Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.011

К ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

В. А. Боднер, Н. Е. Роднищев, Е. П. Юриков

(Москва, Казань)

Рассматриваются разрывные системы с оптимизируемыми точками разрывов, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Устанавливается принцип оптимальности таких систем, представляющий собой естественное обобщение принципа максимума, и предлагается численный метод поиска оптимального управления.

Рассматриваемая задача допускает важные физические интерпретации, относящиеся например, к обобщенному управлению [1], позволяющему рассматривать управляющие воздействия в виде мгновенных импульсов, выбору [2] программы движения и основных проектных параметров составных летательных аппаратов, обеспечивающих наиболее вероятную доставку полезных грузов в заданную область, или разработку систем программного управления переменной структуры с наиболее точной реализацией невозмущенных движений и др.

1. Постановка задачи. Пусть требуется определить оптимальное управление $v = (u, a, T)$ системы, поведение которой на отрезке времени $[t_0, t_k]$ последовательно по примыкающим участкам $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1,\ldots k)$ описывается стохастической системой дифференциальных уравнений

$$dX_i(t) = \varphi_i^j(t, X, u, a)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_{i\nu}^j(t, X)\,d\eta_\nu(t) \tag{1.1}$$

$$X_i(t_0) = X_{i0},\ t \in [t_{j-1}, t_j]\ (i = 1,\ldots, n;\ j = 1,\ldots, k)$$

доставляющих минимум функционалу

$$I_0(v) = \sum_{j=1}^{k} M\,[f_0(a, t_j X^j)] \tag{1.2}$$

при наличии ограничений

$$I_s(v) = \sum_{j=1}^{k} M\,[f_s(a, t_j, X^j)] = 0 \quad (s = 1, \ldots, q) \tag{1.3}$$

$$\psi_s(u) = 0\ (s = 1,\ldots, k_0),\ g_s(a) = 0\ (s = 1,\ldots, q_0)$$

Здесь t — время, $T = (t_0,\ldots, t_j,\ldots, t_k)$; моменты времени $t_0,\ldots, t_j,\ldots, t_k$ удовлетворяют неравенствам $t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_j \leqslant \ldots \leqslant t_k$, $X(t)$ — n-мерная вектор-функция состояния системы, непрерывная по t на каждом отрезке времени $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1,\ldots, k)$, $u(t)$ — r-мерная вектор-функция управления, a — m_0-мерный детерминированный вектор управляющих параметров, $\eta_\nu(t)$ — независимые в совокупности винеровские процессы, $\varphi_i^j(t, X, u, a)$, $\sigma_{i\nu}^j(t, X)$ — определенные на $[t_{j-1}, t_j]$ непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие известным [3] требованиям существования с вероятностью единица непрерывного решения $X(t)$ и плотности вероятности $p(t, X)$ процесса $X(t)$, которая удовлетворяет уравнению Колмогорова — Фоккера — Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, X) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} [\varphi_i^j(t, X, u, a) p(t, X)] + \tag{1.4}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_\nu} [\sigma_{i\nu}^j(t, X) p(t, X)] = \Phi^j(t, p, u, a), \qquad t \in [t_{j-1}, t_j]$$

$$p(t, X)|_{t=t_0} = p(t_0, X)$$

индекс j характеризует структуру управляемой системы (1.1) на $[t_{j-1}, t_j]$, $I_s(v)$ $(s = 0, \ldots, q)$ — непрерывные дифференцируемые ограниченные функционалы, представляющие собой математические ожидания, вычисляемые по формуле

$$I_s(v) = \sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega} f_s^j(a, t_j, X^j) p(t_j, X)\, dX \tag{1.5}$$

где $\Omega \subseteq E_n$ — область реализации X. Обозначение $I_s(v)$ подчеркивает, что в качестве независимых переменных рассматриваются $v = (u, a, T)$. Будем также полагать, что функционал $I_0(v)$ ограничен снизу, т. е. $\inf I_0(v) = I_0(v^*) > -\infty$.

2. **Необходимые условия оптимальности.** При принятых допущениях задача (1.1) — (1.3) аналогично [4] сводится к детерминированной задаче минимизации функционала $I_0(v)$ (1.2) при наличии дифференциальной связи (1.4). Необходимые условия оптимальности дает следующая теорема.

Теорема 1 (принцип оптимальности в среднем). Для оптимальности допустимого управления $v^* = (u^*, a^*, T^*)$ системы (1.1), реализующего минимум функционала $I_0(v)$, необходимо существование случайной функции $\lambda(t, X) \not\equiv 0$, определяемой уравнениями

$$\lambda_t = \frac{\partial \lambda(t, X)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial X_i} \varphi_i^j(t, X, u, a) - \tag{2.1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial X_i \partial X_\nu} \sigma_{i\nu}^j(t, X)$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j] \quad (j = 1, \ldots, k)$$

$$\lambda(t_j, X)_- = \lambda(t_j, X)_+ - \sum_{s=0}^{q} \alpha_s f_s^j(a, t_j, X^j) \; (j = 1, \ldots, k-1) \tag{2.2}$$

$$\lambda(t_k, X)_- = -\sum_{s=0}^{q} \alpha_s f_s^k(a, t_k, X^k)$$

относительно которой:

а) оптимальное управление u^* доставляет максимум функции

$$M[R^j(t,X,u,a,\lambda)] = \int_\Omega R^j(t,X,u,a,\lambda)\,p(t,X)\,dX \tag{2.3}$$

$$R^j(t,X,u,a,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\lambda}{\partial X_i}\varphi_i^j(t,X,u,a)$$

переменного u почти для всех $t \in [t_{j-1},\ t_j]$ $(j = 1,\ldots,k)$;

б) параметры a^*, T^* удовлетворяют условию трансверсальности

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{s=0}^{q}\alpha_s M\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial a}\right) - \int_{t_{j-1}^*}^{t_j^*} M\left(\frac{\partial R^j}{\partial a}\right)dt\right) + \sum_{s=1}^{q_0}\beta_s\frac{\partial g_s}{\partial a} = 0 \tag{2.4}$$

$$M(\lambda_t^j - \lambda_t^{j-1})_{t=t_j^*} + \sum_{s=0}^{q}\alpha_s M\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial t_j}\right) = 0$$

Следствие. Оптимальное управление u^* удовлетворяет соотношениям

$$M\left(\frac{\partial R^j}{\partial u}\right) = \sum_{s=1}^{k_0}\mu_s(t)\frac{\partial\psi_s}{\partial u} \tag{2.5}$$

В случае, если u^* реализуется в открытом ядре множества управлений, правая часть (2.5) равна нулю.

3. Пример. Пусть требуется определить оптимальное управление u^* системы, поведение которой на отрезке времени $[0,\ t_2]$ последовательно по примыкающим участкам $[0,\ t_1]$, $[t_1,\ t_2]$ описывается стохастическими уравнениями

$$dX_1 = X_2dt,\ dX_2 = udt + \sigma d\eta \tag{3.1}$$

$$X_1(0) = c_1,\ X_2(0) = c_2;\ t \in [0,\ t_1]$$

$$X_1(t_1) = X_1(t_1)_+,\ X_2(t_1)_- = X_2(t_1)_+;\ t \in [t_1,\ t_2]$$

доставляющее минимум функционалу

$$I_0(u) = \sum_{j=1}^{2} M[X_1(t_j) - c_j]^2 \tag{3.2}$$

при ограничении на управление

$$|u| \leqslant 1 \tag{3.3}$$

В соответствии с необходимыми условиями оптимальности управление u^* будем искать из условия

$$R(t,\ X,\ u^*,\ a,\ \lambda) = \max_u R(t,\ X,\ u,\ a,\ \lambda) \tag{3.4}$$

$$R(t,X,u,a,\lambda) = \frac{d\lambda}{\partial X_1}X_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial X_2}u$$

где $\lambda(t,\ X)$ определяется решением уравнения

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -L\lambda,\quad L = X_2\frac{\partial}{\partial X_1} + u\frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_1\partial X_2} \tag{3.5}$$

$$\lambda(t_2,\ X)_- = -[X_1(t_2) - c_2]^2,\quad t \in [t_2,\ t_1]$$

$$\lambda(t_1,\ X)_- = \lambda(t_1,\ X)_+ - [X_1(t_1) - c_2]^2,\quad t \in [t_1,\ 0]$$

С учетом (3.3) определим из (3.4) оптимальное управление

$$u^*(t) = \operatorname{sign}\frac{\partial\lambda}{\partial X_2} \tag{3.6}$$

Принимая во внимание (3.6) и вводя обратное время $\tau = t_2 - t$, из (3.5) получим

(3.7) $$d\lambda/dt = L\lambda$$

$$\lambda(\tau_2, X) = -[X_1(\tau_2) - c_2]^2,\ \tau \in [\tau_2, \tau_1],\ \tau_2 = 0$$

$$\lambda(\tau_1, X)_- = \lambda(\tau_1, X)_+ - [X_1(\tau_1) - c_1]^2,\ \tau \in [\tau_1, \tau_0]$$

Решение $\lambda(\tau, X_1, X_2)$ будем искать в виде линейно-квадратичной формы [5] с неопределенными коэффициентами

(3.8) $$\lambda = k_0(\tau) + k_1(\tau)X_1 + k_2(\tau)X_2 + k_{11}(\tau)X_1^2 + k_{12}(\tau)X_1X_2 + k_{22}(\tau)X_2^2$$

Подставляя значения λ в (3.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых $X = (X_1, X_2)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $k(\tau)$ на $[\tau_2, \tau_1]$

(3.9) $$k_0^\cdot = k_2 + \sigma k_{22},\ k_1^\cdot = k_{12},\ k_2^\cdot = k_1 + 2k_{12}$$

$$k_{11}^\cdot = 0,\ k_{12}^\cdot = 2k_{11},\ k_{22}^\cdot = k_{12}$$

с начальными условиями

$$k_0(\tau_2) = k_2(\tau_2) = k_{12}(\tau_2) = k_{22}(\tau_2) = 0,\ k_1(\tau_2) = 2c_2,\ k_{11}(\tau_2) = -1$$

Решая (3.9) с начальными условиями в обратном времени, получим

$$k_0(\tau) = c_2\tau^2 - \frac{\sigma}{3}\tau^3 - \frac{1}{4}\tau^4,\quad k_1(\tau) = 2c_2 - \tau^2,\quad k_2(\tau) = 2c_2\tau - \tau^3$$

$$k_{11}(\tau) = -1,\ k_{12}(\tau) = -2\tau,\ k_{22}(\tau) = -\tau^2$$

В результате оптимальную синтезирующую функцию u^* на $[\tau_2, \tau_1]$ можно представить в виде

(3.10) $$u^*(\tau) = \operatorname{sign}[2c_2\tau - \tau^3 - 2\tau X_1 - 2\tau^2 X_2]$$

На $[\tau_1, \tau_0]$ система (3.9) будет иметь граничные условия

(3.11) $$k_0(\tau_1) = 0,\ k_1(\tau_1) = 2(c_1 + c_2) - \tau_1^2,\ k_2(\tau_1) = 2c_2\tau_1 - \tau_1^3$$

$$k_{11}(\tau_1) = -2,\ k_{12}(\tau_1) = -\tau_1,\ k_{22}(\tau_1) = -\tau_1^2$$

Решая (3.9) в обратном времени с граничными условиями (3.11) на $[\tau_1, \tau_0]$, оптимальную синтезирующую функцию управления u^* на $[\tau_1, \tau_0]$ представим в виде

(3.12) $$u^*(\tau) = \operatorname{sign}[{}^1/_2\tau_1^2 - 2c_1\tau_1 + 2(c_1 + c_2)\tau - {}^3/_2\tau_1\tau^2 - 2(\tau - \tau_1)^3 + (-\tau_1 - 4(\tau - \tau_1))X_1 + 2(-\tau_1\tau - 2(\tau - \tau_1)^2)X_2]$$

Из (3.10) и (3.12) следует, что оптимальное управление — кусочно-постоянная функция, принимающая значения ± 1.

4. Численный метод поиска оптимального управления. Для численного нахождения оптимального управления $v^* = (u^*, a^*, T^*)$ задачи (1.1) — (1.3) применим метод проекции градиента. Вычислительный алгоритм при использовании этого метода определяется видом формулы для первой вариации функционала Лагранжа при произвольных вариациях управления. Составим для задачи (1.1) — (1.3) функционал Лагранжа

(4.1) $$F(v, \eta) = I_0(v) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_s I_s(v) + \sum_{s=1}^{k_0}\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mu_s(t)\psi_s(u)\,dt + \sum_{s=1}^{q_0}\beta_s g_s(a)$$

где $\eta = (\alpha, \mu(t), \beta)$ — вектор множителей Лагранжа, и введем непрерывную на $[t_{j-1}, t_j]$ случайную функцию $\lambda^{js}(t, X)$, $(j = 1, \ldots, k;\ s = 0, \ldots, q)$, удовлетворяющую уравнению

$$
\begin{aligned}
(4.2)\qquad & \lambda_t^{js} = \frac{\partial\lambda^{js}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\lambda^{js}}{\partial X_i}\varphi_i^j(t, X, u, a) - \\
& -\frac{1}{2}\sum_{i,\,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\lambda^{js}}{\partial X_i \partial X_\nu}\sigma_{i\nu}^j(t, X) \\
& t \in [t_j, t_{j-1}] \quad (j = 1, \ldots, k) \\
& \lambda^{js}(t_j, X)_- = \lambda^{js}(t_j, X)_+ - f_s^j(a, t_j, X^j) \quad (j = 1, \ldots, k-1) \\
& \lambda^{ks}(t_k, X)_- = -f_s^k(a, t_t, X^k)
\end{aligned}
$$

Тогда формулу для первой вариации функционала Лагранжа (4.1) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
(4.3)\qquad & \delta F = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} F(v + \varepsilon\delta v, \eta) = \\
& = -\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[MLuR^{js} - \sum_{s=0}^{k_0}\mu_s(t)\frac{\partial\psi_s}{\partial u}\right]\delta u\, dt + \\
& + \left[\sum_{j=1}^{k} M\left(L_a f_s^j - \int_{t_{j-1}}^{t_j} L_a R^{js}\right) + \sum_{s=1}^{q}\beta_s\frac{\partial g_s}{\partial a}\right]\delta a + \\
& + \sum_{j=1}^{k}\left[ML_t(\lambda^{js} - \lambda^{j-1,s})\big|_{t=t_j} + L_{t_j} f_s^j\right]\delta t_j \\
& R^{js} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\chi^{js}}{\partial X_i}\varphi_i^j(t, X, u, a) \quad (j = 1, \ldots, k;\ s = 0, \ldots, q) \\
& \alpha_0 = 1, \quad L_u = \sum_{s=0}^{q}\alpha_s\frac{\partial}{\partial u}, \quad L_a = \sum_{s=0}^{q}\alpha_s\frac{\partial}{\partial a} \text{ и т. д.}
\end{aligned}
$$

В соответствии с идеей градиентного метода в функциональном пространстве естественно рассматривать следующий итерационный процесс поиска оптимального управления:

$$
\begin{aligned}
(4.4)\qquad & u_\rho^{n+1} = u_\rho^n + h^n[MLu_\rho R^{js} - L^{u_\rho}\psi_s] \quad (\rho = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, k) \\
& a_i^{n+1} = a_i^n - h^n\left[\sum_{j=1}^{k} M\left(L_{a_i} f_s^j - \int_{t_{j-1}}^{t_j} L_{a_i} R^{is}\, dt\right) + L^{a_i} g_s\right] \\
& (i = 1, \ldots, m_0) \\
& t_j^{n+1} = t_j^n - h^n[ML_t(\lambda^{js} - \lambda^{j-1,s})\big|_{t=t_j} + \mathrm{M}L_{t_j} f_s^j] \quad (j = 1, \ldots, k)
\end{aligned}
$$

Здесь n — номер итерации, h^n — величина шага на n-й итерации. Выражения в правых частях (4.4) вычисляются на n-х решениях [6, 7] (1.4) и (4.2).

Для определения множителей α_s, $\mu_s(t)$, β_s из всех направлений $\delta u_\rho^n(t)$, δa_i^n, δt_j^n, определенных соответственно выражениями в квадратных скобках в правых частях (4.4), согласно методу проекции градиента, будем выбирать допустимые направления, которые удовлетворяют условиям

$$\delta I_m = I_m'(v)\delta v^n = -\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j} M\left(\frac{\partial R^{jm}}{\partial u_\rho}\right)\delta u_\rho^n(t)\,dt + \tag{4.5}$$

$$+\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{j=1}^{k} M\left(\frac{\partial f_m^j}{\partial a_i} - \int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\partial R^{jm}}{\partial a_i}\,dt\right)\delta a_i^n +$$

$$+\sum_{j=1}^{k} M\left((\lambda_t^{jm} - \lambda_t^{j-1,\,m})\,|_{t=t_j} + \frac{\partial f_m^j}{\partial t_j}\right)\delta t^n_j = 0 \quad (m = 1, \ldots, q)$$

$$\psi_m'(u)\,\delta u^n(t) = \sum_{\rho=1}^{r}\frac{\partial \psi_m}{\partial u_\rho}\,\delta u_\rho^n(t) = 0 \quad (m = 1, \ldots, k_0)$$

$$g_m'(a)\,\delta a^n = \sum_{i=1}^{m_0}\frac{\partial g_m}{\partial a_i}\,\delta a_i^n = 0 \quad (m = 1, \ldots, q_0)$$

Подставляя $\delta u_\rho^n(t)$, δa_i^n, δt_j^n, определяемые выражениями в квадратных скобках (4.4) в (4.5), получим замкнутую систему линейных уравнений относительно неизвестных множителей Лагранжа α_s, $\mu_s(t)$, β_s. Так как $u(t)$ для каждого t имеет бесконечное множество значений, то совершенно очевидно, что система (4.5) имеет бесконечное число уравнений. Поэтому для преодоления этой трудности [8] интервал времени $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, \ldots, k)$ покрывается счетной сеткой с шагом τ, узлы сетки $t_\nu = \nu\tau$ $(\nu = 1, \ldots, N;\ t_j = N\tau;\ \nu \neq j)$ и улучшения управляющей функции с требуемой степенью точности производятся при каждом фиксированном $t_\nu \in [t_{j-1}, t_j]$.

Итерационный процесс поиска оптимального управления сводится, таким образом, к следующему:

$$u_\rho^{n+1}(t_\nu) = u_\rho^n(t_\nu) + h^n\,[ML_{u_\rho} R^{js} - L^{u_\rho}\psi_s]_{t=t_\nu} \quad (\rho = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, k;\ \nu = 1, \ldots, N) \tag{4.6}$$

$$a_i^{n+1} = a_i^n - h^n\Big[\sum_{j=1}^{k} M\,(L_{a_i}(f_s^j - \tau R^{js}\,|_{t=t_\nu})) + L^{a_i}g_s\Big]$$
$$(i = 1, \ldots, m_0)$$

$$t_j^{n+1} = t_j^n - h^n\,[ML_t\,(\lambda^{js} - \lambda^{j-1,\,s})\,|_{t=t_j} + L_{t_j}f_s^j] \quad (j = 1, \ldots, k)$$

Частные производные в правых частях (4.6) для заданных $u_\rho^n(t)$, a_i^n, t_j^n вычисляются в каждой фиксированной точке цилиндра $\Omega \times [t_0, t_k]$ на траекториях (1.4) и (4.2). Множители α_s, $\mu_s(t)$, β_s определяются решением невырожденной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{q}\alpha_s B_{ms} + \sum_{s=q+1}^{q+k_0}\sum_{\nu=1}^{N}\mu_s(t_\nu)\,B_{ms} + \sum_{s=q+k_0+1}^{q+k_0+q_0}\beta_s B_{ms} = B_{m0} \tag{4.7}$$
$$(m = 1, \ldots, q)$$

$$\sum_{s=1}^{q}\alpha_s C_{ms} + \sum_{s=q+1}^{q+k_0}\mu_s(t_\nu)\,C_{ms} = C_{m0} \quad (m = 1, \ldots, k_0)$$

$$\sum_{s=1}^{q}\alpha_s D_{ms} + \sum_{s=q+k_0+1}^{q+k_0+q_0}\beta_s D_{ms} = D_{m0} \quad (m = 1, \ldots, q_0)$$

Коэффициенты при неизвестных α_s, $\beta_s(t)$, λ_s определяются выражениями

$$B_{ms} = \begin{cases} (-1)^l \sum\limits_{i=1}^{m_0} A_{im}A_{is} + \sum\limits_{j=1}^{k} Q_{jm}Q_{js} - \sum\limits_{\nu=1}^{N} U_{\nu ms}, \\ s = \begin{cases} 1, \ldots, q; & l = 0 \\ 0; & l = 1 \end{cases} \\ U_{\nu ms}, \quad s = q+1, \ldots, q+k_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{m_0} A_{im} \dfrac{\partial g_s}{\partial a_i}, \quad s = q+k_0+1, \ldots, q+k_0+q_0 \end{cases}$$

$$C_{ms} = \begin{cases} (-1)^l \sum\limits_{\rho=1}^{r} M\left(\dfrac{\partial \psi_m}{\partial u_\rho} \dfrac{\partial R^{js}}{\partial u_\rho}\right), & s = \begin{cases} 1, \ldots, q, & l = 0 \\ 0, & l = 1 \end{cases} \\ \sum\limits_{\rho=1}^{r} \left(\dfrac{\partial \psi_m}{\partial u_\rho} \dfrac{\partial \psi_s}{\partial u_\rho}\right), & s = q+1, \ldots, q+k_0 \end{cases}$$

$$D_{ms}^{m} = \begin{cases} (-1)^l \sum\limits_{i=1}^{m_0} \dfrac{\partial g_m}{\partial a_i} A_{is}, & s = \begin{cases} 1, \ldots, q; & l = 0 \\ 0, & l = 1 \end{cases} \\ \sum\limits_{i=1}^{m_0} \dfrac{\partial g_m}{\partial a_i} \dfrac{\partial g_s}{\partial a_i}, & s = q+k_0+1, \ldots, q+k_0+q_0 \end{cases}$$

$$A_{im} = \sum_{j=1}^{k} M\left(\frac{\partial f_m^{\,j}}{\partial a_i} - \tau \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial R^{jm}}{\partial a_i}\Big|_{t=t_\nu}\right), \quad A_{is} = A_{im}|_{m=s}$$

$$Q_{jm} = M\left((\lambda_t^{jm} - \lambda_t^{j-1,\,m})|_{t=t_j} + \frac{\partial f_m^{\,j}}{\partial t_j}\right), \quad Q_{js} = Q_{jm}|_{m=s}$$

$$U_{\nu ms} = \tau \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} M\left(\frac{\partial R^{jm}}{\partial u_\rho} \frac{\partial R^{js}}{\partial u_\rho}\right)\Big|_{t=t_\nu}$$

Отметим, что в качестве исходного приближения $u_\rho^\circ(t)$, a_i°, t_j° для стохастической задачи можно взять оптимальное управление, найденное для детерминированной задачи, которая формулируется в предположении, что шумы на систему не действуют, т. е. $\sigma_{i\nu}^{j}(t, X) = 0$.

Используя конструкции доказательства [9], при некоторых дополнительных предположениях можно показать, что процесс (4.6) сходится к оптимальному решению.

Запишем итерационный градиентный процесс (4.6) в общем виде

$$v^{n+1} = v^n - h^n F_v'(v^n, \eta^n) \tag{4.8}$$

где $\eta^n = (\alpha^n, \mu^n(t), \beta^n)$ удовлетворяют невырожденной системе линейных уравнений (4.7).

Теорема 2. Если функционал $F(v, \eta)$ ограничен снизу по v и градиент $F_v'(v, \eta)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной M_0, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \leqslant h^n \leqslant 2(M_0 + 2\varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 > 0$, то для последовательности (4.8) справедливы утверждения:

1°. Функционал $F_v'(v^n, \eta^n)$ монотонно убывает по v и $\lim \|v^{n+1} - v^n\| = 0$, $n \to \infty$.

2°. $\lim F_v'(v^n, \eta^n) = 0$, $n \to \infty$.

3°. Если функционал $F(v, \eta)$ выпуклый по v, то

$$\lim F(v^n, \eta^n) = F(v^*, \eta) = \inf_v F(v, \eta), \quad n \to \infty$$

5. **Пример.** Рассмотрим задачу поиска оптимального управления системы (3.1), которая обеспечивает минимум функционала

$$I_0(u) = M[X_1(t_2)]$$

при ограничении

$$I_1(u) = M[X_2(t_2) - c_2] = 0$$

В соответствии с изложенным методом поиск оптимального управления (u^*, t_1^*) определяется следующей итерационной процедурой:

$$u^{n+1}(t_\nu) = u^n(t_\nu) - h^n M\left(\frac{\partial R^{10}}{\partial u} + \alpha\frac{\partial R^{11}}{\partial u}\right)\Big|_{t=t_\nu}, \quad t_\nu \in [0, t_1] \tag{5.1}$$

$$u^{n+1}(t_\nu) = u^n(t_\nu) - h^n M\left(\frac{\partial R^{20}}{\partial u} + \alpha\frac{\partial R^{21}}{\partial u}\right)\Big|_{t=t_\nu}, \quad t_\nu \in [t_1, t_2]$$

$$t_1^{n+1} = t_1^n + h^n M[(\lambda_t^{10})|_{t=t_1^n} + \alpha(\lambda_t^{11})|_{t=t_1^n}]$$

$$\alpha = \left\{\tau\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{j=1}^{2} M\left(\frac{\partial R^{j1}}{\partial u}\frac{\partial R^{j0}}{\partial u}\right)_{t=t_\nu} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{2} M(\lambda_t^{j1} - \lambda_t^{j-1,1})(\lambda_t^{j0} - \lambda_t^{j-1,0})|_{t=t_1^n}\right\} \times$$

$$\times \left\{\sum_{j=1}^{2} M(\lambda_t^{j1} - \lambda_t^{j-1,1})^2|_{t=t_1^n} - \tau\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{j=1}^{2} M\left(\frac{\partial R^{j1}}{\partial u}\right)^2\Big|_{t=t_\nu}\right\}^{-1}$$

Выражения в правых частях (5.1) определяются на n-х решениях уравнений

$$L^- p = 0; \quad p(t, X)|_{t=t_0} = p(t_0, X), \quad t \in [0, t_1] \tag{5.2}$$

$$p(t, X)|_{t=t_1} = p(t_1, X), \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$L^+\lambda^{20} = 0, \quad L^+\lambda^{21} = 0, \quad \lambda^{20}(t_2) = -X_1(t_2)$$

$$t \in [t_2, t_1]; \quad \lambda^{21}(t_2)_- = -[X_2(t_2) - c_2]$$

$$L^+\lambda^{10} = 0, \quad L^+\lambda^{11} = 0, \quad \lambda^{10}(t_1)_- = \lambda^{10}(t_1)_+; \quad \lambda^{11}(t_1)_- = \lambda^{11}(t_1)_+$$

$$t \in [t_1, 0]$$

$$L^\pm = \frac{\partial}{\partial t} + X_2\frac{\partial}{\partial X_1} + u\frac{\partial}{\partial X_2} \pm \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_2}$$

Выражения для R^{j0} и R^{j1} $(j = 1, 2)$ имеют вид

$$R^{j0} = X_2\frac{\partial \lambda^{j0}}{\partial X_1} + u\frac{\partial \lambda^{i0}}{\partial X_2}, \quad R^{j1} = X_2\frac{\partial \lambda^{j1}}{\partial X_1} + u\frac{\partial \lambda^{j1}}{\partial X_2}$$

6. **Доказательство теоремы 1.** Для доказательства условий оптимальности воспользуемся принципом Лагранжа [9]. Определим для задачи минимизации функционала $I_0(v)$ при дифференциальной связи (1.4) и ограничении (1.3) функционал Лагранжа в виде (4.1). Пусть $v^* = (u^*, a^*, T^*)$ — оптимальное управление. Рассмотрим управление $v = (u, a, T)$:

$$u(t) = u^*(t) + \Delta u(t),$$

$$a = a^* = \varepsilon\delta a, \quad T = T^* + \varepsilon\delta T$$

$$\Delta u\,(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta u\,(t), & t \in [t_0, t_k] \setminus U_i y_i \\ \omega - u^*, & t \in y_i \end{cases}$$

Здесь y_i $(i = 1, \ldots, k)$ — полуинтервал [10], на котором происходит «игольчатое» варьирование $\delta u = \omega_i - u^*$, определенное на $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_i + \varepsilon l_i$.

Ввиду непрерывной дифференцируемости функций $\varphi_i^j\,(t, X, u, a), \delta_{i\nu}^j$ (t, X) по t, X, u, a решение (1.4) с начальным $p\,(t_0, X)$ при фиксированных $\Delta u\,(t)$, δa, δT будет непрерывно дифференцируемо по ε. Обозначим это решение через $p_\varepsilon\,(t, X_\varepsilon, \Delta u, \delta a, \delta T)$ и определим вариацию

$$\delta p = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{p_\varepsilon - p}{\varepsilon} = \left.\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

содержательный смысл которой состоит в том, что при $\varepsilon \to 0$ выражение $\varepsilon\delta p$ является главной линейной частью $p + \varepsilon\delta p$ возникающего вследствие варьирования управления.

Так как $v^* = (u^*, a^*, T^*)$ — оптимальное управление, то необходимо, чтобы первая вариация функционала Лагранжа была неотрицательна

(6.1)
$$\delta F\,(v, \eta) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F\,(v^* + \varepsilon\delta v, \eta) =$$
$$= \sum_{s=0}^{q} \alpha_s \sum_{j=1}^{k} \left[\int_\Omega f_s^j \delta p\, dX + M\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial t_j}\right)\delta t_j + M\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial a}\right)\delta a\right] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}^*}^{t_j^*} \mu_s(t) \frac{\partial \psi_s}{\partial u}\, \delta u\, dt + \sum_{s=1}^{q_0} \beta_s \frac{\partial g_s}{\partial a}\, \delta a \geqslant 0$$

Определим первую производную (6.1). Из (1.4) получим

(6.2)
$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}[p_\varepsilon - p] = \Phi^i\,(t, p_\varepsilon, u^* + \Delta u, a^* + \varepsilon\delta a) - \Phi^i\,(t, p, u^*, a^*)$$

Умножая обе части (6.2) на неопределенную случайную функцию $\lambda\,(t, X) \not\equiv 0$ и беря интеграл по цилиндру $\Omega \times [t_0^*, t_k^*]$ с учетом того, что $u = u^* + \Delta u = \omega$ при $t \in [\tau, \tau + \varepsilon l]$, после деления на ε и перехода к пределу с учетом теоремы о конечных приращениях, получим

(6.3)
$$\sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}^*}^{t_j^*} \int_\Omega \lambda \frac{\partial(\delta p)}{\partial t}\, dX\, dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}^*}^{t_j^*} \int_\Omega \lambda \left[\frac{\partial \Phi^j}{\partial p}\delta p + \frac{\partial \Phi^j}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \Phi^j}{\partial a}\delta a\right] dX\, dt +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega [\Phi^j\,(t, p, \omega, a^*) - \Phi^j\,(t, p, \omega^*, a^*)]\,|_{t=\tau}\, l\, dX + O\,(\varepsilon)$$

Не ограничивая общности результатов, будем рассматривать одну игольчатую вариацию, так как вследствие свойств аддитивности, присущих (6.3), влияние нескольких игольчатых вариаций, возникших в различных бесконечно малых интервалах времени, можно рассматривать независимо друг от друга. Интегрируя по частям левую часть (6.3) и расписывая выражения в правой части с учетом (2.1) и (2.3) и преобразования интегралов [4], получим

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega}[\lambda(t_j^*,X)\,\delta p(t_j^*,X)-\lambda(t_{j-1}^*,X)\,\delta p(t_{j-1}^*,X)]\,dX= \tag{6.4}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}^*}^{t_j^*}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial R^j}{\partial u}\delta u+\frac{\partial R^j}{\partial a}\delta a\right]p\,dX\,dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega}[R^j(t,X,\omega,a^*,\lambda)-R^j(t,X,u^*,a^*,\lambda)]\,|_{t=\tau}\,lp\,dX+O(\varepsilon)$$

Определим вариации $\delta p\ (t_j^*,\ X)$, $\delta p\ (t_{j-1}^*,\ X)$. Переходя к интегральной форме (1.4) в силу доопределения $u\ (t)$ за пределы $[t_{j-1}^*,\ t_j^*]$, на достаточно малом $[t_j^*,\ t_j]$ имеет место

$$p(t_j^*,x)=p(t_j,X)-\int_{t_j^*}^{t_j}p_t\,dt,\quad t_j=t_j^*+\varepsilon\delta t_j \tag{6.5}$$

Используя теорему о конечных приращениях и принимая во внимание, что $\delta p_j=p\ (t_j,\ X)-p\ (t_j^*,X^*)$, $\delta p\ (t_j^*,\ X)=p\ (t_j^*,\ X)-p\ (t_j^*,\ X^*)$, получим из (6.5)

$$\delta p\ (t_j^*,\ X)=\delta p_j-(p_t\,|_{t=t_j^*})\,\delta t_j+O\ (\varepsilon) \tag{6.6}$$

Аналогично получаем

$$\delta p\ (t_{j-1}^*,X)=\delta p_{j-1}-(p_t\,|_{t=t_{j-1}^*})\delta t_{j-1}+O\ (\varepsilon) \tag{6.7}$$

Подставляя (6.6) и (6.7) в (6.4), найдем

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}[\lambda(t_j^*,X)_- -\lambda(t_j^*,X)_+]\,\delta p_j+\lambda(t_k^*,X)\,\delta p_k+\right. \tag{6.8}$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{k}(\lambda_t^j-\lambda_t^{j-1})_{t=t_j^*}p\delta t_j\right\}dX=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\int_{t_{j-1}^*}^{t_j^*}\int_{\Omega}\left[\frac{\partial R^j}{\partial u}\delta u+\frac{\partial R^j}{\partial a}\delta a\right]p\,dX\,dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega}[R^j(t,X,\omega,a^*,\lambda)-R^j(t,X,\omega^*,a^*,\lambda)]\,|_{t=\tau}lp\,dx+O(\varepsilon)$$

Определим в (6.8) случайные функции $\lambda^s(t, X)$, R^{js} (t, X, u, a, λ) соотношениями (4.2) и (4.3). Принимая во внимание (6.8), из (6.1) получим

$$(6.9)\qquad \delta F(v, \eta) = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{t_{j-1}^*}^{t_j^*} \left[-\sum_{s=0}^{q} \alpha_s M\left(\frac{\partial R^{js}}{\partial u}\right) + \sum_{s=1}^{k_0} \mu_s(t) \frac{\partial \psi_s}{\partial u} \right] \delta u\, dt +$$

$$+ \left[\sum_{s=0}^{q} \alpha_s \sum_{j=1}^{k} M\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial a} - \int\limits_{t_{j-1}^*}^{t_j^*} \frac{\partial R^{js}}{\partial a} dt\right) + \sum_{s=1}^{q_0} \beta_s \frac{\partial g_s}{\partial a} \right] \delta a +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{q} \alpha_s M\left[(\lambda_t^{js} - \lambda_t^{j-1, s})\big|_{t=t_j^*} + \frac{\partial f_s^j}{\partial t_j} \right] \delta t_j -$$

$$- \sum_{s=0}^{q} \alpha_s \sum_{j=1}^{k} M\left[R^{js}(t, X, \omega, a^*, \lambda) - R^{js}(t, X, u^*, a^*, \lambda) \right]\big|_{t=\tau} l \geqslant 0$$

А это значит, что при любом выборе вариаций δu, δa, δT в точке $\sigma^* = (u^*, a^*, T^*)$ должны выполняться следующие необходимые условия оптимальности:

$$(6.10)\qquad M\left(\frac{\partial R^j}{\partial u}\right) - \sum_{s=1}^{k_0} \mu_s(t) \frac{\partial \psi_s}{\partial u} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{s=0}^{q} \alpha_s M\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial a}\right) - \int\limits_{t_{j-1}^*}^{t_j^*} M\left(\frac{\partial R^j}{\partial a}\right) dt \right) + \sum_{s=1}^{q_0} \beta_s \frac{\partial g_s}{\partial a} = 0$$

$$M(\lambda_t^j - \lambda_t^{j-1})\big|_{t=t_j^*} + \sum_{s=0}^{q} \alpha_s M\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial t_j}\right) = 0$$

$$M\left[R^j(t, X, \omega, a^*, \lambda) - R^j(t, X, u^*, a^*, \lambda)\right]\big|_{t=\tau} \leqslant 0$$

Поскольку последнее неравенство в (6.10) справедливо для любого $\omega \in U$, то

$$M\left[R^j(t, X, u^*, a^*, \lambda)\right] = \max_{\omega \in U} M\left[R^j(t, X, \omega, a^*, \lambda)\right]$$

откуда следует утверждение а) теоремы 1. Условия (6.10) совпадают с условиями б) теоремы 1 и ее следствием (2.5).

7. **Доказательство теоремы 2.** Из условий непрерывности $F_v'(v, \cdot)$

$$F(v^{n+1}, \cdot) - F(v^n, \cdot) = -h^n \int_0^1 F_v'(v^n - th^n F_v'(v^n, \cdot), \cdot) \times$$

$$\times F_v'(v^n, \cdot)\, dt = -h^n \int_0^1 [F_v'(v^n, \cdot) - F_v'(v^n, \cdot) +$$

$$+ F_v'(v^n - th^n F_v'(v^n, \cdot), \cdot)] F_v'(v^n, \cdot)\, dt \leqslant -h^n \| F_v'(v^n, \cdot) \|^2 +$$

$$+ (h^n)^2 \| F_v'(v^n, \cdot) \|^2 M \int_0^1 t\, dt = \left(\frac{(h^n)^2 M}{2} - h^n \right) \| F_v'(v^n, \cdot) \|^2 =$$

$$= \left(\frac{M}{2} - \frac{1}{h^n} \right) \| v^{n+1} - v^n \|^2 \leqslant -\varepsilon_2 \| v^{n+1} - v^n \|^2 \leqslant 0$$

Итак, $F(v^n, \cdot)$ монотонно убывают по v. Так как функционал $F(v, \cdot)$ ограничен по v, то $\lim\limits_{n\to\infty} F(v^n, \cdot)$ существует, поэтому

$$\| v^{n+1} - v^n \|^2 \leqslant [F(v^n, \cdot) - F(v^{n+1}, \cdot)] / \varepsilon_2 \to 0$$

$$\| F_v'(v^n, \cdot) \|^2 \leqslant \frac{F(v^n, \cdot) - F(v^{n+1}, \cdot)}{(h^n)^2 (1/h^n - M/2)} \leqslant \frac{F(v^n, \cdot) - F(v^{n+1}, \cdot)}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2} \to 0$$

при $n \to \infty$. Первые два утверждения доказаны.

Если функционал $F(v, \cdot)$ выпуклый по v, то

$$0 \leqslant F(v^n, \cdot) - F(v^*, \cdot) \leqslant F_v'(v^n, \cdot)(v^n - v^*) \leqslant$$

$$\leqslant \| F_v'(v^n, \cdot) \| \, \| v^{n+1} - v^n \| + \frac{1}{h^n} \| v^{n+1} - v^n \| \, \| v^* - v^{n-1} \| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\| F_v'(v^n, \cdot) \| + \frac{1}{\varepsilon_1} \| v^* - v^{n+1} \| \right) \| v^{n+1} - v^n \|$$

Так как выражение в скобках ограничено, а $\| v^{n+1} - v^n \| \to 0$ по доказанному, то $F(v^n, \cdot) \to F(v^*, \cdot)$ при $n \to \infty$ и теорема доказана.

Поступила 3 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движения. М., «Наука», 1968.
2. *Кожевников Ю. В.* О принципе оптимальности в среднем для разрывных стохастических систем. Автоматика и телемеханика, 1966, № 10.
3. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
4. *Розенберг Г. С.* Достаточные условия оптимальности динамических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Автоматика и телемеханика, 1970, № 12.
5. *Красовский А. А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М., «Наука», 1974.
6. *Мерклингер К. Дж.* Численный анализ нелинейных систем управления с помощью уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Тр. II Междунар. федерации по автоматическому управлению. Базель, 1963. М., «Наука», 1965.
7. *Будак Б. М.*, *Беркович Е. М.* Об аппроксимации экстремальных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 2, №,3.
8. *Левитин Е. С.*, *Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5.
9. *Иоффе А. Д.*, *Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.
10. *Понтрягин Л. С.*, *Болтянский В. Г.*, *Гамкрелидзе Р. В.*, *Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.