Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531.011

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИДЕАЛЬНЫМИ ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

В. Ф. Журавлев

(Москва)

Приводится вывод дифференциальных уравнений движения типа Рауса для систем с односторонними связями. Вывод основан на специальном приеме исключения связей при помощи негладких необратимых замен обобщенных координат. Полученные уравнения определены на бесконечном интервале времени и избавляют от необходимости применять метод припасовывания, обычно используемый при анализе таких систем. Приводятся примеры решения задач предложенным методом.

Рассмотрим механическую систему следующего вида:

$$L(t, q, q^{\cdot}),\ Q(t, q, q^{\cdot}),\ f(t, q) \geqslant 0,\quad q, Q \in R^h \tag{1}$$

где L — лагранжиан, Q — обобщенная сила, f — без ограничения общности скалярная функция, выражающая собой одностороннюю связь.

Если в этой системе осуществить замену переменных, перейдя к новым обобщенным координатам, то уравнение связи в новых координатах изменится. Можно поставить целью найти такую замену, чтобы ограничения на новые переменные исчезли. Однако, вообще говоря, после такой замены уравнения движения будут содержать особенности, а решения не будут обладать свойством бесконечной продолжаемости вправо.

Поставим задачу: найти такую замену переменных и такую дескриптивную функцию системы, чтобы в новых переменных ограничения на них исчезли, а дифференциальные уравнения, полученные в силу дескриптивной функции, не содержали бы особенностей и определяли решения на бесконечном интервале времени. (Дескриптивной функцией называется скалярная функция времени и фазовых координат, позволяющая построить уравнения движения; примерами дескриптивных функций служат: функция Лагранжа, Гамильтона, Рауса, Гиббса и др.)

Если функция $f(t, q)$ гладкая, то существует гладкая замена переменных $q \to r$, такая, что неравенство, выражающее связь, может быть приведено к виду $r_1 \geqslant 0$ (примером такой замены может служить преобразование: $r_1 = f(t, q)$, $r_2 = q_2, \ldots, r_n = q_n$. Здесь r_i, q_i — компоненты векторов r и q соответственно). Очевидно, на преобразования такого типа необходимо дополнительно накладывать условия их невырожденности в той области изменения переменных, в которой рассматривается движение.

Будем считать, что в системе (1) уже имеем дело именно с такой связью. Выделим компоненту вектора q, входящую в неравенство, определяющее связь, введя для нее специальное обозначение $q_1 = s$. Введем также обозначения для оставшихся компонент $(q_2, \ldots, q_n)' = y$. Штрих здесь и везде далее означает транспонирование (все векторы понимаются как векторы-столбцы).

С учетом новых обозначений систему (1) перепишем в виде

$$L(t, s, y, s^{\cdot}, y^{\cdot}),\ S(t, s, y, s^{\cdot}, y^{\cdot}),\ Y(t, s, y, s^{\cdot}, y^{\cdot}),\ s \geqslant 0,\ s \in R^1,\ y \in R^{n-1} \tag{2}$$

Здесь S и Y — обобщенные силы, соответствующие координатам s и y. Лагранжиан системы L можно считать не содержащим линейной формы обобщенных скоростей, если все силы, имеющие обобщенный потенциал, включить в обобщенные силы. В этом случае он может быть представлен в виде

$$L = \frac{1}{2} \| s^{\cdot}, y^{\cdot\prime} \| T \left\| \begin{matrix} s^{\cdot} \\ y^{\cdot} \end{matrix} \right\| + U(t, s, y) \tag{3}$$

Здесь $T = T(t, s, y)$ — матрица кинетической энергии, U — силовая функция.

Матрицу T представим разбитой на блоки следующим образом:

$$T = \left\| \begin{matrix} a & b' \\ b & A^{-1} \end{matrix} \right\|, \quad \begin{matrix} a = T_{11}, & b' = \| T_{12}, \ldots, T_{1n} \| \\ A^{-1} = \{T_{ij}\}, & i, j = 2, \ldots, n \end{matrix} \tag{4}$$

Имея в виду эти обозначения, перепишем выражение для лагранжиана в следующей форме:

$$L = {}^1/_2\, (as^{\cdot 2} + 2s^{\cdot}b'y^{\cdot} + y^{\cdot\prime}A^{-1}y^{\cdot}) + U(t, s, y) \tag{5}$$

Введем в рассмотрение функцию Рауса, заменив обобщенные скорости $y^{\cdot}$ на соответствующие обобщенные импульсы. Дифференцируя (5) выразим $y^{\cdot}$. Получим

$$p = \partial L / \partial y^{\cdot} = s^{\cdot}b + A^{-1}y^{\cdot}, \quad y^{\cdot} = A(p - s^{\cdot}b) \tag{6}$$

Запишем функцию Рауса, выражая $y^{\cdot}$ при помощи (6)

$$R^* = L(t, s, y, s^{\cdot}, y^{\cdot}) - p'y^{\cdot} = {}^1/_2\, (a - b'Ab)\, s^{\cdot 2} - {}^1/_2\, p'Ap + s^{\cdot}p'Ab + U(t, s, y) \tag{7}$$

Осуществим теперь негладкую замену

$$s = |x| \tag{8}$$

Неоднозначный характер обратного отображения к (8) ни к каким затруднениям в дальнейшем не приводит, поскольку строить обратное отображение нигде не требуется. Написанная замена автоматически удовлетворяет уравнению связи в (2) при любых x.

Функция Рауса (7) с учетом этой замены принимает вид

$$R(t, x, y, x^{\cdot}, p) = R^*(t, |x|, y, x^{\cdot}\operatorname{sgn} x, p) = R_0 + x^{\cdot}p'Ab \operatorname{sgn} x \tag{9}$$

$$R_0 = {}^1/_2\, (a - b'Ab)x^{\cdot 2} - {}^1/_2\, p'Ap + U(t, |x|, y)$$

При дифференцировании s по времени в силу (8) значение производной от $|x|$ в нуле доопределено в соответствии с выражением $s^{\cdot} = x^{\cdot} \operatorname{sgn} x$.

Обобщенная сила X, соответствующая новой обобщенной координате x, находится из уравнения баланса мощностей $Xx^{\cdot} = Ss^{\cdot} = Sx^{\cdot} \operatorname{sgn} x$, откуда $X = S \operatorname{sgn} x$.

Поскольку для системы в новой переменной связь исключена, то уравнения движения на основе функции Рауса получаются как уравнения Лагранжа по переменной x и уравнения Гамильтона по переменным y, p. Замечательное свойство функции Рауса (9) состоит в том, что, несмотря на негладкий характер замены (8), уравнения движения, определяемые этой функцией, не содержат сингулярностей типа дельта-функций. Другие дескриптивные функции (функция Лагранжа, функция Гамильтона) этим свойством не обладают, и для них замена (8) к успеху не приводит.

Запишем уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial x} = X; \qquad y^{\cdot} = -\frac{\partial R}{\partial p}, \qquad p^{\cdot} = \frac{\partial R}{\partial y} + Y$$

В силу (9) имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial R_0}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial R_0}{\partial x} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial}{\partial x}\right) x^{\cdot} p' Ab \operatorname{sgn} x$$

В этом соотношении вычислим отдельно последний член, дифференцируя $x^{\cdot} p' Ab \operatorname{sgn} x$ как обобщенную функцию

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial}{\partial x}\right) x^{\cdot} p' Ab \operatorname{sgn} x = \frac{d}{dt}(p'Ab) \operatorname{sgn} x - x^{\cdot} p' \frac{\partial}{\partial x}(Ab) \operatorname{sgn} x$$

Члены, которые могли привести к сингулярностям типа дельта-функций, сократились. При этом было использовано правило дифференцирования сложной обобщенной функции $d \operatorname{sgn} x/dt = x^{\cdot} d \operatorname{sgn} x/dx$, которое имеет место, если $x^{\cdot}(t)$ — непрерывная функция.

Непрерывность $x^{\cdot}(t)$ не противоречит выписываемым ниже уравнениям движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_0}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial R_0}{\partial x} = \left[S - \frac{d}{dt}(p'Ab) + x^{\cdot} p' \frac{\partial}{\partial x}(Ab)\right] \operatorname{sgn} x \tag{10}$$

$$y^{\cdot} = -\frac{\partial R_0}{\partial p} - x^{\cdot} Ab \operatorname{sgn} x, \qquad p^{\cdot} = \frac{\partial R_0}{\partial y} + x^{\cdot} \frac{\partial}{\partial y}(p'Ab) \operatorname{sgn} x + Y$$

Это и есть искомые уравнения движения рассматриваемой системы с идеальной односторонней связью. Они содержат лишь разрывы первого рода, определяют решения на бесконечном интервале времени, отражая как явления выхода на связь, так и движение по связи и сход с нее.

Анализируя выход решения на связь (поверхность разрыва правых частей системы (10)), будем различать два случая: а) при $x = 0$ скорость $x^{\cdot} \neq 0$, б) при $x = 0$ и $x^{\cdot} = 0$. В первом случае в системе при выходе на связь возникает удар, все обобщенные скорости $s^{\cdot}$, $y^{\cdot}$ в момент удара терпят разрыв. При этом, однако, имеют место следующие свойства движений системы (2).

1°. В момент удара все обобщенные импульсы, соответствующие координатам, на которые не наложена связь (импульсы p), непрерывны. Это непосредственно видно из последнего уравнения системы (10). Такое свойство было впервые установлено Аппелем [1].

2°. Квадрат скорости переменной, на которую наложена связь, в момент удара разрыва не терпит.

Действительно, в силу первого уравнения (10) $x^\cdot$ — непрерывная функция времени. Тогда из $s^\cdot = x^\cdot \operatorname{sgn} x$ следует $s^{\cdot 2} = x^{\cdot 2}$ — также непрерывная функция.

3°. Кинетическая энергия системы в момент удара разрыва не терпит.

Для доказательства обозначим через $s_-^\cdot$, $y_-^\cdot$, T_- значения скоростей и кинетической энергии до удара и $s_+^\cdot$, $y_+^\cdot$, T_+ — после удара. Тогда из (5) имеем

$$T_+ = {}^1/_2\,(as_+^{\cdot 2} + 2s_+^\cdot b'y_+^\cdot + y_+^{\cdot\prime} A^{-1}y_+^\cdot) \tag{11}$$

В соответствии со свойствами 1° и 2° получим

$$s_+^\cdot b + A^{-1}y_+^\cdot = s_-^\cdot b + A^{-1}y_-^\cdot, \quad s_+^\cdot = -s_-^\cdot$$

откуда

$$y_+^\cdot = 2s_-^\cdot Ab + y_-^\cdot \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$T_+ = {}^1/_2\,[as_-^{\cdot 2} - 2s_-^\cdot b'\,(2s_-^\cdot Ab + y_-^\cdot) + (2s_-^\cdot Ab + y_-^\cdot)'A^{-1} \times$$
$$\times\,(2s_-^\cdot Ab + y_-^\cdot)] = {}^1/_2\,(as_-^{\cdot 2} + 2s_-^\cdot b'y_-^\cdot + y_-^{\cdot\prime}Ay_-^\cdot) = T_-$$

В случае, когда при $x = 0$ и $x^\cdot = 0$, система выходит на связь без удара. В дальнейшем в течение некоторого времени возможно движение по связи. При этом лагранжева часть системы автоматически удовлетворяется значением $x = 0$, а гамильтонова часть описывает движение по связи.

Это движение будет происходить до тех пор, пока выполнено неравенство

$$\frac{d}{dt}(p'Ab) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(p'Ap) - S - \frac{\partial U}{\partial s} \geqslant 0 \tag{13}$$

Левая часть этого неравенства представляет собой все те члены в первом уравнении системы (10), которые не зависят от скорости $x^\cdot$. В уравнении перед этими членами стоит множитель $\operatorname{sgn} x$. Если неравенство (13) выполнено, то его левая часть представляет собой реакцию связи. Как только это неравенство нарушается, система покидает связь.

Необходимо отметить, что для движений, первоначально осуществлявшихся вдоль связи, для которых в какой-то момент времени неравенство (13) меняется на противоположное, помимо решения системы (10), соответствующего истинному движению, имеется также и решение, для которого $x = 0$ для всех t. Эта неединственность решений для некоторых начальных условий является естественным следствием вырожденности замены $s = |x|$ при $x = 0$. Определение решения кусочно-непрерывных систем, а также теоремы о существовании и единственности даны в [2].

В качестве примера составления уравнений (10) рассмотрим математический маятник с односторонней связью (фиг. 1), т. е. маятник в виде груза, висящего на нерастяжимой нити. Его движение будем описывать в полярных координатах (r, y), где через y обозначен угол. На величину расстояния материальной точки до центра подвеса наложена связь $r \leqslant R$. Вводя обозначение $s = R - r$, получим следующую систему в форме (2):

$$L = 1/2m\,[s^{\cdot 2} + (R - s)^2 y^{\cdot 2}] + mg\,(R - s)\cos y,\ s \geqslant 0$$

Отсюда в соответствии с (4) и (9) имеем

$$a = m,\ b = 0,\ A^{-1} = m\,(R - s)^2$$

$$R_0 = 1/2mx^{\cdot 2} - p^2\,(2m)^{-1}\,(R - |x|)^{-2} + mg\,(R - |x|)\cos y$$

После этого уравнения (10) для маятника получаются в виде

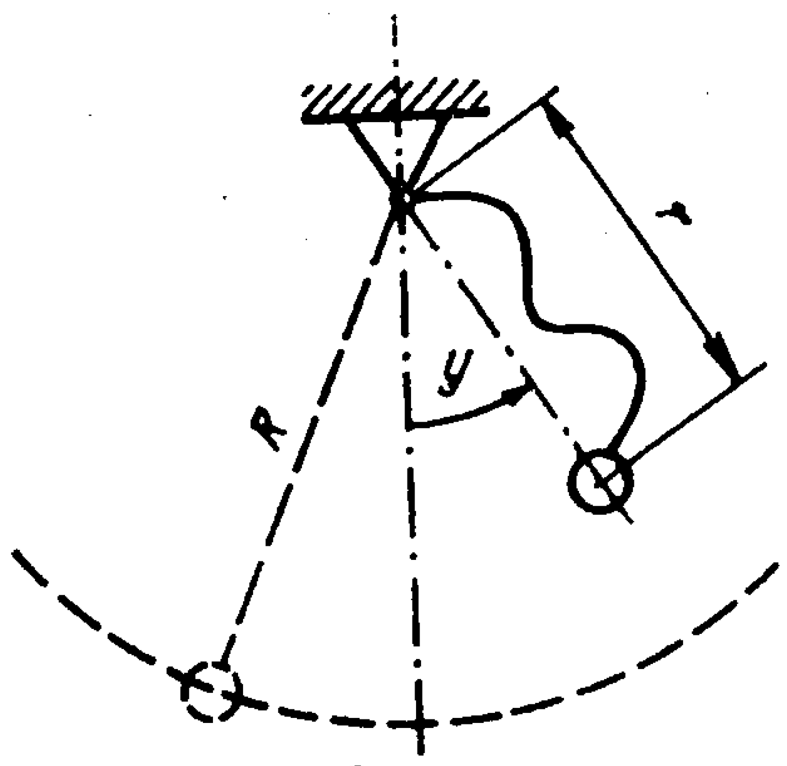
$$mx^{\cdot\cdot} + G\,(x,\ y,\ p)\operatorname{sgn} x = 0,\ G\,(x,\ y,\ p) = p^2 m^{-1}\,(R - |x|)^{-3} + mg\cos y \tag{14}$$

$$y^{\cdot} = pm^{-1}\,(R - |x|)^{-2},\ p^{\cdot} = -mg\,(R - |x|)\sin y$$

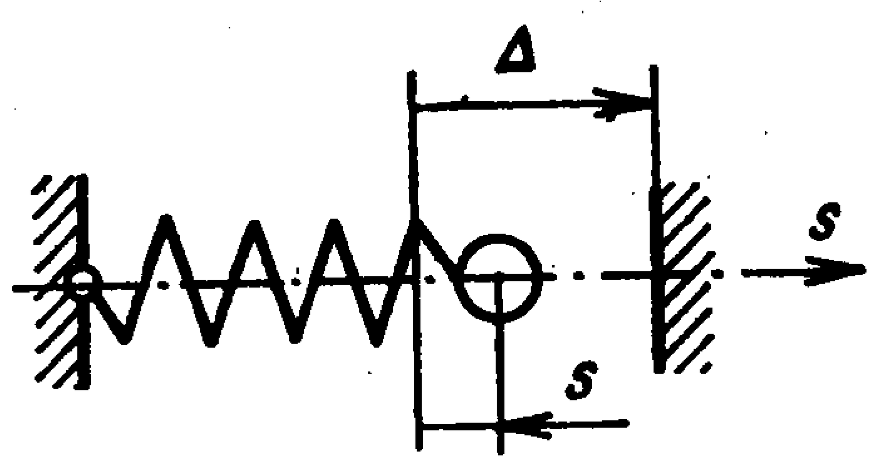
Для движений по связи $x = 0$ и $G\,(x,\,y,\,p) \geqslant 0$. При этом первое уравнение обращается в тождество, а второе и третье принимают вид

$$y^{\cdot} = pm^{-1}R^{-2},\ p^{\cdot} = -mgR\sin y$$

Это уравнения математического маятника. В момент, когда выражение $G\,(x,\,y,\,p)$ меняет знак, точка покидает связь. Траектория, состоящая из участка движения по связи и затем движения вне связи, удовлетворяет системе (14). Однако, как уже отмеча-



Фиг. 1



Фиг. 2

лось, ей также удовлетворяет и траектория с $x = 0$ (для всех t) независимо от знака реакции связи.

Рассмотрим характерное движение с ударами в системе (14). Выберем для простоты следующие начальные данные (для $t = 0$): $x\,(0) = x_0$, $0 < x_0 < R$, $x^{\cdot}\,(0) = 0$, $y\,(0) = 0$, $p\,(0) = 0$. Решение системы с этими условиями таково: $y \equiv 0$; $p \equiv 0$, а x удовлетворяет уравнению, получаемому из (14) в виде $x^{\cdot\cdot} + g\operatorname{sgn} x = 0$. Можно проверить, что его общее решение

$$x\,(t) = a\int_0^{\varphi} \Pi\,(\xi)\,d\xi - \frac{\pi^2}{8},\quad \varphi = \sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \theta$$

где функция $\Pi\,(\zeta)$ определена ниже. Коэффициенты a и θ — произвольные постоянные интегрирования. Подставляя это решение в $s = |x|$, находим решение для переменной s.

Примерами технических систем с односторонними связями могут служить так называемые виброударные системы. Приводимый ниже пример виброударной системы демонстрирует эффективность предложенного подхода при нахождении решений таких систем.

Рассмотрим вынужденные колебания гармонического осциллятора при наличии одностороннего жесткого ограничения (фиг. 2). Расстояние между стенкой и положением равновесия массы на пружине равно Δ (может иметь произвольный знак). В теории виброударных систем уравнения движения такого осциллятора обычно записывают в виде

$$s^{\cdot\cdot} + hs^{\cdot} + \Omega^2 s = \varepsilon\sin\omega t,\quad s < \Delta$$

$$s^{\cdot}\,(t_-^*) = -s^{\cdot}\,(t_+^*),\ s\,(t^*) = \Delta$$

В этом примере полагаем коэффициент восстановления при ударе равным единице.

Написанные уравнения движения не являются дифференциальными уравнениями, поскольку условия на границе содержат время t^* — время достижения осциллятором стенки, а это интеграл движения. Кроме того, эти уравнения нелинейные, так как для них не выполняется принцип суперпозиции.

Применяя изложенный выше прием и используя преобразование

$$s = \Delta - |x| \tag{15}$$

получим уравнения движения осциллятора в нормальной форме Коши

$$x^\cdot = z, \quad z^\cdot = -hz - \Omega^2 x + \Omega^2\Delta \operatorname{sgn} x - \varepsilon \operatorname{sgn} x \sin \omega t \tag{16}$$

Это уже дифференциальные уравнения, определяющие движение для $t \in (-\infty, \infty)$.

Полагая величины h, ε, Δ малыми, осуществим замену переменных в (16), выбирая в качестве уравнений замены решение порождающей (при $h = \varepsilon = \Delta = 0$) системы

$$(x, z) \to (r, \varphi): \; x = r\cos\varphi, \; r = -r\Omega\sin\varphi \; (r > 0) \tag{17}$$

В новых переменных система (15) имеет вид

$$\begin{aligned} r^\cdot &= -hr\sin^2\varphi - \Omega\Delta M(\varphi)\sin\varphi + \varepsilon\Omega^{-1} M(\varphi)\sin\psi\sin\varphi \\ \varphi^\cdot &= \Omega - h\sin\varphi\cos\varphi - \Omega r^{-1}\Delta M(\varphi)\cos\varphi + \varepsilon(r\Omega)^{-1} M(\varphi)\sin\psi\cos\varphi \\ \psi^\cdot &= \omega \quad (M(\varphi) = \operatorname{sgn}\cos\varphi) \end{aligned} \tag{18}$$

Система (18) имеет стандартную форму системы с одной медленной переменной r и двумя быстрыми фазами φ и ψ. Будем изучать ее методом усреднения. Система имеет разрывы первого рода, применение метода усреднения в этом случае корректно [3]. Изучим резонанс произвольного вида: $n\omega - m\Omega = \chi$, где n и m — целые числа, χ — малая величина (расстройка).

В соответствии с процедурой изучения резонанса вводим медленную фазу $\theta = n\psi - m\varphi$, откуда

$$\psi = n^{-1}(m\varphi + \theta) \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) и усредняя по φ при $n = 1$, $m = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, получим

$$r^\cdot = -br + a\cos\theta, \quad \theta^\cdot = \chi + cr^{-1} - ar^{-1}\sin\theta$$

$$b = \frac{h}{2}, \quad a = \frac{-4k\varepsilon(-1)^k}{\pi\Omega(4k^2 - 1)}, \quad c = \frac{4k\Omega\Delta}{\pi} \tag{20}$$

Для других значений n и m резонанс отсутствует.

Решение уравнений стационарного режима в соответствии с (20) имеет вид

$$r_0 = -\frac{c\chi}{b^2 + \chi^2} \pm \frac{\sqrt{a^2(b^2 + \chi^2) - b^2c^2}}{b^2 + \chi^2}, \quad \cos\theta_0 = \frac{b}{a} r_0, \tag{21}$$

$$\sin\theta_0 = \frac{\chi}{a} r_0 + \frac{c}{a}$$

Так как $r_0 > 0$, то должно быть $c\chi < 0$, следовательно, если $\Delta > 0$, стационарный режим существует в дорезонансной области ($n\omega - m\Omega < 0$), если $\Delta < 0$, то в зарезонансной области ($n\omega - m\Omega > 0$). Еще одно условие существования резонансного режима, очевидно, имеет вид $a^2(b^2 + \chi^2) - b^2c^2 \geqslant 0$, или в исходных параметрах

$$\varepsilon^2 (4k^2 - 1)^{-2} \geqslant \pi^2\Omega^4\Delta^2h^2(h^2 + 4\chi^2)^{-1}$$

Из этого условия видно, что при $h = 0$ или $\Delta = 0$ все резонансы вида $n = 1$, $m = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ существуют. Если же $\Lambda h \neq 0$, то, начиная с некоторого номера k, резонансы не существуют.

Изучим устойчивость найденных решений (21). Учитывая уравнения стационарного режима (21), характеристическое уравнение системы в вариациях, соответствующей системе (20) получим в виде

$$\lambda^2 + 2b\lambda + b^2 + \chi\,(\chi r_0 + c)r_0^{-1} = 0$$

Отсюда следуют необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости решения (21)

$$b > 0,\ r_0 > -c\chi\,(b^2 + \chi^2)^{-1}$$

Сравнивая второе условие с (21), заключаем, что устойчивыми являются ветви амплитудно-частотной характеристики, соответствующие верхнему знаку в (21).

Имея в виду (15), (17) и (19), запишем решение в исходной переменной s (r_0 и θ определяются соотношениями (21))

$$s = \Delta - r_0\,|\cos\,(2k)^{-1}\,(\omega t - \theta_0)\,|$$

Это решение является асимптотически близким к точному при $\Delta,\ h,\ \varepsilon \to 0$.

Сравним полученный результат с известным точным решением, приведенным, например в [4], в виде

$$a = -a_1(\zeta)\,r \pm a_2(\zeta)\,F/k,\quad a_1 = \frac{\sin^2 \pi\zeta/2}{\cos \pi\zeta},\quad a_2 = \frac{\zeta^2 \cos^2 \pi\zeta/2}{(1-\zeta^2)\cos \pi\zeta} \tag{22}$$

Эта формула соответствует главному резонансу $m = 2$ при $h = 0$.

Связь используемых в приведенной формуле обозначений с обозначениями, применяемыми в данной статье, следующая:

$$a = r_0/2,\ \zeta = (\omega - \chi)/(2\omega),\ r = \Delta,\ F/k = 4\varepsilon\,(\omega - \chi)^{-2}$$

Сравнение решения (21), записанного с использованием указанных обозначений ($h = 0$) с точным результатом, показывает, что в обоих случаях a — линейная форма r и статического смещения F/k вида (22), причем для приближенного решения

$$a_1 = \frac{2\zeta}{\pi(1-2\zeta)},\quad a_2 = \frac{2\zeta}{3\pi(1-2\zeta)}$$

Относительная ошибка приближенного вычисления коэффициентов a_1 и a_2 в функции ζ приведена ниже

ζ	0.2	0.3	0.4	0.45	0.55	0.6	0.7	0.8	1
$\Delta a_{,1}$ %	79.8	36.2	13.9	6.3	5.3	9.8	17.5	24.1	36.3
$\Delta a_{,2}$ %	51.8	19.2	5.2	1.7	0.2	1.2	10.2	34.8	—

Точной настройке в резонанс соответствует значение $\zeta = 0.5$. Видно, что вблизи этого значения точность приближенного результата достаточно высока.

Рассмотрим теперь еще один тип односторонней связи. Пусть система (1) задана в виде

$$L\,(t,\,q,\,q^{\cdot}),\ Q\,(t,\,q,\,q^{\cdot}),\ e_1 \geqslant f\,(t,\,q) \geqslant e_2,\ q,\,Q \in R^h$$

Аналогично предыдущему при условии гладкости $f\,(t,\,q)$ эта система может быть приведена к виду

$$L\,(t,\,s,\,y,\,s^{\cdot},\,y^{\cdot}),\ S\,(t,\,s,\,y,\,s^{\cdot},\,y^{\cdot}),\ Y\,(t,\,s,\,y,\,s^{\cdot},\,y^{\cdot})$$
$$\pi/2 \geqslant s \geqslant -\pi/2,\ s \in R^1,\ y \in R^{h-1}$$

Введем функции

$$M\,(x) = \operatorname{sgn}\cos x,\quad \Pi\,(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}\cos x\,dx$$

после чего осуществим негладкую замену $s = \Pi\,(x)$.

Все дальнейшее изложение полностью аналогично предыдущему с заменой во всех формулах и уравнениях $|\,x\,|$ на $\Pi\,(x)$ и $\operatorname{sgn} x$ на $M\,(x)$. Так, например, уравнения движения системы с указанной связью имеют вид (10) с учетом сделанного замечания.

Идеи, позволяющие распространить полученные результаты на случай неидеальных односторонних связей, можно найти в [5,6].

В заключение заметим, что использование негладких замен в обоих рассмотренных случаях существенно. Например, если вместо $s = |x|$ взять $s = x^2$, то при любых дескриптивных функциях дифференциальные уравнения движения будут определять движение только до первого выхода на связь.

Поступила 22 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 2. М., Физматгиз, 1960.
2. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Матем. сб., 1960, т. 51, № 1.
3. *Besjes J. G.* On the asymptotic methods for non — linear differential equations. J. Méc., 1969, vol. 8, No. 3.
4. *Асташев В. К.* К динамике осциллятора, ударяющегося об ограничитель, Машиноведение, 1971, № 2.
5. *Журавлев В. Ф.* Метод анализа виброударных систем при помощи специальных функций. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
6. *Журавлев В. Ф.* Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6.