

О СТРУКТУРЕ С-БИФУРКАЦИОННЫХ ГРАНИЦ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

М. И. Фейгин

(Горький)

Устанавливается соответствие между аналитическими условиями С-бифуркаций [1] и спектром собственных значений матриц точечного отображения, линеаризованного в окрестности вырожденной траектории. Такой подход позволил рассмотреть все возможные основные структуры С-бифуркационных границ пространства параметров и обнаружить новые случаи сосуществования и рождения периодических режимов, в том числе возможность возникновения при С-бифуркации притягивающих множеств с разбегающимися траекториями («странных аттракторов»). Для большинства структур С-бифуркационных границ построены математические модели. Некоторые бифуркационные переходы реализуемы одномерным точечным отображением, что позволило наглядно проследить возникновение сложных структур при изменении параметра.

1. Рассматриваются динамические системы с фазовым пространством, «сплитом», некоторым образом из областей Φ_1, \dots, Φ_k , движения в которых описываются различными уравнениями. Периодические решения таких систем характеризуются определенной последовательностью прохождения указанных областей. Если при изменении параметра участок фазовой траектории периодического движения в Φ_i приходит на границу области Φ_j (С-бифуркация), то при дальнейшем изменении параметра простейшей бифуркационной картине соответствует непрерывный переход этого движения в режим другого типа, включающий еще один участок траектории в Φ_j .

Возможны и более сложные ситуации: слияние движений двух разных типов с последующим их исчезновением, удвоение периода колебаний [1], возникновение множества субгармонических режимов [2], неограниченное усложнение структуры пространства параметров в окрестности С-бифуркационной границы, приводящее к эффекту «расплывания» границы [3]. (О сложных движениях, рассмотрение которых сводится к изучению одномерных отображений, см., например, работу [4] и обзор [5].) При этом изучение сложных движений в кусочно-непрерывных системах приводит, вообще говоря, к рассмотрению разрывных точечных отображений. Заметим, что к разрывным отображениям могут приводить и гладкие системы типа модели Лоренца [6].

В рассматриваемой постановке значению параметра $\mu = 0$ соответствует фазовая траектория L_0 периодического движения, достигающая одной из областей кусочной непрерывности Φ_j . Траектории в окрестности L_0

порождают непрерывное точечное отображение Π некоторой поверхности D . Поскольку траектории могут либо не проникать в Φ_j , либо проникать, Π сшивается соответственно из двух отображений Π^+ и Π^- .

Введем систему координат x_i на D так, чтобы значению $\mu = 0$ соответствовала неподвижная точка, совпадающая с началом отсчета. Ось x_n выбираем таким образом, чтобы матрицы линеаризованных по x_i и μ уравнений преобразований Π^+ и Π^- различались элементами последних столбцов [1]. Тогда уравнения линеаризованных отображений записываются так:

$$(1.1) \quad x' = Ax + c\mu, \quad x_n \geq 0$$

$$(1.2) \quad x' = Bx + c\mu, \quad x_n \leq 0$$

где x и c — n -мерные векторы, μ — малый параметр, A и B — квадратные матрицы, у которых $a_{ij} = b_{ij}$ при $j \neq n$. Последнее обеспечивает непрерывность сшитого отображения (1.1), (1.2).

Отметим, что кратное отображение типа

$$\Pi = \begin{cases} \Pi^*\Pi^+, & x_n > 0 \\ \Pi^{**}\Pi^-, & x_n < 0 \end{cases}$$

будет непрерывно при $\Pi^* = \Pi^{**}$ и разрывно, если $\Pi^* \neq \Pi^{**}$. Так, из четырех возможных двукратных отображений два непрерывны

$$(1.3) \quad \Pi = \begin{cases} \Pi^+\Pi^+, & x_n \geq 0, x_n' \geq 0 \\ \Pi^+\Pi^-, & x_n \leq 0, x_n' \geq 0 \end{cases}$$

$$(1.4) \quad \Pi = \begin{cases} \Pi^-\Pi^+, & x_n \geq 0, x_n' \leq 0 \\ \Pi^-\Pi^-, & x_n \leq 0, x_n' \leq 0 \end{cases}$$

и два отображения претерпевают разрыв при $x_n, x_n' = 0$

$$(1.5) \quad \Pi = \begin{cases} \Pi^+\Pi^+, & x_n > 0, x_n' > 0 \\ \Pi^-\Pi^-, & x_n < 0, x_n' < 0 \end{cases}$$

$$(1.6) \quad \Pi = \begin{cases} \Pi^-\Pi^+, & x_n > 0, x_n' < 0 \\ \Pi^+\Pi^-, & x_n < 0, x_n' > 0 \end{cases}$$

Для решения вопроса о характере зависимости периодических движений от μ , т. е. о характере С-бифуркации, воспользуемся условиями, полученными в предположении непрерывности точечных отображений [1]. Пусть $\chi_\alpha(\lambda)$ и $\chi_\beta(\lambda)$ — характеристические полиномы, соответствующие неподвижным точкам x^* отображений $x' = \Pi^+x$ и $x' = \Pi^-x$ в предельном случае $\mu = 0$. Тогда при изменении μ одно движение переходит в другое, если выполняется условие

$$(1.7) \quad \chi_\alpha(1) \chi_\beta(1) > 0$$

Оба периодических движения существуют при $\mu > 0$ или $\mu < 0$ и после слияния при $\mu = 0$ исчезают, если

$$(1.8) \quad \chi_\alpha(1) \chi_\beta(1) < 0$$

Рождается движение удвоенного периода, определяемое неподвижными точками преобразования (1.6), если выполняется условие

$$(1.9) \quad \chi_\alpha(-1) \chi_\beta(-1) < 0$$

Сформулируем условия (1.7) — (1.9) в виде, более удобном для рассмотрения возможных структур С-бифуркационных границ. Пусть α_i и β_i ($i = 1, \dots, n$) — спектры собственных значений матриц A и B . Представим характеристические полиномы в виде

$$(1.10) \quad \chi_\alpha(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \alpha_i), \quad \chi_\beta(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \beta_i)$$

Коэффициенты полиномов действительные, поэтому знаки выражений $\chi_\alpha(1)$ и $\chi_\beta(1)$ определяются количеством действительных корней, превышающих $+1$ (соответственно σ_α^+ и σ_β^+), а знаки выражений $\chi_\alpha(-1)$ и $\chi_\beta(-1)$ — количеством действительных корней, расположенных слева от -1 (σ_α^- и σ_β^-). Отсюда приходим к следующим условиям.

Условие 1. Если $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$ четное, то при изменении знака μ неподвижная точка преобразования (1.1) непрерывно переходит в неподвижную точку преобразования (1.2).

Условие 2. Если $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$ нечетно, то неподвижные точки преобразований (1.1), (1.2) существуют по одну сторону оси $\mu = 0$, сливаются при $\mu = 0$ и не существуют по другую сторону.

Условие 3. Если $\sigma_\alpha^- + \sigma_\beta^-$ нечетно, то рождается пара неподвижных точек преобразования (1.6), соответствующих движению с удвоенным периодом.

Чтобы определить относительно $\mu = 0$ расположение области существования движения с удвоенным периодом, достаточно знать $\sigma_{\alpha\beta}^+ + \sigma_{\alpha\alpha}^+$ (или $\sigma_{\alpha\beta}^+ + \sigma_{\beta\beta}^+$) — число собственных значений произведения матриц AB и произведения AA (или AB и BB), превышающих $+1$, и воспользоваться условиями 1, 2 для любого из непрерывных преобразований (1.3) или (1.4). Заметим, что собственные значения матриц AA и BB равны соответственно α_i^2 и β_i^2 ($i = 1, \dots, n$).

2. Из всего многообразия структур бифуркационных границ пространства параметров выделим основные, понимая под ними структуры, рассмотрение которых ограничено одно- и двукратными периодическими движениями.

Для удобства изображения бифуркационных переходов примем следующие обозначения периодических движений: движение, определяемое неподвижной точкой отображения (1.1), будем обозначать A , если оно устойчиво, и a , если оно неустойчиво; определяемое неподвижной точкой отображения (1.2) — соответственно через B и b ; движение, определяемое неподвижными точками двукратного преобразования (1.6)

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x' &= BAx + (B + E) c\mu, & x_n &> 0 \\ x' &= ABx + (A + E) c\mu, & x_n &< 0 \end{aligned}$$

через AB в устойчивом случае и ab в случае его неустойчивости. Здесь через E обозначена единичная матрица.

Как известно, устойчивому периодическому движению соответствуют собственные значения, расположенные в круге единичного радиуса. Поэтому в соответствии с условием 1 области существования любых двух из устойчивых движений A , B , AB могут располагаться только по разные стороны от оси $\mu = 0$.

В общем случае, когда хотя бы одно из рассматриваемых двух периодических движений неустойчиво, формально возможно любое расположение действительных собственных значений α_i , β_i , λ_i относительно $+1$ и -1 . В результате оказываются возможными семнадцать основных структур С-бифуркационной границы, которые образуют пять существенно различных случаев.

Случай 1°. Простое изменение типа движения, при котором $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$ и $\sigma_\alpha^- + \sigma_\beta^-$, являются четными числами. В зависимости от конкретных значений α_i , β_i здесь возможны три структуры переходов

$$(2.2) \quad A \rightarrow B \ (n \geq 1), \quad A \rightarrow b \ (n \geq 2), \quad a \rightarrow b \ (n \geq 1)$$

где в скобках указана размерность точечного отображения, при которой возможна реализация структуры.

Случай 2°. Простое слияние с исчезновением движений двух типов, при котором $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$ нечетно, а $\sigma_\alpha^- + \sigma_\beta^-$ четно. Здесь возможны две структуры бифуркационных переходов

$$(2.3) \quad A, b \rightarrow \emptyset \ (n \geq 1), \quad a, b \rightarrow \emptyset \ (n \geq 2)$$

Случай 3°. Изменение типа движения с возникновением двукратного режима, когда нечетно $\sigma_\alpha^- + \sigma_\beta^-$, а $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$ и $\sigma_{\alpha\beta^+} + \sigma_{\alpha\alpha^+}$ четны. В этом случае возможны пять структур

$$(2.4) \quad A \rightarrow b, AB \ (n \geq 1), \quad A \rightarrow b, ab \ (n \geq 1), \quad a \rightarrow B, ab \ (n \geq 1), \\ a \rightarrow b, AB \ (n \geq 2), \quad a \rightarrow b, ab \ (n \geq 2)$$

Случай 4°. Слияние с исчезновением движений двух типов и двукратного режима. Он имеет место, когда нечетны все три числа $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$, $\sigma_\alpha^- + \sigma_\beta^-$, $\sigma_{\alpha\beta^+} + \sigma_{\alpha\alpha^+}$. Здесь возможны три структуры переходов

$$(2.5) \quad A, b, ab \rightarrow \emptyset \ (n \geq 2), \quad a, b, ab \rightarrow \emptyset \ (n \geq 1) \\ a, b, AB \rightarrow \emptyset \ (n \geq 2)$$

Случай 5°. Слияние движений двух типов с возникновением двукратного режима, когда $\sigma_\alpha^+ + \sigma_\beta^+$ и $\sigma_\alpha^- + \sigma_\beta^-$ нечетны, а $\sigma_{\alpha\beta^+} + \sigma_{\alpha\alpha^+}$ четно. Формально здесь возможны четыре структуры

$$(2.6) \quad A, b \rightarrow AB, \quad A, b \rightarrow ab \\ a, b \rightarrow AB, \quad a, b \rightarrow ab$$

Последний случай требует оговорки. Дело в том, что для преобразования прямой в прямую ($n = 1$) из существования двукратной неподвижной точки следует существование однократной [4], т. е. нереализуемость переходов (2.6). Можно доказать невозможность построения указанных структур для $n = 2$. Однако для $n > 2$ вопрос их реализуемости пока остается открытым.

Как видно из (2.2) — (2.6), С-бифуркации устойчивого периодического движения A , B или AB могут соответствовать двенадцать возможных основных структур, в девяти из которых переход сопровождается потерей устойчивости.

3. Покажем далее, что по заданным спектрам α_i и β_i всегда можно построить отображение в форме (1.1), (1.2).

Пусть заданы $2n$ значений α_i , β_i и требуется определить элементы a_{ij} и b_{ij} матриц A и B . Так как $a_{ij} = b_{ij}$ ($j \neq n$), то неизвестных оказывается $n^2 + n$. Упростим задачу построения, оставив в качестве искомого лишь $2n$ элементов a_{in} и b_{in} . Остальные элементы можно задать с достаточной степенью произвола, но так, чтобы при написании главных миноров не потерять неизвестные. Например

$$(3.1) \quad a_{ij} = 0 \quad (i \neq j + 1) \quad a_{j+1, j} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1)$$

Коэффициенты γ_k характеристических полиномов

$$(3.2) \quad \chi(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$$

равны взятой с множителем $(-1)^k$ сумме всех $\binom{n}{k}$ главных миноров k -го порядка определителя $\det(A)$ или $\det(B)$ [7]. Так как неизвестные остались только в последнем столбце, указанные коэффициенты линейно зависят от искомого элементов. С другой стороны, из представления характеристических полиномов в форме (1.10) следует, что γ_k — симметрические функции заданных корней

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \gamma_k^\alpha &= (-1)^k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dots \sum_{r=1}^n a_i a_j \dots a_r \\ \gamma_k^\beta &= (-1)^k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dots \sum_{r=1}^n \beta_i \beta_j \dots \beta_r \end{aligned}$$

где $i \neq j \neq \dots \neq r$ по всем k сомножителям. В результате приходим к системе $2n$ линейных уравнений с отличным от нуля определителем.

В качестве примера построим отображение (1.1), (1.2) для $n = 1, 2, 3$.

1) Заданы два собственных значения α , β , которые и принимаются в качестве элементов матриц одномерного преобразования. Собственное значение произведения матриц AB равно $\alpha\beta$.

2) Заданы четыре собственных значения α_1 , α_2 , β_1 , β_2 . Матрицы A и B будем отыскивать в виде (3.1). Для определения неизвестных элементов a_{12} , a_{22} воспользуемся соотношениями

$$(3.4) \quad q_\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = \det(A) = -a_{12}, \quad p_\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \text{Tr}(A) = a_{22}$$

Аналогично находим b_{12} , b_{22} . В результате получаем искомые матрицы преобразования в виде

$$(3.5) \quad A = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_1 \alpha_2 \\ 1 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -\beta_1 \beta_2 \\ 1 & \beta_1 + \beta_2 \end{vmatrix}$$

Собственные значения произведения матриц AB или подобного ему произведения BA определяются корнями уравнения

$$(3.6) \quad \lambda^2 + (q_\alpha + q_\beta - p_\alpha p_\beta) \lambda + q_\alpha q_\beta = 0$$

3) Построим еще матрицы трехмерного преобразования в форме (3.1) по заданным спектрам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Элементы a_{i3} определяются из соотношений

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \gamma_1^\alpha &= -a_{33} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -p_\alpha \\ \gamma_2^\alpha &= -a_{23} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = s_\alpha \\ \gamma_3^\alpha &= -a_{13} = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q_\alpha \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$(3.8) \quad b_{13} = q_\beta, \quad b_{23} = -s_\beta, \quad b_{33} = p_\beta$$

Из (3.1), (3.7), (3.8) получаем искомые матрицы

$$(3.9) \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & q_\alpha \\ 1 & 0 & -s_\alpha \\ 0 & 1 & p_\alpha \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & q_\beta \\ 1 & 0 & -s_\beta \\ 0 & 1 & p_\beta \end{vmatrix}$$

Собственные значения произведения матриц AB определяются множеством корней уравнения

$$\lambda^3 + (s_\alpha + s_\beta - p_\alpha p_\beta) \lambda^2 + (s_\alpha s_\beta - p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha) \lambda - q_\alpha q_\beta = 0$$

4. Проведенное рассмотрение, ограниченное одно- и двукратными периодическими движениями, указывает лишь, что при выполнении сформулированных условий бифуркационная картина не проще, чем определенная выше как основная. Полная бифуркационная картина может оказаться значительно сложнее.

Особый интерес представляют С-бифуркационные переходы с потерей устойчивости, при которых возникают несколько неустойчивых режимов, включая двукратный. Появление последнего свидетельствует о возможности существования еще более сложных периодических режимов. Ситуации, при которых указанные переходы безопасны [8,9] и все кратные неподвижные точки неустойчивы, могут соответствовать возникновению странного аттрактора.

Рассмотрим в качестве первого примера двумерное непрерывное отображение вида (3.5), зависящее от трех параметров μ, ρ, τ ($\rho, \tau > 0$)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\rho\tau}{4} y, & y' &= x + \frac{\tau - \rho}{2} y - \mu \quad (y \geq 0) \\ x' &= \frac{1}{\rho\tau} y, & y' &= x + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\rho}\right) y - \mu \quad (y \leq 0) \end{aligned}$$

Собственные значения матриц преобразования в соответствии с (3.4), (3.5)

$$\alpha_1 = \tau/2, \quad \alpha_2 = -\rho/2, \quad \beta_1 = 1/\tau, \quad \beta_2 = -1/\rho$$

Для указанных собственных значений условие 1 выполняется в интервале $1 < \tau < 2$, где один из периодических режимов существует при $\mu < 0$, а другой — при $\mu > 0$. Условие 2 выполняется в области $0 < \tau < 1$, где оба режима существуют при $\mu < 0$, и в области $\tau > 2$, где оба режима существуют при $\mu > 0$. Условие 3 выполняется, если $0 <$

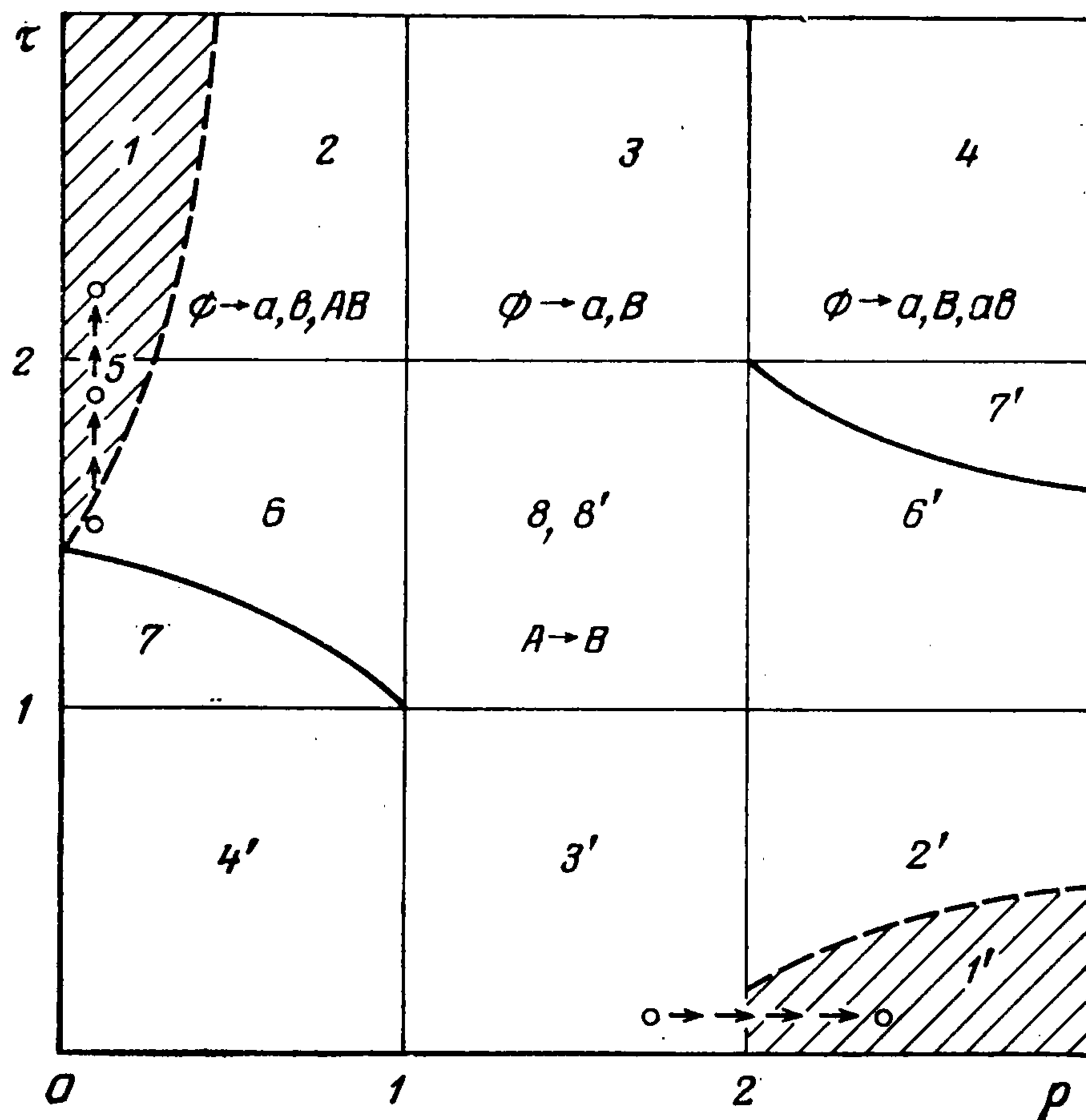
$\rho < 1$ и $\rho > 2$. В этих областях существует двукратное периодическое движение. Соответствующий ему характеристический полином (3.6) принимает вид

$$\lambda^2 - \left(1 + \left(\frac{\rho}{2} - \frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\tau}{2} - \frac{1}{\tau}\right)\right) \lambda + \frac{1}{4} = 0$$

Движение AB устойчиво при выполнении неравенств

$$-1 < \left(\frac{2}{\rho} - \rho\right) \left(\tau - \frac{2}{\tau}\right) < 9$$

Нарушение левого неравенства соответствует появлению корня $\lambda = +1$ (сплошные кривые на фиг. 1), правого — корня $\lambda = -1$ (штриховые



Фиг. 1

кривые). На фиг. 1 представлено разбиение плоскости параметров ρ , τ на области с различной структурой С-бифуркационных границ. Структуры областей, обозначенных одинаковыми цифрами без штриха и со штрихом, отличаются направлением изменения параметра μ и обозначением периодических режимов. Так, например, при увеличении μ области 7 соответствует структура С-бифуркационного перехода $A, ab \rightarrow b$, а области 7' — структура $a \rightarrow B, ab$. Области, в которых возможно существование странного аттрактора, заштрихованы. Из фиг. 1 с учетом (2.3) — (2.5) видно, что попадание в выделенные области можно осуществить через последовательность бифуркационных переходов, реализуемых даже одномерным точечным отображением. Такие переходы обозначены стрелками. Переходу при изменении параметра τ сначала соответствует структура $A \rightarrow b, AB$ (область 6), затем структура $A \rightarrow b, ab$ (область 5) и, наконец, структура $\emptyset \rightarrow a, b, ab$ (область 1).

Возникновение странных аттракторов рассмотрим на примере одномерного отображения

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x' &= \alpha x - \mu, & x &\geq 0 \\ x' &= \beta x - \mu, & x &\leq 0 \quad (\alpha > 0, \beta < 0) \end{aligned}$$

При $\mu < 0$, $\alpha < 1$ существует устойчивая неподвижная точка $x^* = \mu / (\alpha - 1)$ режима A , при $\mu > 0$, $\beta < -1$ всегда существует неустойчивая точка $x^* = \mu / (\beta - 1)$ режима b и пара неподвижных точек двукратного режима. Очевидно, что при $\alpha > 1$, $\beta < -1$ неподвижные точки любой кратности неустойчивы.

Специальным выбором параметров $\alpha < 1$, $\beta < -1$ можно осуществить С-бифуркационный переход, при котором устойчивый режим A , исчезая при $\mu = 0$, порождает не менее чем семейство периодических режимов b , $ab, \dots, a^{k-2}b, A^{k-1}B$ ($k \geq 2$), где наиболее сложный из режимов устойчив.

Условия существования режима $a^{k-1}b$ сводятся к условиям на знаки последовательности неподвижных точек

$$(4.2) \quad x_1^* \leq 0, \quad x_2^* \geq 0, \quad \dots, \quad x_k^* \geq 0$$

Выражая значения этих точек через μ , α , β , нетрудно получить, что все условия (4.2) будут выполнены при $\mu > 0$, если

$$(4.3) \quad \beta < - (1 + \alpha^{-1} + \alpha^{-2} + \dots + \alpha^{-k+2}) = f_k(\alpha)$$

Из (4.3) следует, что для заданных значений α и β при существовании режима кратности l существуют все режимы меньшей кратности, так как $f_l(\alpha) < f_k(\alpha)$ для $k < l$.

Собственное значение k -кратного режима равно $\alpha^{k-1}\beta$, поэтому условие его устойчивости записывается в виде

$$(4.4) \quad \beta > -\alpha^{-k+1} = \varphi_k(\alpha)$$

Анализ условий (4.3), (4.4) показывает, что с уменьшением β сначала становится неустойчивым режим кратности k , а лишь потом возникает режим кратности $k + 1$ и что для любого $k \geq 2$ существуют α и β , удовлетворяющие одновременно обоим условиям

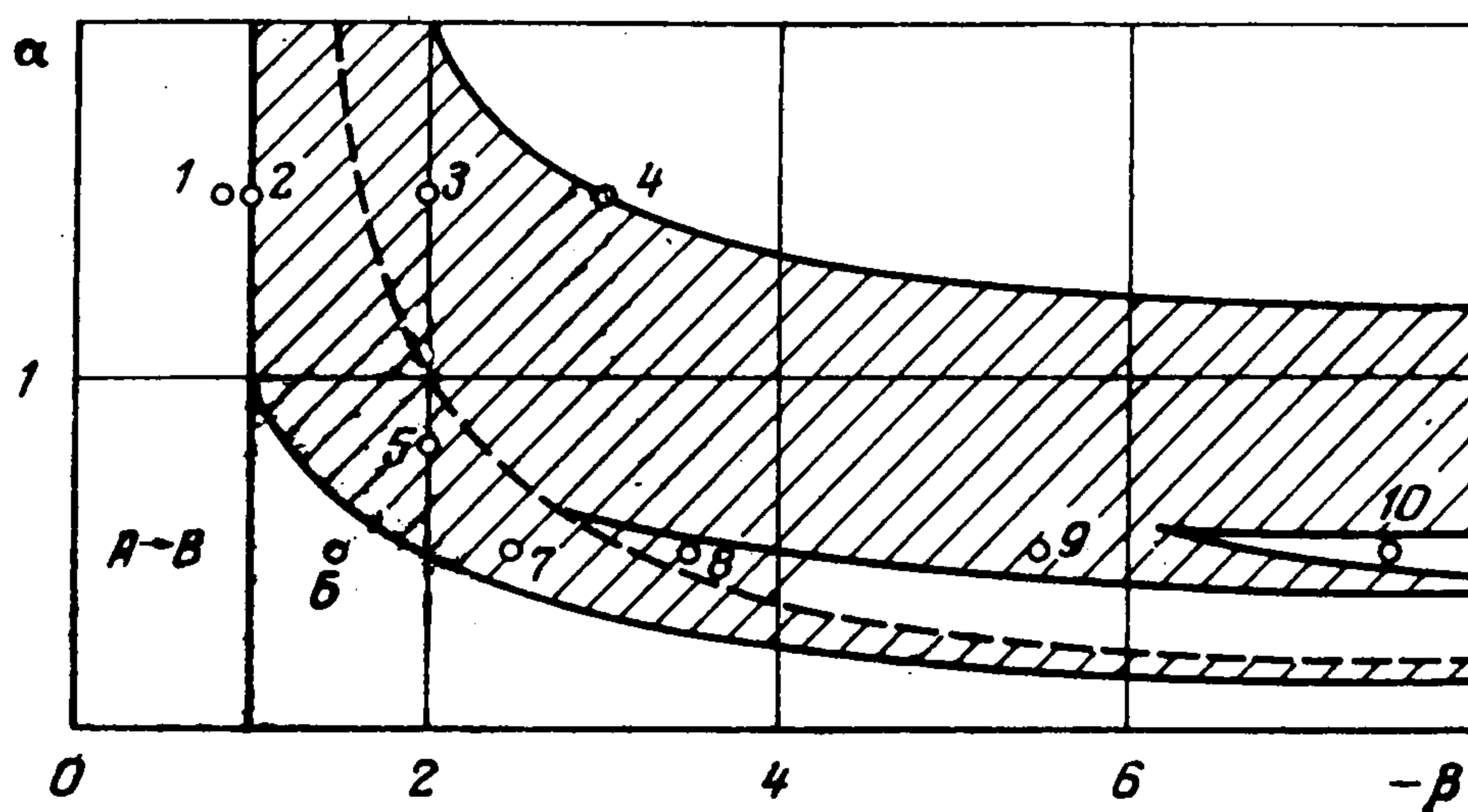
$$(4.5) \quad \varphi_k(\alpha) < \beta < f_k(\alpha)$$

так как разность монотонно возрастающих функций φ_k и f_k меняет знак и они пересекаются в некоторой точке $0 < \alpha_k < 1$.

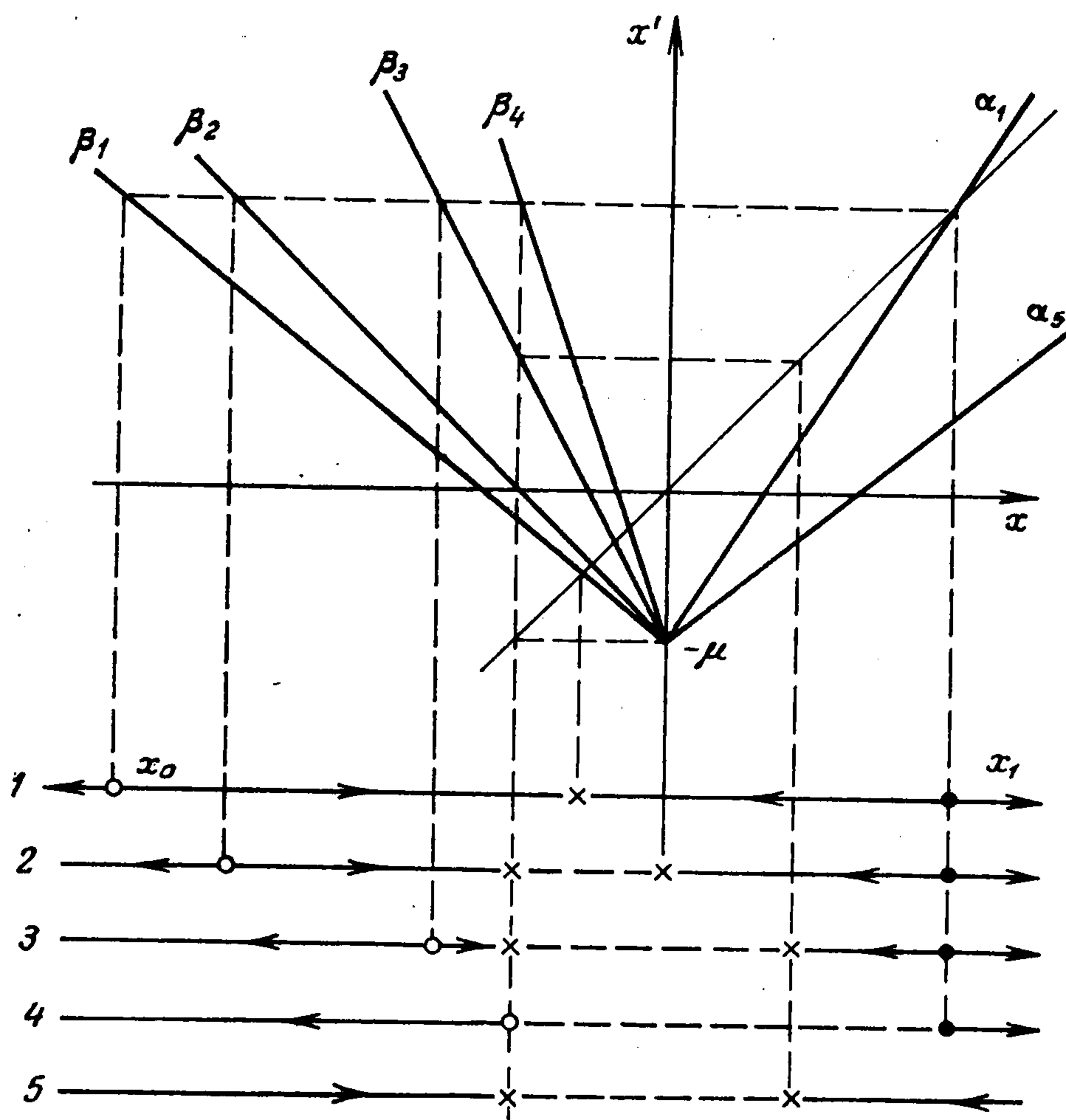
Высказанное утверждение доказано. Если выполняется (4.5), то при $\mu = 0$ происходит безопасный переход $A \rightarrow A^{k-1}B, \dots$. Заметим, что для обнаруженного многообразия структур понятие опасной и безопасной С-бифуркационной границы уже не удастся однозначно связать с простейшей ее структурой, как это было сделано в работе [1]. Когда при $\mu > 0$ не существует устойчивых неподвижных точек, переход может оказаться как опасным (например $A \rightarrow b$), так и безопасным. Область возможного существования аттрактора на фиг. 2 заштрихована. Штриховой линией обозначена граница возникновения трехкратных неподвижных точек, выше которой существуют режимы любой кратности [4].

На фиг. 3 представлена диаграмма Ламерея для пяти точек плоскости параметров, обозначенных соответственно на фиг. 2 ($\mu > 0$). Под диаграммой для этих случаев условно представлено разбиение оси x на интервалы «стягивания» и «разбегания» точек отображения (4.1). Границами указанных интервалов служат неустойчивая простая неподвижная точка x_1 (темные точки на фиг. 3) и отображаемая в нее точка x_0 (светлые точки)

$$x_1 = \frac{\mu}{\alpha - 1}, \quad x_0 = \frac{\mu\alpha}{\beta(\alpha - 1)}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

При $-1 < \beta < 0$ (случай 1 — α_1, β_1 и соответствующая ему структура $\emptyset \rightarrow a, B$ на фиг. 2,3) интервал x_0x_1 приводит к единственной устойчивой неподвижной точке. Случай 2 (α_1, β_2) соответствует переходу через границу устойчивости $\beta = -1$, при котором возникает континуум двукратных неподвижных точек $-\mu < x_{1,2}^* < 0$. При уменьшении β (случай 3 — α_1, β_3 и структура $\emptyset \rightarrow a, b, ab, \dots, \infty$) точки отображения на интервале x_0x_1 приводят в интервал притяжения $-\mu < x < -\mu(1 + \beta)$, внутри которого не может быть устойчивых неподвижных точек (на фиг. 3 обозначен штриховой линией). С дальнейшим уменьшением β точки x_0x_1 приближаются к интервалу притяжения, сливаясь с его концами при совпадении отображения точки $x = 0$ с точкой x_0 . Случай 4 (α_1, β_4) выбран на бифуркационной границе $\alpha + \alpha\beta - \beta = 0$, соответствующей потере интервалом свойства притяжения.

Случаи 1, 3 соответствуют опасной С-границе: при $\mu > 0$ существует либо устойчивая неподвижная точка, либо странный аттрактор, которые исчезают при $\mu = 0$.

Устойчивая точка сливается с неустойчивой, а при исчезновении странного аттрактора расположение интервала притяжения внутри интервала стягивания сохраняется для любого сколь угодно малого $\mu > 0$.

Для $\alpha < 1$ интервал притяжения становится «абсолютно устойчивым» (случай 5 — α_5 , β_3 и структура $A \rightarrow b, ab$). С-граница $\mu = 0$ здесь безопасная и соответствует переходу движения A либо в устойчивый периодический режим сложного типа, либо в странный аттрактор. При машинном моделировании отображения (4.1) имела место сходимость к соответствующей периодической последовательности неподвижных точек (случай 6 и соответствующая ему структура $A \rightarrow b, AB$, случай 8 и структура $A \rightarrow A^2B, \dots$, случай 10 и структура $A \rightarrow A^3B, \dots$ на фиг. 2) или заполнение всего интервала притяжения (случай 5, случай 7 — $A \rightarrow b, ab$, случай 9 — $A \rightarrow b, ab, \dots, \infty$).

Поступила 18 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгин М. И. Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
2. Фейгин М. И. О рождении семейств субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
3. Фейгин М. И. О поведении динамических систем вблизи границ области существования периодических движений. ПММ, 1977, т. 41, вып. 4.
4. Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя. Укр. матем. ж., 1964, т. 16, № 1.
5. May R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, 1976, vol. 261, No. 5560.
6. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
8. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.—М., Гостехиздат, 1949.
9. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 5.