Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ ЧАПЛЫГИНА

А. В. Карапетян

(Москва)

Исследуется устойчивость стационарных движений неголономных систем Чаплыгина, находящихся под действием потенциальных и диссипативных сил и обладающих циклическими координатами. Обзор имеющихся в этой области результатов приведен в [1].

1. Рассмотрим склерономную неголономную систему, находящуюся под действием сил, допускающих силовую функцию. Обобщенные координаты системы обозначим через $q_1, \ldots, q_n$; обобщенные скорости $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ будем считать связанными $n - m$ неинтегрируемыми соотношениями вида

$$q_\mu^{\cdot} = \sum_{r=1}^{m} b_{\mu r}(q)\, q_r^{\cdot} \quad (\mu = m+1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Предполагая, что на систему могут действовать диссипативные силы, производные от функции Релея F, коэффициенты которой не зависят от q_μ, и что кинетическая энергия T, силовая функция U и коэффициенты связей $b_{\mu r}$ также не зависят от q_μ, выпишем уравнения движения системы в форме Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_r^{\cdot}} = \frac{\partial (T^* + U)}{\partial q_r} + \sum_{p,\, s=1}^{m} q_s^{\cdot} q_p^{\cdot} \sum_{\mu=m+1}^{n} \theta_{\mu p} \nu_{\mu r s} - \frac{\partial F^*}{\partial q_r^{\cdot}} \quad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

$$\left(\nu_{\mu r s} = \frac{\partial b_{\mu r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\mu s}}{\partial q_r}\right)$$

Здесь

$$2T^* = \sum_{r,\, s=1}^{m} a_{rs} q_r^{\cdot} q_s^{\cdot}, \quad 2F^* = \sum_{r,\, s=1}^{m} f_{rs} q_r^{\cdot} q_s^{\cdot}, \quad \theta_\mu = \sum_{p=1}^{m} \theta_{\mu p} q_p^{\cdot}$$

получаются из $2T$, $2F$, $\partial T / \partial q_\mu^{\cdot}$ исключением величин $q_\mu^{\cdot}$ с помощью соотношений (1.1).

Предположим, что координаты q_α $(\alpha = l+1, \ldots, m)$ — циклические в смысле определения [2], обобщающего определение [3], т. е. в уравнения (1.2) координаты q_α явно не входят, а входят только их ускорения и, возможно, скорости. Точнее, будем предполагать, что

$$(1.3)\qquad \frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}=0,\quad \frac{\partial F^*}{\partial q_\alpha}=0,\ \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\mu=m+1}^{n}\theta_{\mu p}\nu_{\mu rs}=0$$

$$(\alpha=l+1,\ldots,m;\ p,r,s=1,\ldots,m)$$

Кроме того, предположим, что

$$(1.4)\qquad \frac{\partial F^*}{\partial q_\alpha^{\cdot}}=0,\quad \sum_{\mu=m+1}^{n}\theta_{\mu\gamma}\nu_{\mu\alpha\beta}\equiv 0\quad (\alpha,\beta,\gamma=l+1,\ldots,m)$$

Первая группа условий в (1.4) означает отсутствие диссипации по циклическим скоростям, вторая группа обеспечивает существование $(m-l)$-мерного многообразия стационарных движений. Действительно, система (1.2) при условиях (1.3), (1.4) допускает решение

$$(1.5)\qquad q_i=q_{i0},\quad q_i^{\cdot}=0\quad (i=1,\ldots,l);\qquad q_\alpha^{\cdot}=q_{\alpha0}^{\cdot}\quad (\alpha=l+1,\ldots,m)$$

причем m постоянных q_{i0}, $q_{\alpha0}^{\cdot}$ удовлетворяют системе $l<m$ уравнений

$$(1.6)\qquad \frac{\partial U}{\partial q_i}+\sum_{\alpha,\beta=l+1}^{m}q_\alpha^{\cdot}q_\beta^{\cdot}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial q_{\alpha\beta}}{\partial q_i}+\sum_{\mu=m+1}^{n}\theta_{\mu\beta}\nu_{\mu i\alpha}\right]=0\quad (i=1,\ldots,l)$$

Рассмотрим произвольную точку многообразия (1.6) и поставим вопрос об устойчивости решения (1.5) системы (1.2) по отношению к возмущениям переменных q_i, $q_i^{\cdot}$ и $q_\alpha^{\cdot}$.

2. Полагая

$$x_i=q_i-q_{i0}\quad (i=1,\ldots,l),\quad y_\alpha=q_\alpha^{\cdot}-\omega_\alpha\quad (\omega_\alpha=q_{\alpha0}^{\cdot},\ \alpha=l+1,\ldots,m)$$

выпишем уравнения возмущенного движения в виде

$$(2.1)\qquad \sum_j a_{ij}x_j^{\cdot\cdot}+\sum_\beta a_{i\beta}y_\beta^{\cdot}=\sum_{j,h}x_j^{\cdot}x_h^{\cdot}B_{ijh}+\sum_{j,\beta}x_j^{\cdot}(\omega_\beta+y_\beta)B_{ij\beta}+$$
$$+\sum_{\beta,\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma\Delta B_{i\beta\gamma}+\sum_{\beta,\gamma}(\omega_\beta y_\gamma+\omega_\gamma y_\beta+y_\beta y_\gamma)B_{i\beta\gamma}+$$
$$+\Delta\frac{\partial U}{\partial q_i}-\sum_j f_{ij}x_j^{\cdot}$$

$$\sum_j a_{\alpha j}x_j^{\cdot\cdot}+\sum_\beta a_{\alpha\beta}y_\beta^{\cdot}=\sum_{j,h}x_j^{\cdot}x_h^{\cdot}B_{\alpha jh}+\sum_{j,\beta}x_j^{\cdot}(\omega_\beta+y_\beta)B_{\alpha j\beta}$$

Здесь и всюду далее $i,j,h=1,\ldots,l$; $\alpha,\beta,\gamma=l+1,\ldots,m$; $\mu=m+1,\ldots,n$. Все коэффициенты системы (2.1) вычисляются для $q_i=q_{i0}+x_i$; символ Δ означает следующее:

$$\Delta\psi=\psi(q_0+x)-\psi(q_0)$$

$$B_{ijh}=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{jh}}{\partial q_i}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_h}+\sum_\mu\theta_{\mu h}\nu_{\mu ij}$$

$$B_{ij\beta}=\frac{\partial a_{j\beta}}{\partial q_i}-\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_j}+\sum_\mu(\theta_{\mu\beta}\nu_{\mu ij}+\theta_{\mu j}\nu_{\mu i\beta})$$

$$B_{i\beta\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q_i} + \sum_\mu \theta_{\mu\beta}\nu_{\mu i\gamma}$$

$$B_{\alpha jh} = \sum_\mu \theta_{\mu h}\nu_{\mu\alpha j} - \frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial q_h}$$

$$B_{\alpha j\beta} = \sum_\mu (\theta_{\mu\beta}\nu_{\mu\alpha j} + \theta_{\mu j}\nu_{\mu\alpha\beta}) - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_j}$$

Уравнения первого приближения в окрестности решения (1.5) примут вид

(2.2)
$$\sum_j a_{ij}^\circ x_j^{\cdot\cdot} + \sum_\beta a_{i\beta}^\circ y_\beta^{\cdot} = \sum_j (g_{ij}^\circ + d_{ij}^\circ) x_j^{\cdot} + \sum_j (c_{ij}^\circ + e_{ij}^\circ) x_j + \sum_\beta u_{i\beta}^\circ y_\beta$$

$$\sum_j a_{\alpha j}^\circ x_j^{\cdot\cdot} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^\circ y_\beta^{\cdot} = \sum_j v_{\alpha j}^\circ x_j^{\cdot}$$

$$g_{ij} + d_{ij} = \sum_\beta \omega_\beta B_{ij\beta} - f_{ij}; \quad g_{ij} = -g_{ji}, \quad d_{ij} = d_{ji}$$

$$c_{ij} + e_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i} + \sum_{\beta,\gamma} \omega_\beta\omega_\gamma \frac{\partial B_{i\beta\gamma}}{\partial q_j}; \quad c_{ij} = c_{ji}, \quad e_{ij} = -e_{ji}$$

$$u_{i\alpha} = \sum_\beta \omega_\beta (B_{i\beta\alpha} + B_{i\alpha\beta}), \quad v_{\alpha j} = \sum_\beta \omega_\beta B_{\alpha j\beta}$$

Индекс градус указывает, что соответствующая величина вычисляется для $x_i = 0$ (в исходных переменных — для $q_i = q_{i0}$).

Характеристическое уравнение системы (2.2) имеет $m - l$ нулевых корней, а остальные $2l$ корней удовлетворяют уравнению

(2.3)
$$\det \begin{Vmatrix} \| a_{ij}^\circ\lambda^2 - (g_{ij}^\circ + d_{ij}^\circ)\lambda - (c_{ij}^\circ + e_{ij}^\circ) \| & \| a_{i\beta}^\circ\lambda - u_{i\beta}^\circ \| \\ \| a_{\alpha j}^\circ\lambda - v_{\alpha j}^\circ \| & \| \mathring{a}_{\alpha\beta} \| \end{Vmatrix} = 0$$

Если по крайней мере один корень уравнения (2.3) лежит в правой полуплоскости, то решение (1.5) неустойчиво. Если же все корни уравнения (2.3) лежат в левой полуплоскости, то выполнены условия критического случая нескольких нулевых корней. Покажем, что в данной задаче имеет место особенный случай критического случая нескольких нулевых корней.

3. Очевидно, уравнения (2.2) имеют $m - l$ линейных интегралов

(3.1)
$$\sum_j a_{\alpha j}^\circ x_j^{\cdot} + \sum_\beta \mathring{a}_{\alpha\beta} y_\beta - \sum_{j,\beta} x_j \omega_\beta \mathring{B}_{\alpha j\beta} = z_\alpha \quad (z_\alpha = \mathrm{const},\ \alpha = l+1, \ldots, m)$$

Введем вместо переменных y переменные z по формулам (3.1) и выпишем систему уравнений возмущенного движения в переменных x, $x^{\cdot}$ и z, предварительно разрешив систему (2.1) относительно старших производных. Тогда получим

(3.2)
$$x_i^{\cdot} = x_i'$$

$$x_i'^{\cdot} = \sum_j A_{ij}(x)\Phi_j(x, z) + \sum_j x_j' \Psi_{ij}(x, x', z)$$

$$z_\alpha^{\cdot} = \sum_j \Big(\sum_s \mathring{a}_{\alpha s} A_{sj}(x)\Big)\Phi_j(x, z) + \sum_j x_j' \Psi_{\alpha j}(x, x', z)$$

Здесь A_{rs} — элементы матрицы, обратной к матрице $\| a_{rs} \|$ $(r, s, = 1, \ldots, m)$; разложение функций Φ_i по степеням x, z и функций $\Psi_{\alpha j}$ по степеням x, x', z начинается с членов не ниже первого порядка, а значения Ψ_{ij}°, вообще говоря, не равны нулю. Явный вид функций Φ_i, Ψ_{ij} и $\Psi_{\alpha j}$ не выписан ввиду их громоздкости. Заметим, что разложения правых частей последних $m - l$ уравнений системы (3.2) начинаются с членов не ниже второго порядка, так как

$$\sum_s \overset{\bullet}{a}_{\alpha s} A_{sj}^\circ = \delta_{\alpha j} = 0 \quad (\alpha \neq j)$$

Поскольку разложение функций $\Phi_i(x, z)$ может содержать члены, линейные по z, то необходимо сделать преобразование переменных, приводящее систему к стандартному для исследования критического случая нескольких нулевых корней виду. С этой целью рассмотрим систему уравнений

$$x_i' = 0, \sum_j A_{ij}(x) \Phi_j(x, z) + \sum_j x_j' \Psi_{ij}(x, x', z) = 0$$

разрешая которую относительно переменных x, x', получим

$$x_i' = 0, \quad x_i = X_i(z)$$

причем функции X_i удовлетворяют системе уравнений

$$\Phi_i(X, z) = 0 \quad (\det \| A_{ij} \| \neq 0)$$

решение которой заведомо существует, так как по предположению все корни уравнения (2.3) лежат в левой полуплоскости.

Сделаем замену переменных

$$x_i = X_i(z) + u_i, \quad x_i' = v_i$$

и выпишем систему уравнений возмущенного движения в переменных u, v, z

$$\begin{aligned} u_i^\bullet &= L_i(u, v) + U_i(u, v, z) \\ v_i^\bullet &= L_{l+i}(u, v) + V_i(u, v, z) \\ z_\alpha^\bullet &= \sum_j \Big[\sum_s \overset{\circ}{a}_{\alpha s} A_{sj}(X(z) + u) \Big] \Phi_j(X(z) + u) + \\ &+ \sum_j v_j \Psi_{\alpha j}(X(z) + u, v, z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $L_k(u, v)$ $(k = 1, \ldots, 2l)$ — линейные формы переменных u, v, а разложение функций U_i и V_i по степеням u, v, z начинается с членов не ниже второго порядка.

Очевидно, при $u = v = 0$ правые части последних $m - l$ уравнений системы (3.3) тождественно равны нулю, следовательно, и $U_i(0, 0, z) \equiv V_i(0, 0, z) \equiv 0$ [4, 5].

Итак, предложение о том, что если все корни уравнения (2.3) лежат в левой полуплоскости, то имеет место особенный случай критического случая нескольких нулевых корней, доказано. Следовательно, если все корни уравнения (2.3) лежат в левой полуплоскости, то решение (1.5) системы (1.2) устойчиво (но не асимптотически). При этом всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при $t \to \infty$ к одному из возможных стационарных движений вида (1.5), принадлежащих многообразию (1.6) (но не к невозмущенному).

4. Уравнение (2.3) с помощью элементарных преобразований можно привести к виду

$$\det \| A\lambda^2 - (G + D)\lambda - (C + E) \| = 0 \tag{4.1}$$

которое является характеристическим для системы

$$Aw^{\cdot\cdot} = Gw^{\cdot} + Dw^{\cdot} + Cw + Ew \tag{4.2}$$

$$w = \operatorname{colon}(w_1, \ldots, w_l), \quad A = \| a_{ij}{}^\circ - \sum_{\alpha, \beta} a_{i\beta}{}^\circ \mathring{h}_{\beta\alpha} a_{j\alpha}{}^\circ \|$$

$$G + D = \| g_{ij}{}^\circ + d_{ij}{}^\circ - \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\beta} (a_{i\beta}{}^\circ v_{j\alpha}{}^\circ + a_{j\alpha}{}^\circ u_{i\beta}{}^\circ) \|$$

$$G' = -G, \quad D' = D$$

$$C + E = \| c_{ij}{}^\circ + e_{ij}{}^\circ + \sum_{\alpha, \beta} \mathring{h}_{\alpha\beta} u_{i\beta}{}^\circ v_{j\alpha}{}^\circ \|, \quad C' = C, \quad E' = -E$$

Здесь $h_{\alpha\beta}{}^\circ$ — элементы матрицы, обратной к матрице $\| a_{\alpha\beta}{}^\circ \|$ $(\alpha, \beta = l + 1, \ldots, m)$; штрих означает транспонирование.

Очевидно, матрица A является матрицей определенно-положительной квадратичной формы, т. е. систему (4.2) можно рассматривать как уравнения движения механической системы, находящейся под действием потенциальных Cw, позиционных неконсервативных Ew, гироскопических $Gw^{\cdot}$, диссипативных и ускоряющих $Dw^{\cdot}$ сил. При этом, как следует из изложенного выше, справедливо следующее предложение.

Стационарное движение (1.5) системы (1.2) устойчиво (неустойчиво) по отношению к переменным $q_i - q_{i0}$, $q_i^{\cdot}$, $q_\alpha^{\cdot} - q_{\alpha 0}^{\cdot}$, если нулевое положение равновесия системы (4.2) асимптотически устойчиво (экспоненциально неустойчиво).

С помощью последнего утверждения и результатов исследования систем вида (4.2) [6–10] можно получить ряд теорем об устойчивости или неустойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина, как это было ранее сделано при изучении устойчивости положений равновесия неголономных систем [11].

В частности, при $G \equiv 0$ справедливы все теоремы работы [11], при $G \not\equiv 0$, $E \equiv 0$ теоремы 3.1, 3.3 и 3.4 [11] также справедливы, а теорема 3.2 — нет. Наконец, при $G \not\equiv 0$, $E \not\equiv 0$ справедливы следующие утверждения:

1°. Если функция $2V = -w'Cw$ имеет минимум в начале координат а $D = -\delta D_*$, где D_* — матрица определенно-положительной квадратичной формы, то при достаточно большом $\delta > 0$ стационарное движение (1.5) системы (1.2) устойчиво.

2°. При выполнении одного из следующих условий

а) $D \equiv 0$, уравнение (4.1) содержит нечетные степени λ;

б) $\det \| -(C + E) \| < 0$;

в) функция $2H_0 = -w' ({}^1/_4 GA^{-1}G + C)w$ имеет максимум в начале координат;

стационарное движение (1.5) системы (1.2) неустойчиво.

Замечание. Поскольку $(q_{i0}, q_{\alpha 0}^{\cdot})$ — произвольная точка многообразия стационарных движений (1.6), то полученные результаты позволяют исследовать устойчивость всех стационарных движений исходной системы (действительно, все коэффициенты системы (4.2) зависят от q_{i0}, $q_{\alpha 0}^{\cdot}$). Если решение системы (1.6) можно представить в параметрическом виде, например, в виде

$$q_{\alpha 0}^{\cdot} = \omega_\alpha \quad (\alpha = l + 1, \ldots, m); \quad q_{i0} = \varphi_i(\omega) \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{4.3}$$

то, подставляя (4.3) в выражения для коэффициентов матриц системы (4.2) и применяя полученные результаты, можно на поверхности (4.3) выделить области устойчивых или неустойчивых стационарных движений.

5. Проиллюстрируем полученные результаты на примере исследования устойчивости стационарных движений тора на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Зададим положение тора декартовыми координатами x и y проекции центра масс на горизонтальную плоскость и углами Эйлера θ, ψ и φ. Пусть m — масса тора, A и B — экваториальный и полярный моменты инерции, r — радиус поперечного сечения тора, $R + r$ — радиус экваториальной окружности. Тогда функция Лагранжа и уравнения связей системы, выражающие отсутствие проскальзывания в точке контакта тора с плоскостью, примут вид

$$L = {}^1/_2 m (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + {}^1/_2 (A + mR^2 \sin^2 \theta)\theta^{\cdot 2} + {}^1/_2 (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta)\psi^{\cdot 2} + {}^1/_2 B\varphi^{\cdot 2} - B\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot} \sin\theta - mgR\cos\theta$$

$$x^{\cdot} = (R + r\cos\theta)\cos\psi\varphi^{\cdot} - R\sin\theta\cos\psi\psi^{\cdot} - (R\cos\theta + r)\sin\psi\theta^{\cdot}$$

$$y^{\cdot} = (R + r\cos\theta)\sin\psi\varphi^{\cdot} - R\sin\theta\sin\psi\psi^{\cdot} + (R\cos\theta + r)\cos\psi\theta^{\cdot}.$$

Предполагая, что на систему могут действовать диссипативные силы, производные от функции Релея $F = {}^1/_2 H\theta^{\cdot 2}$ ($H = \text{const} > 0$), нетрудно показать, что координаты ψ и φ — циклические в смысле определения (1.3) и (1.4). Следовательно, исходная система может совершать стационарные движения вида

$$\theta = \alpha, \quad \varphi^{\cdot} = \omega, \quad \psi^{\cdot} = \Omega \tag{5.1}$$

При этом три постоянные α, ω и Ω удовлетворяют одному уравнению

$$mgR\sin\alpha - [B\cos\alpha + m(R\cos\alpha + r)(R + r\cos\alpha)]\omega\Omega + [(B - A)\cos\alpha + mR(R\cos\alpha + r)]\sin\alpha\Omega^2 = 0 \tag{5.2}$$

Рассматривая произвольную точку многообразия (5.2) и применяя полученные результаты, получим, что стационарное движение (5.1) устойчиво (неустойчиво), если асимптотически устойчиво (экспоненциально неустойчиво) тривиальное решение уравнения

$$[A + m(R^2 + 2Rr\cos\alpha + r^2)]w^{\cdot\cdot} + Hw^{\cdot} + J(K\Omega^2 + L\Omega\omega + M\omega^2 + N)w = 0 \tag{5.3}$$

$$J = [AB + Am(R + r\cos\alpha)^2 + Bmr^2\sin^2\alpha]^{-1}\cos^{-1}\alpha > 0$$

$$K = [B\cos\alpha + m(R\cos\alpha + r)(R + r\cos\alpha)][Am(R + r\cos\alpha)(2R + r\cos\alpha) + AB(1 + \sin^2\alpha) + Bm\sin^2\alpha(r^2 -$$

$$- R^2) - B^2 \sin^2 \alpha] - [(B - A + mR^2)\cos 2\alpha + mRr\cos\alpha][AB + Am (R + r\cos\alpha)^2 + Bmr^2 \sin^2\alpha]\cos\alpha - 2[(B - A + mR^2)\cos\alpha + mRr][- B^2 + 2AB + 2Am (R + r\cos\alpha)^2 - Bm (R^2 + Rr\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha)]\sin^2\alpha$$

$$L = [B\cos\alpha + m (R\cos\alpha + r)(R + r\cos\alpha)][Am (2R^2 + 5Rr\cos\alpha + 3r^2\cos^2\alpha) + AB + Bmr^2 (3\sin^2\alpha - 1)]\sin\alpha - [B + m (R^2 + 2Rr\cos\alpha + r^2)][-AB\cos\alpha + Am (R + r\cos\alpha)^2\cos\alpha + 2B^2\cos\alpha + Bm (2R^2\cos\alpha + 2Rr + r^2\sin^2\alpha\cos\alpha)]\sin\alpha, \quad M = B[B + m (R^2 + 2Rr\cos\alpha + r^2)][B\cos\alpha + m (R\cos\alpha + r)(R + r\cos\alpha)]$$

$$N = -mgR[AB + Am (R + r\cos\alpha)^2 + Bmr^2\sin^2\alpha]\cos^2\alpha$$

которое является уравнением движения механической системы с одной степенью свободы, находящейся под действием диссипативных и потенциальных сил. Отсюда сразу получаем условие устойчивости (неустойчивости)

$$K\Omega^2 + L\Omega\omega + M\omega^2 + N > 0 \quad (< 0) \tag{5.4}$$

стационарного движения (5.1) как условие минимума (отсутствия минимума) потенциальной энергии системы (5.3).

Условие (5.4) при $r = 0$ переходит в известное (см., например, [1,3]) условие устойчивости стационарных движений обруча; при $\alpha = 0$, $\omega = 0$ — в условие устойчивости верчения тора вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью, а при $\alpha = 0$, $\Omega = 0$ — в условие устойчивости равномерного качения тора по прямой (см., например, [3]).

Поступила 14 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В., Карапетян А. В.* Устойчивость движений неголономных систем. Итоги науки и техники. Общая механика, т. 3. М., ВИНИТИ, 1976.
2. *Емельянова И. С., Фуфаев Н. А.* Об устойчивости стационарных движений. В сб.: Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика. Изд-во Горьковск. ун-та, 1974.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
4. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений, т. 2. М.— Л., Изд-во. АН СССР, 1956.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М. «Наука», 1966.
6. *Метелицын И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации. Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 1.
7. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М., «Наука», 1971.
8. *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
9. *Лахаданов В. М.* О стабилизации потенциальных систем. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
10. *Карапетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1975, № 4.
11. *Карапетян А. В.* Об устойчивости равновесия неголономных систем. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.