \rho^2(\alpha + \beta \sin 4\varphi)) \end{aligned}$$

Эта система инвариантна относительно поворота фазовой плоскости на угол  $\pi/2$ .

Будем предполагать, что  $\tau \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ . Тогда изменением направления времени и поворотом фазовой плоскости на угол  $\pi/4$  можно добиться положительности  $\tau$  и  $\beta$ . Поэтому будем считать, что  $\tau > 0$ ,  $\beta > 0$ .

2. Фазовый портрет невозмущенной задачи ( $\sigma = \gamma = 0$ ). В дальнейшем рассматриваем случай малых  $\sigma$ ,  $\gamma$ . Поэтому сначала опишем фазовую плоскость задачи при  $\sigma = \gamma = 0$ . При таких  $\sigma$ ,  $\gamma$  система (1.2) приобретает гамильтонову форму

$$(2.1) \quad \rho' = -\partial H/\partial\varphi, \quad \varphi' = \partial H/\partial\rho$$

Используя интеграл  $H = \text{const}$ , можно показать, что в зависимости от соотношения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  фазовый портрет системы (2.1) может быть следующих трех типов.

А)  $\alpha > \beta$ . Фазовый портрет изображен на фиг. 1, а. Четыре седла имеют координаты  $\rho = \rho_c = 1/2\tau/(\alpha + \beta)$ ,  $\varphi = \pi/8 + \pi n/2$  ( $n = 1, \dots, 4$ ); в седлах  $H = h_c = 1/4\tau^2/(\alpha + \beta)$ . Четыре центра имеют координаты  $\rho = \rho_a = 1/2\tau/(\alpha - \beta)$ ,  $\varphi = 3\pi/8 + \pi n/2$  ( $n = 1, \dots, 4$ ); в этих центрах  $H = h_a = 1/4\tau^2/(\alpha - \beta)$ . Начало координат также является центром. Сепаратрисы образуют два одинаковых эллипса со взаимно перпендикулярными большими полуосями. Сепаратрисы разбивают плоскость на области  $G_1, G_2, G_3^{(n)}$  ( $n = 1, \dots, 4$ ), заполненные замкнутыми траекториями. Любую из областей  $G_3^{(n)}$  будем называть областью  $G_3$ . Уравнения траекторий находятся из соотношения  $H = h = \text{const}$ , причем  $0 \leq h < h_c$  в области  $G_1$ ,  $-\infty < h < h_c$  в области  $G_2$ ,  $h_c < h \leq h_a$  в области  $G_3$ . В каждой из областей траектория однозначно определяется значением  $h$ .

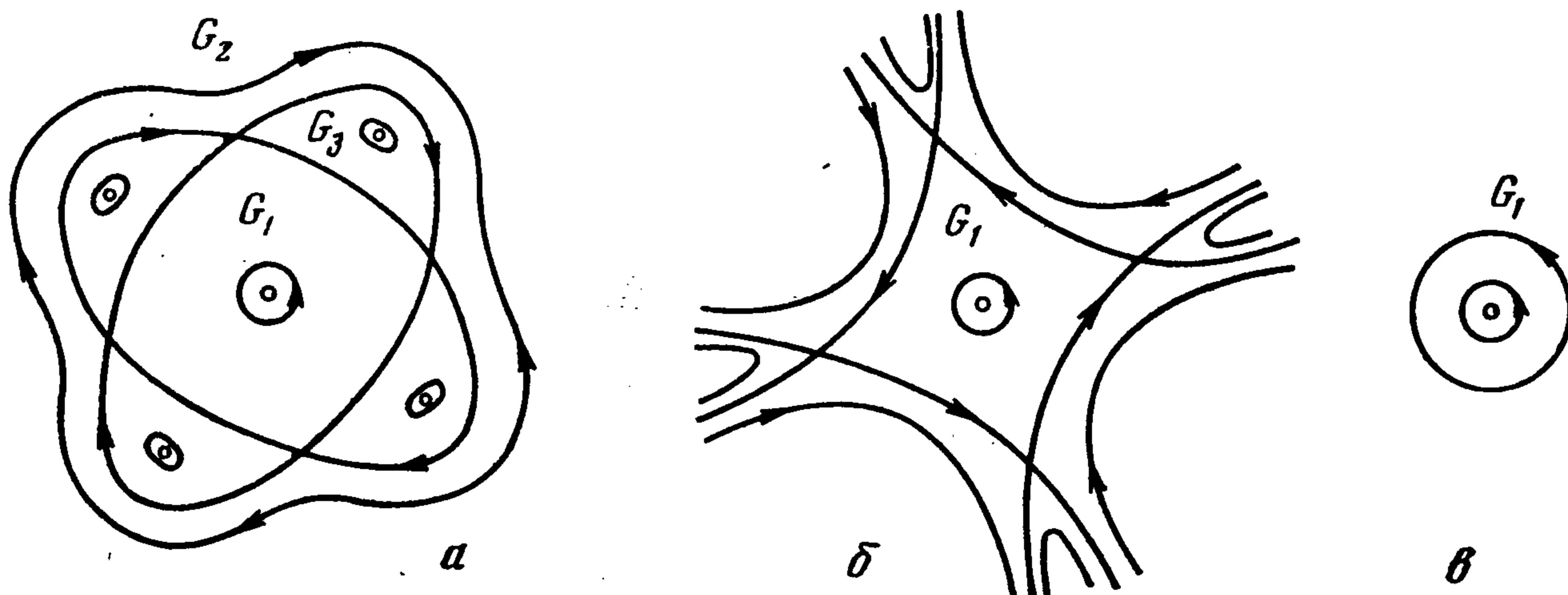
В)  $\beta \geq \alpha > -\beta$  (фиг. 1, б). Расположение седел такое же, как для типа А. Центр — только в начале координат. В области  $G_1$ , заполненной замкнутыми траекториями,  $0 \leq h < h_c$ .

С)  $\alpha \leq -\beta$  (фиг. 1, в). Все траектории замкнуты и окружают начало координат, на них  $h \geq 0$ .

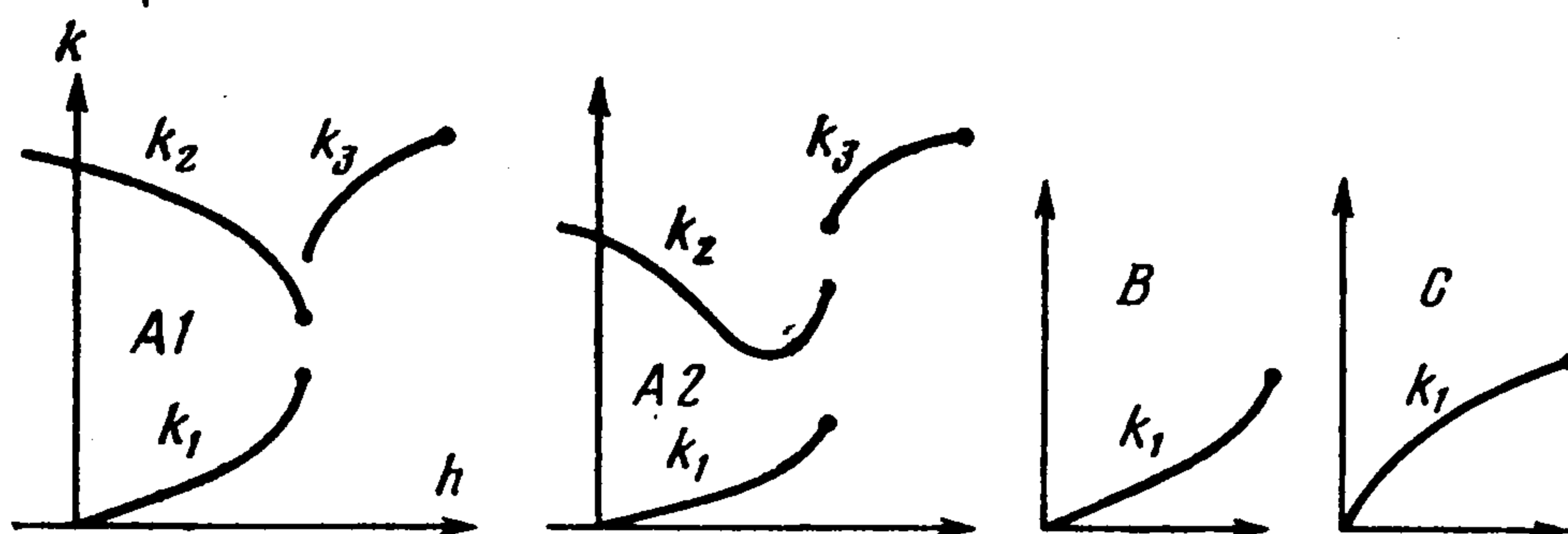
3. Условие рождения предельного цикла. Предельные циклы возмущенной системы (1.2) при малых  $\sigma$ ,  $\gamma$  надо искать вблизи тех траекторий невозмущенной системы (2.1), вдоль которых интеграл от возмущения равен нулю, т. е.

$$(3.1) \quad \oint_L 2\rho(\sigma - 2\gamma\rho) d\varphi = 0$$

где  $L$  — замкнутая траектория (2.1), зависимость  $\rho(\varphi)$  берется вдоль  $L$  (см. [3], гл. XIII). Поэтому для изучения расположения предельных циклов надо искать траектории  $L$ , удовлетворяющие условию (3.1) — траектории, из которых рождаются предельные циклы. Пусть  $L$  лежит в  $G_m$  и  $H = h$  на  $L$ . Обозначим  $G^m(h)$  область, ограниченную  $L$ . Переходя



Фиг. 1



Фиг. 2

в (3.1) с помощью формулы Грина от интегрирования вдоль  $L$  к интегрированию по  $G^m(h)$  и вводя, следуя [1], функцию  $k_m(h)$  — квадрат радиуса инерции области  $G^m(h)$ , перепишем (3.1) в виде

$$(3.2) \quad k_m(h) = w, \quad w = 1/2 \sigma / \gamma$$

$$k_m(h) = \frac{I_{2,m}(h)}{I_{1,m}(h)}, \quad I_{1,m}(h) = \int_{G^m(h)} d\rho d\varphi$$

$$I_{2,m}(h) = \int_{G^m(h)} 2\rho d\rho d\varphi, \quad m = 1, 2, 3$$

Поведение корней этих уравнений в зависимости от  $w$  определяется поведением функций  $k_m(h)$ .

Графики функций  $k_m(h)$  ( $m = 1, 2, 3$ ) при разных значениях параметров  $\alpha, \beta$  изображены на фиг. 2. Нужные свойства этих функций описаны в следующем утверждении.

**Теорема 1.** 1°. Пусть фазовый портрет (2.1) — типа А ( $\alpha > \beta$ ). Тогда характер поведения функций  $k_m(h)$  определяется значением  $\alpha/\beta$ .

A1). Если  $\alpha/\beta > \xi_*$ , где  $\xi_*$  — постоянная, определенная ниже,  $\xi_* \approx 4.11$ , то

1) в своих областях определения  $k_1(h)$  и  $k_3(h)$  монотонно возрастают, а  $k_2(h)$  монотонно убывает с ростом  $h$ ,  $k_m'(h) \neq 0$  ( $m = 1, 2, 3$ , штрих означает производную по  $h$ );

| 2)  $k_1'(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ ,  $k_2'(h) \rightarrow -\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ ,  $k_3'(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_c + 0$ ;  $k_2(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow -\infty$ ;

3)  $k_1(h_c) < k_2(h_c) < k_3(h_c)$ .

A2). Если  $1 < \alpha/\beta < \xi_*$ , то

1)  $k_2(h)$  имеет в некоторой точке  $h_d$  невырожденный минимум:

$k_2'(h_d) = 0$ ,  $k_2''(h_d) > 0$ ,  $k_2'(h) \neq 0$  при  $h \neq h_d$ ;

2)  $k_2'(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ ;

3)  $k_2(h_d) > k_1(h_c)$ ;

4) в остальном поведение  $k_m$  такое же, как в случае A1.

A\*). Если  $\alpha/\beta = \xi_*$ , то  $k_2'(h)$  стремится к конечному отрицательному пределу при  $h \rightarrow h_c - 0$ ; в остальном поведение  $k_m$  такое же, как в случае A1.

2°. Пусть фазовый портрет (2.1) — типа В ( $\beta \geq \alpha > -\beta$ ). Тогда  $k_1$  ведет себя так же, как для портрета типа А.

| 3°. Пусть фазовый портрет (2.1) — типа С ( $\alpha \leq -\beta$ ). Тогда  $k_1'(h) > 0$ ,  $k_1(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow +\infty$ .

В дальнейшем будем обозначать:  $w_m = k_m(h_c)$  ( $m = 1, 2, 3$ ),  $w_a = k_3(h_a)$ ,  $w_d = k_2(h_d)$ . Случаи  $\alpha/\beta > \xi_*$ ,  $\alpha/\beta = \xi_*$ ,  $\xi_* > \alpha/\beta > 1$ ,  $1 \geq \alpha/\beta > -1$ ,  $\alpha/\beta \leq -1$  будем называть соответственно случаями А1, А\*, А2, В, С.

В теореме 1  $\xi_* = (3 + \cos \vartheta_*) / (1 - \cos \vartheta_*)$ , где  $\vartheta_*$  — корень (очевидно, единственный) уравнения  $\text{tg } \vartheta - \vartheta = \pi$ , рассматриваемого при  $\vartheta \in (0, \pi/2)$ ;  $\vartheta_* \approx 1.352$ ,  $\xi_* \approx 4.11$ .

Теорема 1 доказана в п. 6.1—6.4.

4. Бифуркации предельных циклов возмущенной системы. Теорема 1 позволяет описать бифуркации корней уравнений  $k_m(h) = w$  и, значит, бифуркации траекторий невозмущенной задачи (2.1), порождающих предельные циклы (1.2). Эти бифуркации видны из графиков  $k_m(h)$  (фиг. 2). Бифуркации предельных циклов (1.2) описывает следующее утверждение.

Теорема 2. Для заданных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ , удовлетворяющих неравенствам  $\tau \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\beta \neq |\alpha|$ ,  $\alpha/\beta \neq \xi_*$ , найдется  $\delta > 0$ , такое, что при  $0 < |\sigma| + |\gamma| < \delta$

1) бифуркации предельных циклов (1.2) такие же, как бифуркации порождающих циклы траекторий (2.1) при тех же  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ;

2) набор значений параметра  $w$ , в которых происходят бифуркации в случае А2:  $\{0, w_1', w_d', w_2', w_3', w_a'\}$  удовлетворяет оценкам  $|w_s - w_s'| < c_1 (|\sigma| + |\gamma|)$  ( $s = 1, 2, 3, a, d$ ), где  $c_1 > 0$  не зависит от  $\sigma$ ,  $\gamma$ . Аналогичное утверждение справедливо для случаев А1, В, С;

3) все циклы при  $w \neq w_d'$  невырождены.

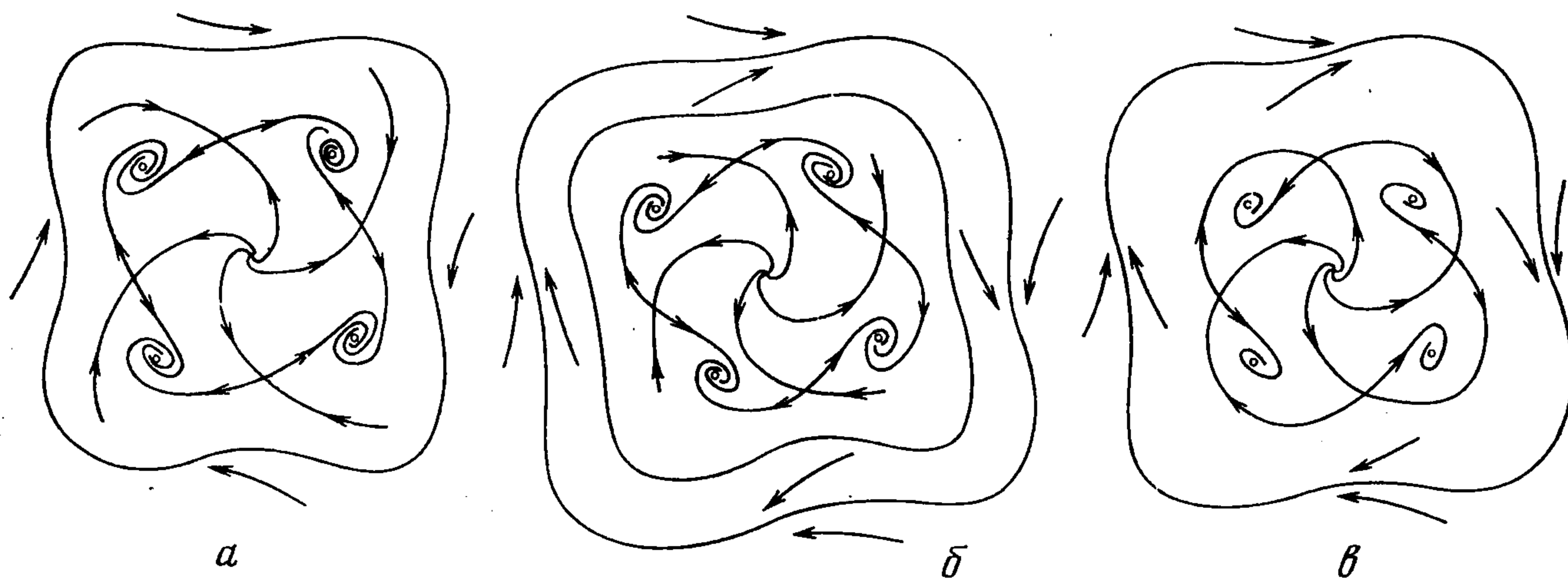
В частности, в случае А2 бифуркации при росте  $w$  происходят следующим образом. При  $w < 0$  не существует предельных циклов. При  $w = 0$  предельный цикл рождается в начале координат. С ростом  $w$  он расширяется и при  $w = w_1'$  становится сепаратрисным — соединяет седловые особые точки. При  $w_1' < w < w_d'$  не существует предельных

циклов. При  $w = w_d'$  в области  $G_2$  рождается двойной предельный цикл. При дальнейшем росте  $w$  составляющие его циклы расходятся. При  $w = w_2'$  один из них становится сепаратрисным и затем исчезает. Другой цикл существует при всех  $w > w_d'$  и с ростом  $w$  уходит в бесконечность. При  $w = w_3'$  рождаются четыре симметричных цикла (петли сепаратрис). С ростом  $w$  эти циклы отходят от сепаратрис, уменьшаются и при  $w = w_d'$  исчезают в четырех фокусах, находящихся в областях  $G_3$ . Так как циклы при  $w \neq w_d'$  невырождены, то при ответвлении цикла от особой точки происходит смена устойчивости этой точки.

Бифуркации предельных циклов в случаях А1, В, С описываются аналогично. Они были предсказаны в работе [1].

Доказательство теоремы 2 основано на теореме 1 и проводится обычным образом с помощью оценок для функции последования [3, 4]. Оно довольно громоздко и здесь не дается.

**5. Фазовый портрет возмущенной системы.** Если в (1.2) возмущение достаточно мало ( $0 < |\sigma| + |\gamma| \ll 1$ ), то фазовый портрет по сравнению



Фиг. 3

с портретом невозмущенной системы (2.1) меняется следующим образом. Седла смещаются. Центры смещаются и превращаются в фокусы. Сепаратрисы, вообще говоря, расщепляются и перестают соединять особые точки. Возникают предельные циклы. Остальные траектории наматываются при  $t \rightarrow \pm\infty$  на фокусы и предельные циклы или уходят на бесконечность.

Тип фазового портрета полностью определяется расположением и характером особых точек, сепаратрис и предельных циклов. Расположение предельных циклов описано в п. 4. При  $w < -1$  фокусы устойчивы, если  $\gamma > 0$ , и неустойчивы, если  $\gamma < 0$ . Это устанавливается вычислением собственных значений в первом приближении по  $\sigma$ ,  $\gamma$ . Устойчивость или неустойчивость фокусов и предельных циклов при остальных  $w$  определяется из рассмотрения бифуркаций.

Таким образом, можно описать все типы фазового портрета, возможные при заданных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$  и достаточно малых  $\sigma$ ,  $\gamma$ . Фазовый портрет для случая А2 при  $w = w_d'$ ,  $w_d' < w < w_2'$ ,  $w = w_2'$  ( $\gamma > 0$ ) изображен на фиг. 3, а — в. Остальные возможные типы фазового портрета изображены на рис. 3 работы [1]. При одновременном изменении знаков  $\gamma$  и  $\sigma$  устойчивость меняется на неустойчивость и наоборот.

6. Доказательство теоремы 1. Будем предполагать, что фазовый портрет (2.1) — типа А ( $\alpha > \beta > 0$ ). Доказательство теоремы для случаев, когда фазовый портрет (2.1) — типа В или С, опустим, так как оно дословно повторяет рассуждения, приводимые ниже в п. 6.2 при описании поведения  $k_1(h)$  для фазового портрета типа А. При вычислениях для траекторий из области  $G_m$  будем опускать индекс  $m$  и писать  $k, I_1, I_2, G(h)$  вместо  $k_m, I_{1,m}, I_{2,m}, G^m(h)$  (см. формулы (3.2)).

6.1. Поведение  $k(h)$  в области  $G_3$ . Рассмотрим в  $G_3$

$$k' = R / I_1^2, \quad R = I_2' I_1 - I_1' I_2$$

где штрих означает производную по  $h$ . Покажем, что  $k' > 0$ .

Из соотношения  $H = \tau\rho - \rho^2(\alpha + \beta \sin 4\varphi) = h$  получим, что на фазовой траектории

$$(6.1) \quad \rho = \rho_{1,2} = 1/2 (\tau \mp \sqrt{v}) / u \\ u = u(\varphi) = \alpha + \beta \sin 4\varphi, \quad v = v(\varphi) = \tau^2 - 4hu(\varphi)$$

Тогда

$$I_1 = \int_{G(h)} d\rho d\varphi = \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} (\rho_2 - \rho_1) d\varphi, \quad I_2 = \int_{G(h)} 2\rho d\rho d\varphi = \\ = \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} (\rho_2^2 - \rho_1^2) d\varphi$$

где  $\varphi_{\pm}$  — границы изменения  $\varphi$  на траектории. Отсюда

$$R = -2\tau \left[ \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{d\varphi}{u\sqrt{v}} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{\sqrt{v}d\varphi}{u} - \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{d\varphi}{\sqrt{v}} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{\sqrt{v}d\varphi}{u^2} \right]$$

Перейдем от двух независимых интегрирований по отрезкам  $[\varphi_-, \varphi_+]$  к интегрированию по квадрату, введя две переменные интегрирования  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и симметризовав по ним подынтегральное выражение. Тогда

$$R = -\tau \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \left[ \frac{\sqrt{v_1}}{u_1 u_2 \sqrt{v_2}} + \frac{\sqrt{v_2}}{u_2 u_1 \sqrt{v_1}} - \frac{\sqrt{v_1}}{u_1^2 \sqrt{v_2}} - \frac{\sqrt{v_2}}{u_2^2 \sqrt{v_1}} \right] d\varphi_1 d\varphi_2 \\ (u_i = u(\varphi_i), \quad v_i = v(\varphi_i))$$

Преобразуем подынтегральное выражение (обозначим его  $r$ ), чтобы показать, что оно неположительно. Получим

$$r = \frac{(u_1 - u_2)(u_2 v_1 - u_1 v_2)}{u_1^2 u_2^2 \sqrt{v_1 v_2}} = -\frac{\tau^2 (u_1 - u_2)^2}{u_1^2 u_2^2 \sqrt{v_1 v_2}} \leq 0$$

Тогда  $R > 0$  и  $k' > 0$  при  $h_c < h < h_a$ , что и утверждалось. Из этого же выражения для  $R$  следует, что  $k'(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_c + 0$ . Вычисления показывают, что  $k'(h_a) = (12\tau)^{-1} (1 + \alpha/\beta) \neq 0$ .

§ 6.2. Поведение  $k(h)$  в области  $G_1$ . Вместо того, чтобы непосредственно изучать  $k(h)$ , рассмотрим в  $G_1$  уравнение  $k(h) = w$ , которое перепишем

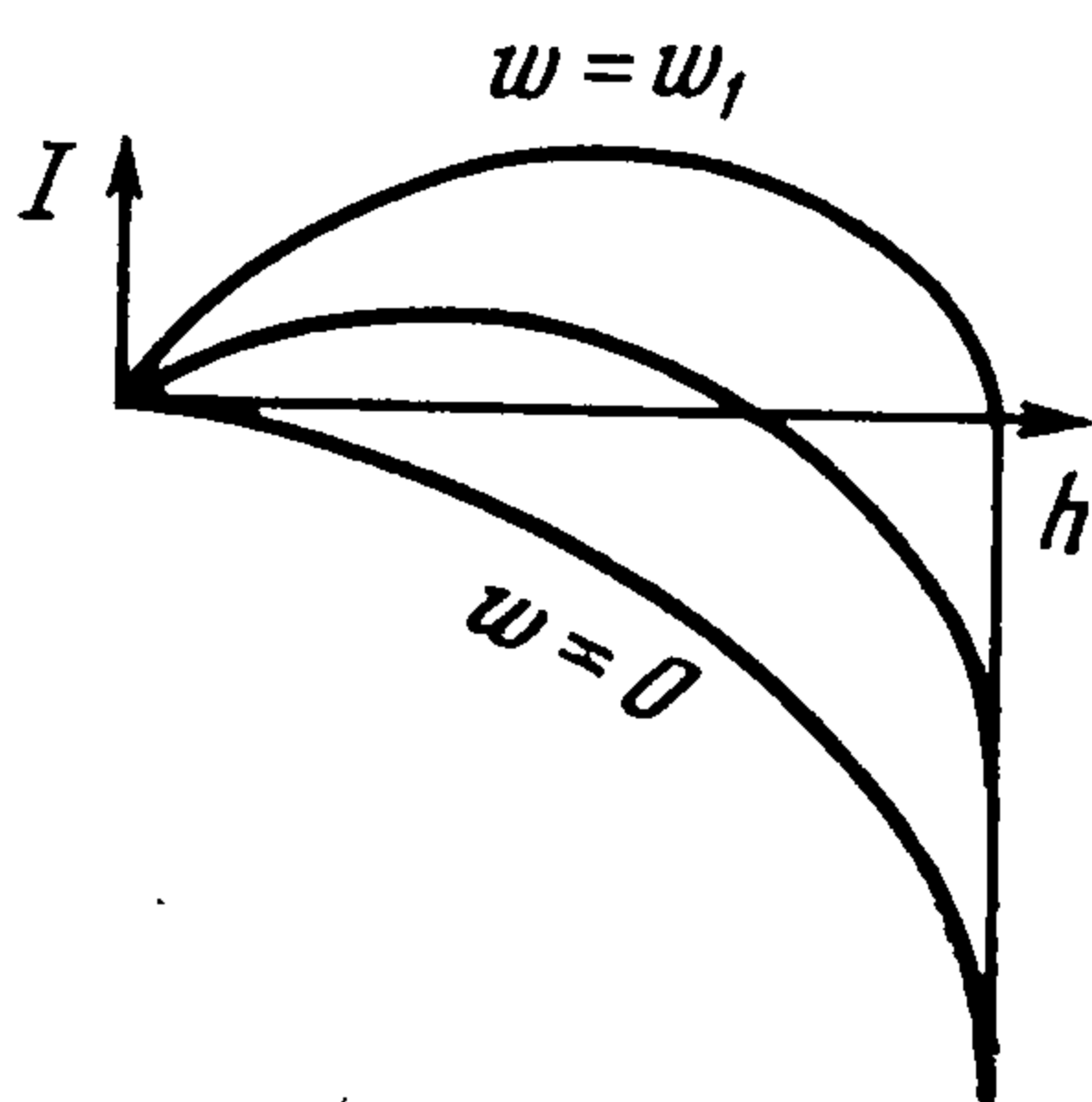
в виде (используя (3.2))

$$(6.2) \quad I(h, w) = wI_1(h) - I_2(h) = 0$$

$$(6.3) \quad I_1(h) = \int_0^{2\pi} \rho(h, \varphi) d\varphi, \quad I_2(h) = \int_0^{2\pi} \rho^2(h, \varphi) d\varphi$$

где функция  $\rho(h, \varphi) = \rho_1(h, \varphi)$  определена формулой (6.1). Будем рассматривать поведение  $I(h, w)$  как функции  $h$  при разных  $w$ .

**Лемма 1.** Если  $I'(h, w) = 0$  в некоторой точке  $h \in (0, h_c)$ , то в этой точке  $I''(h, w) < 0$ .



Фиг. 4

Эта лемма доказана ниже.

**Следствие 1.** При каждом  $w$  существует не более одной точки  $h \in (0, h_c)$ , в которой  $I'(h, w) = 0$ . Если такая точка существует, то в ней функция  $I$  имеет невырожденный максимум.

Действительно, если бы существовали две такие точки, то по лемме в них функция  $I$  имела бы максимумы. Тогда между ними существовала бы точка минимума, что запрещено леммой.

**Следствие 2.** Если  $I(h, w)$  имеет максимум, то с изменением  $w$  этот максимум непрерывно перемещается и может исчезнуть только на концах интервала  $(0, h_c)$ .

Рассмотрим теперь поведение  $I$  на концах  $(0, h_c)$ . Очевидно,  $I(0, w) = 0$  при любом  $w$  и  $I(h_c, w_1) = 0$ , где  $w_1 = I_2(h_c) / I_1(h_c)$ . Далее

$$I'(h, w) = \int_0^{2\pi} (w - 2\rho) \frac{\partial \rho}{\partial h} d\varphi$$

Можно показать, что  $I'(0, w) = 2\pi w / \tau$ . В седловых точках (при  $h = h_c$  и  $\varphi = \pi/8 + \pi n/2$  ( $n = 1, \dots, 4$ ))  $\partial \rho / \partial h$  имеет особенности. Можно проверить, что  $I'(h, w) \rightarrow -\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ , если  $w < w_2 = 2\rho_c$ , и  $I'(h, w) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ , если  $w > w_2$ . При  $w = w_2$  существует конечная производная  $I'(h_c, w) > 0$ .

График  $I(h, w)$  при  $w = 0$  изображен на фиг. 4. С ростом  $w$  точки графика, соответствующие  $h \neq 0$ , поднимаются вверх. Следствия леммы 1 и информация о поведении  $I$  на концах  $(0, h_c)$  позволяют описать эволюцию графика при изменении  $w$ . Очевидно, при  $0 < w < w_1$  и  $w = w_1$  функция  $I(h, w)$  ведет себя так, как показано на фиг. 4 средней и верхней кривой соответственно. Отсюда, в частности, следует, что  $w_2 > w_1$ . Из фиг. 4 следует далее, что при  $0 < w < w_1$  уравнение (6.2) имеет на  $(0, h_c)$  единственный корень, и в этом корне  $I'(h, w) < 0$ . При  $w \leq 0$  и  $w \geq w_1$  уравнение (6.2) не имеет корней на  $(0, h_c)$ .

Теперь для любого  $h \in (0, h_c)$  введем  $w_2^* = k_2^*(h) = I_2(h) / I_1(h)$ . Тогда  $I(h, w) = 0$  и по предыдущему

$$k'(h) = -(wI_1' - I_2') / I_1 = -I'(h, w) / I_1 > 0$$

При  $h \rightarrow h_c - 0$  будет  $w \rightarrow w_1$  и  $k'(h) \rightarrow +\infty$ . Непосредственно прове-

ряется, что  $k'(0) = 1/\tau > 0$ . Следовательно, в  $G_2$  функция  $k(h)$  ведет себя так, как описано в теореме 1.

*Доказательство леммы 1.* Пусть  $I'(h, w) = wI_1' - I_2' = 0$ . Тогда

$$I''(h, w) = wI_1'' - I_2'' = J/I_1', \quad J = I_2'I_1'' - I_1'I_2''$$

Так как  $I_1' > 0$ , то надо доказать, что  $J < 0$ .

Из (6.1) и (6.3) получим, что в области  $G_1$

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = \frac{1}{\sqrt{v}}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial h^2} = \frac{2u}{(\sqrt{v})^3}, \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial h} = -\frac{1}{u} + \frac{\tau}{u\sqrt{v}}, \quad \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial h^2} = \frac{2\tau}{(\sqrt{v})^3}$$

$$J = 2\tau \left[ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{u\sqrt{v}} \int_0^{2\pi} \frac{ud\varphi}{(\sqrt{v})^3} - \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{v}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{v})^3} \right] - 2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{u} \int_0^{2\pi} \frac{ud\varphi}{(\sqrt{v})^3}$$

Как и в п. 6.1, введем  $u_i = u(\varphi_i)$ ,  $v_i = v(\varphi_i)$  и перейдем к интегрированию по квадрату. Используя соотношение  $v_1u_2 - u_1v_2 = \tau^2(u_2 - u_1)$ , получим

$$(6.4) \quad J = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A(\varphi_1, \varphi_2)}{(\sqrt{v_1}\sqrt{v_2})^3} d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = [\tau^3(u_2 - u_1)^2 - u_2^2(\sqrt{v_1})^3 - u_1^2(\sqrt{v_2})^3]/(u_1u_2)$$

Числитель подынтегрального выражения преобразуем к такому виду

$$A = A_{12} + A_{21} - 2\tau^3, \quad A_{ij} = (u_j/u_i) [\tau^3 - (\sqrt{v_i})^3]$$

Далее имеем

$$A_{12} = \frac{u_2}{u_1} (\tau^2 - v_1) \frac{\tau^2 + \tau\sqrt{v_1} + v_1}{\tau + \sqrt{v_1}}$$

и аналогичную формулу для  $A_{21}$ . Так как  $(\tau^2 - v_1)u_2 = (\tau^2 - v_2)u_1$ , то

$$A = -\frac{\tau(\sqrt{v_1})^3 + v_1v_2}{\tau + \sqrt{v_1}} - \frac{\tau(\sqrt{v_2})^3 + v_1v_2}{\tau + \sqrt{v_2}}$$

Отсюда следует, что  $J < 0$ , что и требовалось.

**6.3. Поведение  $k(h)$  в области  $G_2$ .** Аналогично п. 6.2 рассмотрим в  $G_2$  при  $-\infty < h \leq h_c$  уравнение

$$(6.5) \quad I(h, w) = wI_1(h) - I_2(h) = 0$$

*Лемма 2.* Если  $I'(h, w) = 0$  в некоторой точке  $h \in (-\infty, h_c)$ , то в этой точке  $I''(h, w) < 0$ .

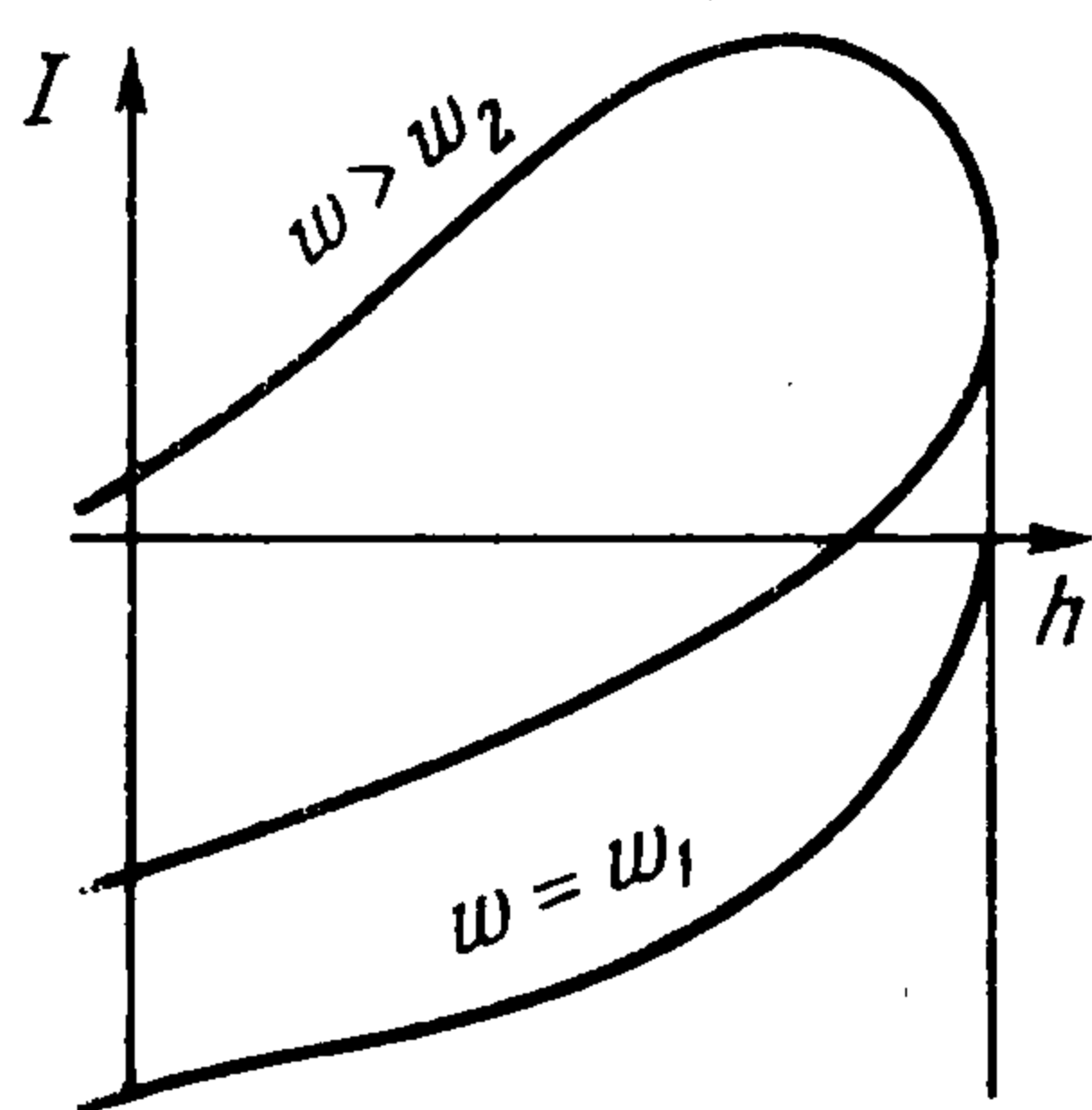
Эта лемма доказана ниже. Как и в п. 6.2, из нее вытекает, что при каждом  $w$  на интервале  $(-\infty, h_c)$  найдется не более одной точки, где  $I'(h, w) = 0$ ; если такая точка нашлась, то в ней  $I(h, w)$  имеет невырожденный максимум, с изменением  $w$  этот максимум перемещается и может исчезнуть только в точке  $h_c$ .

Рассмотрим поведение  $I(h, w)$  на концах интервала  $(-\infty, h_c)$ . Очевидно,  $I(h, w) \rightarrow -\infty$  при  $h \rightarrow -\infty$  и  $I(h_c, w_1) = 0$ , где  $w_1 = I_2(h_c) / I_1(h_c)$ . Аналогично п. 6.2 можно показать, что при  $w = w_2 = 2\rho_c$  меняется направление вертикальной касательной в точке  $h_c$ :  $I'(h, w) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ , если  $w < w_2$ , и  $I''(h, w) \rightarrow -\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ , если  $w > w_2$ . При  $w = w_2$  существует конечная производная  $I'(h_c, w) > 0$ .

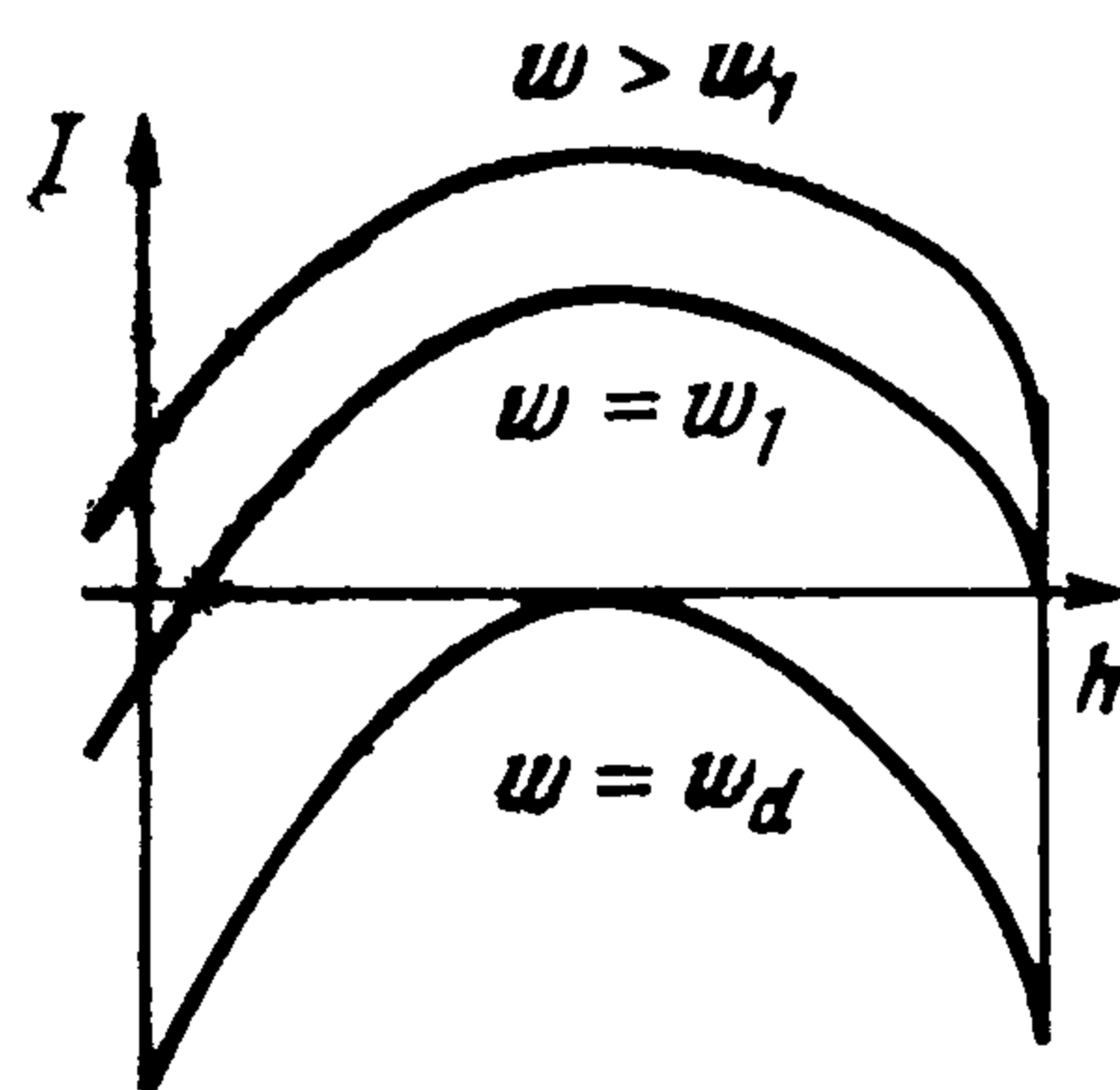
Характер эволюции корней уравнения (6.5) с изменением  $w$  определяется соотношением между  $w_1$  и  $w_2$ .

Если  $w_1 < w_2$ , то при изменении  $w$  график  $I(h, w)$  меняется так, как показано на фиг. 5 (средняя кривая соответствует  $w_1 < w < w_2$ ). С ростом  $w$  точки графика поднимаются вверх. При  $w < w_1$  корней нет. При всех  $w > w_1$  уравнение (6.5) имеет единственный корень на  $(-\infty, h_c)$  и в нем  $I'(h, w) > 0$ .

Если  $w_1 > w_2$ , то при изменении  $w$  график  $I(h, w)$  меняется так, как показано на фиг. 6. При  $w$ , близких к  $w_2$ ,  $w > w_2$ , функция  $I(h, w)$  имеет



Фиг. 5



Фиг. 6

единственный невырожденный максимум, корней у (6.5) нет. С ростом  $w$  точки графика поднимаются вверх. При некотором  $w = w_d$ ,  $w_2 < w_d < w_1$  возникает двойной корень в точке  $h = h_d$ . При  $w_d < w < w_1$  на  $(-\infty, h_c)$  есть два корня, лежащие по разные стороны от точки  $h_d$ ; в левом из них  $I'(h, w) > 0$ , в правом  $I'(h, w) < 0$ . При  $w = w_1$  правый корень попадает в точку  $h_c$ ; при  $w > w_1$  существует единственный корень и в нем  $I'(h, w) > 0$ .

Если  $w_1 = w_2$ , то при  $w > w_1$  существует единственный корень и в нем  $I'(h, w) > 0$ .

Теперь для любого  $h \in (-\infty, h_c)$  введем  $w = k(h)$ . Аналогично п. 6.2 получим

$$k'(h) = -I'(h, w) / I_1(h), \quad k''(h) = -(I''(h, w) + 2k'(h)I_1'(h)) / I_1(h)$$

Если  $w_1 < w_2$ , то по предыдущему величина  $k'(h)$  отрицательна,  $k'(h) \rightarrow -\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ . Если  $w_1 > w_2$ , то  $k'(h)$  положительна при  $h > h_d$ , отрицательна при  $h < h_d$  и обращается в нуль при  $h = h_d$ ; однако  $k''(h_d) > 0$ ;  $k'(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_c - 0$ .

Если  $w_1 = w_2$ , то величина  $k'(h)$  отрицательна и стремится к конечному отрицательному пределу при  $h \rightarrow h_c - 0$ .

Во всех случаях  $k(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow -\infty$ .

Таким образом, при  $w_1 < w_2$ ,  $w_1 > w_2$ ,  $w_1 = w_2$  функция  $k(h)$  ведет себя так, как описано соответственно в п. А1, А2, А\* теоремы 1.

**Лемма 3.** Случаи  $w_1 < w_2$ ,  $w_1 > w_2$ ,  $w_1 = w_2$  осуществляются, если соответственно  $\alpha / \beta > \xi_*$ ,  $\alpha / \beta < \xi_*$ ,  $\alpha / \beta = \xi_*$ , где величина  $\xi_*$  введена в п. 3.

Таким образом, справедливы утверждения теоремы 1, относящиеся к поведению  $k(h)$  в области  $G_2$ .

Лемма 3 доказана ниже.

*Доказательство леммы 2.* Так как  $I_1' < 0$ , то по аналогии с леммой 1 надо доказать, что  $J > 0$ . Выражение для  $\rho$  в области  $G_2$  отличается от выражения для  $\rho$  в области  $G_1$  (см. (6.1)) знаком перед радикалом, поэтому выражение для  $J$  получается из (6.4) изменением знаков перед радикалами. Очевидно,  $J > 0$ , что и требовалось.

*Доказательство леммы 3.* Используя определение  $w_1$  и  $w_2$ , соотношение  $w_1 = w_2$  перепишем в виде

$$(6.6) \quad 2\rho_c I_1(h_c) - I_2(h_c) = 0$$

Здесь функции  $I_{1,2}(h_c)$  определяются формулами (6.3), в которые надо подставить  $\rho = \rho_2(h_c, \varphi)$ . Из (6.1) следует, что

$$(6.7) \quad \rho_{1,2}(h_c, \varphi) = \bar{\rho}_{1,2}(\varphi) = \rho_c (1 \pm \eta |\sin(2\varphi - \pi/4)|)^{-1}, \quad \eta = \sqrt{2\beta/(\alpha + \beta)}$$

Тогда (6.6) перепишется в виде

$$(6.8) \quad \int_0^\pi \left( \frac{1}{1 - \eta \sin \psi} - \frac{1}{(1 - \eta \sin \psi)^2} \right) d\psi = 0$$

Интеграл в (6.8) берется с помощью подстановки  $\text{tg}(\psi/2) = s$  и (6.8) приводится к виду

$$(6.9) \quad \frac{1 - 2\eta^2}{(1 - \eta^2)\sqrt{1 - \eta^2}} \left[ \text{arctg} \sqrt{\frac{1 - \eta}{1 + \eta}} + \text{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right] - \frac{\eta}{2(1 - \eta^2)} = 0$$

Введем  $\vartheta = 2\text{arcsin} \eta$ ,  $\vartheta \in (0, \pi)$ . Тогда (6.9) перепишется в виде  $\text{tg} \vartheta - \vartheta = \pi$ . Если  $\vartheta_*$  — корень этого уравнения и  $\eta = \sin(\vartheta_*/2)$ , то

$$\alpha/\beta = (2 - \eta^2)/\eta^2 = (3 + \cos \vartheta_*)/(1 - \cos \vartheta_*) = \xi_*$$

Следовательно, при  $\alpha/\beta = \xi_*$  будет  $w_1 = w_2$ . Можно проверить, что при  $\alpha/\beta > \xi_*$  и  $\alpha/\beta < \xi_*$  будет соответственно  $w_1 < w_2$  и  $w_1 > w_2$ , что и утверждалось.

**6.4. Взаимное расположение характерных точек на графиках.** Для завершения доказательства теоремы 1 требуется показать, что  $k_1(h_c) < k_2(h_c) < k_3(h_c)$ , а в случае А2, кроме того,  $k_1(h_c) < k_2(h_d)$ .

Из формул (6.7) следует, что при всех  $\varphi \neq \pi/8 + \pi n/2$ ,  $\psi \neq \pi/8 + \pi n/2$  ( $n = 1, \dots, 4$ ) выполнено неравенство  $\bar{\rho}_1(\varphi) < \rho_c < \bar{\rho}_2(\psi)$ . Далее

$$k_m(h_c) = \frac{I_{2,m}(h_c)}{I_{1,m}(h_c)}, \quad I_{j,m}(h_c) = \int_0^{2\pi} \bar{\rho}_m^j d\varphi \quad (m = 1, 2; j = 1, 2)$$

Тогда

$$k_2(h_c) - k_1(h_c) = \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho}_1(\varphi) \bar{\rho}_2(\psi) (\bar{\rho}_2(\psi) - \bar{\rho}_1(\varphi)) d\varphi d\psi \right] \times \\ \times [(I_{1,1}(h_c) I_{1,2}(h_c))^{-1}] > 0$$

Аналогично доказываются остальные неравенства.

Автор благодарит В. И. Арнольда за предложенную тему, внимание к работе и замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей. Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 2.
  2. Богданов Р. И. Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, вып. 2, Изд-во МГУ, 1976.
  3. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
  4. Богданов Р. И. Бифуркации предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, вып. 2, Изд-во МГУ, 1976.
-