Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 531/533

О ВАРИАЦИОННОМ ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СРЕДЫ И ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В. А. Желнорович, Л. И. Седов

(Москва)

В рамках общей теории относительности при помощи базисного вариационного уравнения рассматриваются вопросы об установлении уравнений состояния для сплошной среды и гравитационного поля. Подробно исследуется произвол в определении уравнении состояния и, в частности, разъясняются вопросы об установлении тензора энергии — импульса для среды и гравитационного поля, при неизменных динамических и вообще физических уравнениях Эйлера. Полученные соотношения и выводы конкретизируются для гравитационного поля в вакууме. Развитые теории позволяют ясно оценить сущность сложившегося до сих пор положения, связанного с различными предположениями в теории псевдотензоров энергии — импульса и с общей проблемой о возможных видах уравнений состояния физических моделей.

1. Вариационное уравнение. Рассмотрим четырехмерное псевдориманово пространство событий с сигнатурой метрики $(-, -, -, +)$, отнесенное к системе координат наблюдателя с переменными x^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ и к системе координат с переменными ξ^i, являющейся сопутствующей для сплошной среды, рассматриваемой в пространстве событий. Динамические уравнения и уравнения состояния для гравитационного поля и среды в рамках общей теории относительности получим, пользуясь вариационным уравнением вида [1–5]

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda d\tau + \delta W = 0 \tag{1.1}$$

в котором V_4 — произвольный четырехмерный объем пространства событий; $d\tau$ — инвариантный элемент объема V_4; δW — функционал, определяемый далее через лагранжиан Λ

$$\Lambda = \Lambda \left(g_{ij}, \Gamma_{ij}{}^k, \partial_s \Gamma_{ij}{}^k, x_j{}^i, \mu^A, \nabla_i \mu^A, K^{\wedge C}\right) \tag{1.2}$$

Здесь $x_j{}^i = \partial x^i / \partial \xi^j$ (функции $x^i = x^i(\xi^j)$ определяют закон движения среды); μ^A — компоненты тензоров, заданные в системе координат наблюдателя и описывающие различные физические поля или физические свойства среды; ∇_i — символ ковариантной производной, вычисляемой в системе координат наблюдателя; $\partial_i = \partial / \partial x^i$ — символ частной производной по переменным x^i; $K^{\wedge C}$ — неварьируемые компоненты тензоров, заданные в сопутствующей системе координат; g_{ij} — ковариантные компоненты метрического тензора пространства событий, вычисляемые в системе координат наблюдателя; $\Gamma_{ij}{}^k$ — символы Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}{}^k = {}^1/_2 g^{ks}(-\partial_s g_{ij} + \partial_i g_{sj} + \partial_j g_{si})$$

При учете необратимых процессов, а также при наличии внешних воздействий на данную систему в вариационное уравнение (1.1) включается также некоторый в общем случае неголономный функционал δW^* [2–4]. Дальнейшая теория развивается при условии, что $\delta W^* = 0$.

Определим систему используемых далее вариаций определяющих параметров. Обозначим через $\eta'^A(x^i)$ значение произвольной функции $\eta^A(x^i)$ в варьированном состоянии. Полагая, что $\eta'^A(x^i)$ мало отличается от $\eta^A(x^i)$, вариацию вида функции $\partial\eta^A$ определим равенством, рассматриваемым с точностью до малых первого порядка

$$\partial\eta^A = \eta'^A(x^i) - \eta^A(x^i) \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что из определения (1.3) следует

$$\partial\partial_i\eta^A = \partial_i\eta'^A - \partial_i\eta^A = \partial_i\partial\eta^A$$

Наряду с вариацией $\partial\eta^A$ определим также вариацию $\delta\eta^A$

$$\delta\eta^A = \partial\eta^A + \delta x^i\nabla_i\eta^A, \quad \delta x^i = x'^i(\xi^j) - x^i(\xi^j) \tag{1.4}$$

Здесь δx^i — вариации закона движения среды, являющиеся компонентами четырехмерного вектора.

Из введенных определений следует, что если параметры η^A — компоненты тензоров, то вариации $\partial\eta^A$, $\delta\eta^A$ также образуют компоненты тензоров того же ранга, что и η^A.

Пользуясь определением вариации ∂, для величин $x_j{}^i$ и для символов Кристоффеля можно найти [1]

$$\partial x_j{}^i = -\delta x^s\nabla_s x_j{}^i + x_j{}^s\nabla_s\delta x^i$$

$$\partial\Gamma_{ij}{}^k = {}^1/_2 g^{ks}(-\nabla_s\partial g_{ij} + \nabla_i\partial g_{sj} + \nabla_j\partial g_{si}) =$$
$$= {}^1/_2[-g^{ks}\delta_i{}^n\delta_j{}^q + g^{kn}(\delta_i{}^s\delta_j{}^q + \delta_j{}^s\delta_i{}^q)]\nabla_s\partial g_{nq}$$

Для компонент $K^{\wedge C}$ имеем $\delta K^{\wedge C} = 0$. Для вариации элемента объема $d\tau$ верна формула

$$\delta d\tau = (\nabla_i\delta x^i + {}^1/_2 g^{ij}\partial g_{ij})\, d\tau$$

Для функций η_A определим также вариации δ'

$$\delta'\eta^A = \partial\eta^A + \delta x^i\,\partial_i\eta^A \tag{1.5}$$

Если η^A — компоненты тензоров, то ковариантную производную для η^A можно определить равенством вида

$$\nabla_i\eta^A = \partial_i\eta^A + F_{Bs}^{Aj}\Gamma_{ij}{}^s\eta^B \tag{1.6}$$

в котором коэффициенты F_{Bs}^{Aj} представляют собой сумму различных произведений символов Кронекера. Пользуясь коэффициентами F_{Bs}^{Aj}, вариацию δ' компонент тензора η^A можно выразить через вариацию δ

$$\delta'\eta^A = \delta\eta^A + \delta x^i(-\nabla_i\eta^A + \partial_i\eta^A) = \delta\eta^A - F_{Bs}^{Aj}\Gamma_{ij}{}^s\eta^B\delta x^i$$

2. Уравнения Эйлера и функционал δW. Вариацию интеграла действия можно представить в виде

(2.1) $$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda\, d\tau \equiv \int\limits_{V_4} (\theta^{ij}\partial g_{ij} + M_A \partial\mu^A + F_i \delta x^i)\, d\tau - $$
$$- \int\limits_{V_4} \nabla_k (P_i^k \delta x^i + M_A^k \delta\mu^A + T^{kij}\delta g_{ij} + T^{ksij}\nabla_s \delta g_{ij})\, d\tau$$

Здесь введены обозначения

(2.2) $$\theta^{ij} = \frac{1}{2}\Big\{\Lambda g^{ij} + 2\frac{\partial\Lambda}{\partial g_{ij}} + \nabla_s\Big[g^{sk}\Big(\frac{\delta\Lambda}{\delta\Gamma_{ij}^{\ k}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_n\Gamma_{ij}^{\ k}}\Gamma_{nm}^m\Big) -$$
$$- g^{ik}\Big(\frac{\delta\Lambda}{\delta\Gamma_{sj}^{\ k}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_n\Gamma_{sj}^{\ k}}\Gamma_{nm}^m\Big) - g^{jk}\Big(\frac{\delta\Lambda}{\delta\Gamma_{si}^{\ k}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_n\Gamma_{si}^{\ k}}\Gamma_{nm}^m\Big)\Big]\Big\}$$

$$T^{ksij} = -\frac{1}{2}\Big(-g^{sn}\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_k\Gamma_{ij}^{\ n}} + g^{in}\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_k\Gamma_{sj}^{\ n}} + g^{nj}\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_k\Gamma_{si}^{\ n}}\Big) + N^{ksij}$$

$$T^{kij} = \frac{1}{2}\Big[g^{nk}\Big(\frac{\delta\Lambda}{\delta\Gamma_{ij}^{\ n}} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_q\Gamma_{ij}^{\ n}}\Gamma_{qm}^m\Big) -$$
$$- g^{in}\Big(\frac{\delta\Lambda}{\delta\Gamma_{kj}^n} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_q\Gamma_{kj}^n}\Gamma_{qm}^m\Big) -$$
$$- g^{jn}\Big(\frac{\delta\Lambda}{\delta\Gamma_{ki}^n} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_q\Gamma_{ki}^n}\Gamma_{qm}^m\Big)\Big] + \nabla_s N^{ksij}$$

$$P_i^k = -\frac{\partial\Lambda}{\partial x_j^{\ i}} x_j^{\ k} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k\mu^A}\nabla_i\mu^A - \Lambda\delta_i^k$$

$$F_i = -\frac{\partial\Lambda}{\partial x_j^{\ s}}\nabla_i x_j^{\ s} - \nabla_s\Big(x_j^{\ s}\frac{\partial\Lambda}{\partial x_j^{\ i}}\Big) - \frac{\partial\Lambda}{\partial K^{\wedge C}}\nabla_i K^{\wedge C}$$

$$M_A = \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^A} - \nabla_i\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_i\mu^A}, \quad M_A^k = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k\mu^A}$$

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\Gamma_{ij}^{\ k}} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\Gamma_{ij}^{\ k}} - \partial_s\frac{\partial\Lambda}{\partial\partial_s\Gamma_{ij}^{\ k}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\mu^A}\frac{\partial\nabla_s\mu^A}{\partial\Gamma_{ij}^{\ k}}$$

В выражениях (2.2) величины $N^{ksij} = -N^{skij}$ — произвольные дифференцируемые функции любых аргументов, символ $\delta/\delta\,\Gamma_{ij}^{\ k}$ означает вариационную производную. Величины θ^{ij}, T^{kij}, T^{ksij} согласно определению симметричны по индексам i, j

$$\theta^{ij} = \theta^{ji}, \quad T^{kij} = T^{kji}, \quad T^{ksij} = T^{ksji}$$

Учитывая выражение (2.1) для вариации интеграла действия, из вариационного уравнения (1.1) найдем систему уравнений Эйлера и функционал δW

(2.3) $$\theta^{ij} = 0, \quad F_i = 0, \quad M_A = 0$$

(2.4) $$\delta W = \int\limits_{\Sigma} (P_i^k \delta x^i + M_A^k \delta\mu^A + T^{kij}\delta g_{ij} + T^{ksij}\nabla_s\delta g_{ij})\, n_k d\sigma$$

Здесь n_k — компоненты единичного вектора внешней нормали к трехмерной поверхности Σ, ограничивающей объем V_4; $d\sigma$ — инвариантный элемент поверхности Σ.

Уравнения, определяющие подынтегральные члены в δW в классических теориях (теория идеальной жидкости, теория упругого тела, теория электромагнитного поля), являются уравнениями состояния. Величины P_i^k, входящие в δW и определенные формулой (2.2), аналогичны компонентам тензора энергии — импульса, вводимого в специальной теории относительности. Такого типа величины в рамках общей теории относительности вводились в [1, 4–6]. Если лагранжиан Λ — четырехмерный скаляр, то величины P_i^k образуют компоненты тензора второго ранга; однако в общем случае, когда Λ не скаляр, величины P_i^k не определяют какой-либо тензор.

Из определений (2.2) видно, что при неизменных уравнениях Эйлера (2.3) величины T^{kij}, T^{ksij}, входящие в δW, определяются вариационным уравнением с некоторым произволом, связанным с наличием произвольных функций N. Определения (2.2) для величин P, T при неизменных уравнениях Эйлера можно менять также, добавляя к лагранжиану Λ дивергентные члены вида $\nabla_i\Omega^i$, где Ω^i задаются как функции определяющих параметров среды и поля. Именно если лагранжиану Λ соответствуют уравнения Эйлера и функционал δW, записываемые в виде (2.3), (2.4), то лагранжиану $\Lambda + \nabla_i\Omega^i$ соответствуют те же уравнения Эйлера (2.3) и функционал δW вида

$$\delta W = \int_\Sigma (P_i'^k\delta x^i + M_A{}^k\delta\mu^A + T'^{kij}\delta g_{ij} + T^{ksij}\nabla_s\delta g_{ij} - \delta\Omega^k)\, n_k d\sigma$$

$$T'^{kij} = T^{kij} - {}^1/_2\Omega^k g^{ij}, \quad P_i'^k = P_i{}^k + \nabla_i\Omega^k - \delta_i^k\nabla_j\Omega^j$$

Выражение для $P_i'^k$ записано в согласии с [5].

Вид подынтегральных членов в δW существенно зависит также от используемых в δW вариаций определяющих параметров. Использование определенной системы вариаций в δW, вообще говоря, есть дело условия и связано с соображениями удобства и возможностью физического истолкования уравнений, определяющих δW. Выбор вариации δ, определенной формулой (1.4), в записи функционала δW в виде (2.4) основан на следующих соображениях. Во-первых, при использовании вариаций δ для скалярных лагранжианов коэффициенты при вариациях всегда являются компонентами тензоров и тем самым имеют инвариантную геометрическую природу. Во-вторых, при замене вариаций δ на дифференциалы вдоль мировых линий точек среды вариационное уравнение (1.1) для известных классических моделей сред является уравнением энергии, а определения коэффициентов при вариациях в δW являются обычными уравнениями состояния. Переход базисного вариационного уравнения (1.1) для действительных приращений в уравнение энергии может служить основанием для установления выражения Λ и, в общем случае, выражения для δW^*.

Следует отметить, что если при различном определении членов функционала δW, связанном с наличием произвольных функций N или с использованием различных вариаций определяющих параметров, величина δW в целом не меняется, то при переходе от лагранжиана Λ к лагранжиану $\Lambda + \nabla_i \Omega^i$ меняется весь функционал δW.

3. Инвариантные свойства вариационного уравнения. Уравнения Эйлера (2.3) и выражение (2.4) для функционала δW получены при произвольной зависимости лагранжиана Λ от аргументов, указанных в (1.2). Ниже установим некоторые свойства уравнений Эйлера и величин $P_i{}^k$, входящих в δW, связанные с добавочным условием скалярности лагранжиана Λ.

Предположим, что лагранжиан Λ — четырехмерный скаляр и, значит, инвариантен относительно группы произвольных преобразований системы координат наблюдателя. Вычислим вариацию интеграла действия

$$\delta_G \int \Lambda \, d\tau$$

при произвольном (малом) преобразовании $y^i = y^i(x^j)$ переменных x^i системы координат наблюдателя. Для этого достаточно положить в выражении (2.1) для произвольной вариации интеграла действия вариации δx^i, δg_{ij}, $\delta \mu^A$ равными

$$\delta x^i = \delta \eta^i, \quad \delta g_{ij} = -\nabla_i \delta \eta_j - \nabla_j \delta \eta_i \tag{3.1}$$
$$\delta \mu^A = F_{Bi}^{Ak} \mu^B \nabla_k \delta \eta^i$$

где с точностью до малых первого порядка $\delta \eta^i = y^i(x^j) - x^i$, $\delta \eta_j = g_{ij} \delta \eta^i$; коэффициенты F_{Bi}^{Ak}, входящие в (3.1), те же, что и в формуле (1.6) для ковариантной производной $\nabla_i \mu^A$. Внося формулы (3.1) в выражение (2.1) для произвольной вариации интеграла действия, получим

$$\delta_G \int\limits_{V_4} \Lambda \, d\tau \equiv \int\limits_{V_4} [2\nabla_k \theta_i{}^k + F_i - M_A \nabla_i \mu^A - \nabla_k (M_A F_{Bi}^{Ak} \mu^B)] \, \delta \eta^i d\tau - \tag{3.2}$$
$$- \int\limits_{V_4} \nabla_k [(2\theta_i{}^k - M_A F_{Bi}^{Ak} \mu^B + P_i{}^k) \delta \eta^i +$$
$$+ (M_A{}^k F_{Bi}^{Aj} \mu^B - 2T^{kj}_{\cdot\cdot i}) \nabla_j \delta \eta^i - 2T^{ksij} \nabla_s \nabla_j \delta \eta_i] \, d\tau$$

В силу предположенной скалярности Λ имеем

$$\delta_G \int\limits_{V_4} \Lambda \, d\tau \equiv 0 \tag{3.3}$$

Из (3.3), учитывая формулу (3.2) для вариации интеграла действия при преобразовании координат, при $\delta \eta^i$, равной нулю на поверхности Σ, получим тождество

$$2\nabla_k \theta_i{}^k + F_i - M_A \nabla_i \mu^A - \nabla_k (M_A F_{Bi}^{Ak} \mu^B) \equiv 0$$

Это тождество выполняется только в силу скалярности лагранжиана Λ, вне связи с выполнением уравнений Эйлера. Из него следует, что в предположении скалярности Λ второе уравнение в (2.3) (получаемое при вариациях δx^i) — следствие остальных уравнений Эйлера.

Производя во втором интеграле в (3.2) дифференцирование и собирая затем члены при вариациях $\delta\eta^i$ и их градиентах, получим также следующее выражение:

$$\delta_G \int_{V_4} \Lambda\, d\tau = \int_{V_4} \Big\{\Big[F_i - M_A \nabla_i \mu^A - \nabla_k P_i{}^k - \frac{2}{3} T^{ksnj} (\nabla_k R_{snij} + \nabla_s R_{knij}) +$$
$$+ \Big(-\frac{1}{2} M_A{}^s F^{Am}_{Bq} \mu^B + T^{sm\cdot}_{\cdot\cdot\cdot q} + \nabla_k T^{ksm\cdot}_{\cdot\cdot\cdot q}\Big) R^q_{\cdot ism}\Big] \delta\eta^i +$$
$$+ [-2\theta_i{}^k + M_A F^{Ak}_{Bi} \mu^B - P_i{}^k + \nabla_q (-M_A{}^q F^{Ak}_{Bi} \mu^B + 2T^{qk\cdot}_{\cdot\cdot i}) +$$
$$+ \frac{1}{3} T^{qmn\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i} (R^k_{\cdot mnq} - R^k_{\cdot qmn}) + (T^{jknq} + T^{jnkq} + T^{kjnq}) R_{qijn} +$$
$$+ T^{jmn\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i} R^k_{\cdot nmj}] \nabla_k \delta\eta^i + (-M_A{}^k F^{Am}_{Bi} \mu^B + 2T^{km\cdot}_{\cdot\cdot i} + 2\nabla_q T^{qkm\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i}) \times$$
$$\times \nabla_{(k} \nabla_{m)} \delta\eta^i + 2T^{ksij} \nabla_{(k} \nabla_s \nabla_{i)} \delta\eta_j \Big\} d\tau \tag{3.4}$$

Здесь круглые скобки у индексов компонент тензоров означают симметризацию по этим индексам, $R^k_{\cdot isj}$ — компоненты тензора кривизны псевдориманова пространства событий.

Пользуясь выражением (3.4), из условия скалярности (3.3) найдем систему тождеств

$$F_i - M_A \nabla_i \mu^A - \nabla_k P_i{}^k - {}^2/_3 T^{ksnj} (\nabla_k R_{snij} + \nabla_s R_{knij}) +$$
$$+ (-{}^1/_2 M_A{}^s F^{Am}_{Bq} \mu^B + T^{sm\cdot}_{\cdot\cdot q} + \nabla_k T^{ksm\cdot}_{\cdot\cdot\cdot q}) R^q_{\cdot ism} \equiv 0 \tag{3.5}$$
$$-2\theta_i{}^k + M_A F^{Ak}_{Bi} \mu^B - P_i{}^k + \nabla_q (-M_A{}^q F^{Ak}_{Bi} \mu^B + 2T^{qk\cdot}_{\cdot\cdot i}) +$$
$$+ {}^1/_3 T^{qmn\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i} (R^k_{\cdot mnq} - R^k_{\cdot qmn}) + (T^{jknq} + T^{jnkq} + T^{kjnq}) R_{qijn} +$$
$$+ T^{jmn\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i} R^k_{\cdot nmj} \equiv 0$$
$$-F^{A(m}_{Bi} M_A{}^{k)} \mu^B + 2T^{(km)\cdot}_{\cdot\cdot i} + 2\nabla_q T^{q(km)\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i} \equiv 0$$
$$T^{(ksi)j} \equiv 0$$

Аналогичные тождества в случае, когда компоненты T^{ksij} симметричны по индексам k, s, рассматривались в [7]. Произвольные функции N в [7] не учитывались.

Из первого тождества в (3.5) следует, что в силу уравнений Эйлера (2.3) компоненты тензора $P_i{}^k$ удовлетворяют уравнению

$$\nabla_k P_i{}^k = -{}^2/_3 T^{ksnj} (\nabla_k R_{snij} + \nabla_s R_{knij}) +$$
$$+ (-{}^1/_2 M_A{}^s F^{Am}_{Bq} \mu^B + T^{sm\cdot}_{\cdot\cdot q} + \nabla_k T^{ksm\cdot}_{\cdot\cdot\cdot q}) R^q_{\cdot ism} \tag{3.6}$$

Из второго уравнения в (3.5) следует, что компоненты $P_i{}^k$ в силу уравнений Эйлера можно записать в виде

$$P_i{}^k = \nabla_q (-M_A{}^q F^{Ak}_{Bi} \mu^B + 2T^{qk\cdot}_{\cdot\cdot i}) + {}^1/_3 T^{qmn\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i} (R^k{}_{mnq} - R^k_{\cdot qmn}) +$$
$$+ (T^{jknq} + T^{jnkq} + T^{kjnq}) R_{qijn} + T^{jmn\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i} R^k_{\cdot nmj} \tag{3.7}$$

4. **Псевдотензоры энергии — импульса.** Если в выражении (2.4) для функционала δW заменить тензорные вариации δ на вариации δ' (определенные равенством (1.5)), то получим

$$\delta W = \int_\Sigma (t_i{}^k \delta x^i + t_i{}^{ks} \partial_s \delta x^i + \theta^{kij} \delta' g_{ij} + T^{ksij} \partial_s \delta' g_{ij} + M_A{}^k \delta' \mu^A) n_k d\sigma \tag{4.1}$$

Для величин t_i^k, t_i^{ks}, θ^{kij} в (4.1) имеем

$$(4.2)\qquad t_i^k = -\frac{\partial\Lambda}{\partial x_j^{\ i}} x_j^k + \frac{\partial\Lambda}{\partial \nabla_k \mu^A}\partial_i\mu^A - \theta^{knj}\partial_i g_{nj} - $$

$$- T^{ksnj}\partial_i\partial_s g_{nj} - \Lambda\delta_i^k + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_s\left(N_i^{ks}\sqrt{-g}\right), \qquad g = \det \| g_{ij} \|$$

$$t_i^{ks} = -T^{ksnj}\partial_i g_{nj} + N_i^{ks}$$

$$\theta^{kij} = T^{kij} - T^{ksmj}\Gamma_{sm}^i - T^{ksmi}\Gamma_{sm}^j$$

Здесь $N_i^{ks} = -N_i^{sk}$ — произвольные дифференцируемые функции; величины T^{kij}, T^{ksij} определены равенствами (2.2). В силу уравнений Эйлера (2.3) компоненты t_i^k удовлетворяют дифференциальному закону сохранения

$$(4.3)\qquad \partial_k \sqrt{-g}\, t_i^k = 0$$

и обычно называются компонентами псевдотензора энергии — импульса. Из (4.2) видно, что компоненты псевдотензора $\sqrt{-g}\, t_i^k$ определяются вариационным уравнением с точностью до члена $\partial_s\left(N_i^{ks}\sqrt{-g}\right)$. Отметим, что закон сохранения (4.3) не связывается здесь со свойствами инвариантности лагранжиана. Получение псевдотензоров энергии — импульса, основанное на использовании инвариантных свойств лагранжиана Λ, дает то же выражение (4.2) и с тем же произволом.

5. Преобразование функционала δW. Очевидно, что в связи с указанным произволом в определении величин t, θ, T, входящих в δW, придавать им какой-либо физический смысл без специальных добавочных гипотез нельзя. Вместе с тем можно указать алгоритм, позволяющий определить члены в δW однозначным образом [3–5, 8–12]. Соответствующее преобразование связано с разложением градиентов ∇_s от вариаций определяющих параметров в δW на составляющие, касательные и нормальные к поверхности Σ

$$(5.1)\qquad \nabla_s = (\delta_s^i - \varepsilon n_s n^i)\nabla_i + \varepsilon n_s n^i \nabla_i = \zeta_s^\alpha \nabla_\alpha^* + \varepsilon n_s\, D/Dn$$

Здесь $D/Dn = n^i\nabla_i$ — символ ковариантной производной по нормали к поверхности Σ; $\varepsilon = g_{ij}n^i n^j$ — индикатор знака модуля вектора нормали; ∇_α^* — символ ковариантной производной на поверхности Σ, отнесенной к системе координат с переменными u^α ($\alpha = 1, 2, 3$). Компоненты ζ_s^α в формуле (5.1) определяются равенством $\zeta_s^\alpha = G^{\alpha\beta} g_{si}\zeta_\beta^i$, в котором $G^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты первого метрического тензора поверхности Σ в системе координат u^α; $\zeta_\beta^i = \partial x^i/\partial u^\beta$ — компоненты базисных векторов, касательных к Σ. Для получения второй части формулы (5.1) следует воспользоваться также известным равенством, связывающим компоненты вектора нормали n_i и компоненты векторов ζ_α^i, касательных к поверхности Σ

$$\delta_s^j - \varepsilon n_s n^j = \zeta_s^\alpha \zeta_\alpha^j$$

Заменяя градиенты ∇_s в формуле (2.4) для δW согласно равенству (5.1) и интегрируя по частям, выражение для δW для достаточно гладких поверхностей Σ и допустимых функций и их вариаций можно преобразовать к виду

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma}\left(n_k P_i{}^k \delta x^i + n_k M_A{}^k \delta\mu^A + T^{ij}_{(0)}\delta g_{ij} + T^{ij}_{(1)}\frac{D}{Dn}\,\delta g_{ij}\right)d\sigma \tag{5.2}$$

Здесь

$$T^{ij}_{(1)} = \varepsilon n_k n_s T^{ksij}, \qquad T^{ij}_{(0)} = n_k T^{kij} - \nabla_\alpha{}^* \left(\zeta_s{}^\alpha n_k T^{ksij}\right) \tag{5.3}$$

Пользуясь деривационными уравнениями [15] теории поверхностей

$$\nabla_\alpha{}^*\zeta_\beta{}^s = b_{\alpha\beta}n^s, \quad \nabla_\alpha{}^* n_k = -\varepsilon b_{\alpha\beta}\zeta_k{}^\beta$$

где $b_{\alpha\beta}$ — компоненты второго метрического тензора поверхности Σ, определение (5.3) для величин $T^{ij}_{(0)}$ можно записать также в виде

$$T^{ij}_{(0)} = n_k\left(T^{kij} - \nabla_s T^{ksij} + \varepsilon n_s \frac{D}{Dn} T^{ksij}\right) +$$
$$+ T^{ksij}\left(\varepsilon b_{\alpha\beta}\zeta_k{}^\alpha\zeta_s{}^\beta - b_\alpha{}^\alpha n_k n_s\right), \qquad b_\alpha{}^\alpha = G^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$$

Величины $P_i{}^k n_k$, $T^{ij}_{(0)}$, $T^{ij}_{(1)}$ в (5.2) при заданном лагранжиане Λ определяются вариационным уравнением однозначным образом и не зависят от произвольных функций N (что легко проверяется и непосредственно). При помощи этих величин, вычисляемых на поверхности скачков и на границах, формулируются соотношения на скачках и граничные условия [3,4,8–12], соответствующие выбранному лагранжиану.

При $\Lambda = \Lambda\,(R,\, g_{ij},\, \mu^A,\, \nabla_k\, \mu^A,\, x_j{}^i,\, K^{AC})$ выражение для δW типа (5.2) дано Л. И. Седовым [4], выражение для δW с нековариантными производными $\partial/\partial n = n^i\partial_i$ дано в [10, 11], в рамках специальной теории относительности — в [3,9].

6. Классическая общая теория относительности. Выпишем теперь полученные соотношения для гравитационного поля в вакууме, когда лагранжиан Λ задается в виде

$$\Lambda = \frac{1}{2\varkappa}R + \nabla_i\Omega^i \tag{6.1}$$

где R — скалярная кривизна пространства событий, $\varkappa$ — эйнштейновская гравитационная постоянная; Ω^i — задаваемые функции, вид которых здесь не конкретизируется (о возможном задании функций Ω^i см. в [5]). В этом случае уравнения Эйлера для метрики пространства событий записываются в виде уравнений Эйнштейна

$$R_{ij} - {}^1\!/_2 R g_{ij} = 0$$

в которых $R_{ij} = R^{m}_{\cdot imj}$ — компоненты тензора Риччи, а функционал δW имеет вид

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma}\left(P_i{}^k\delta x^i + T^{kij}\delta g_{ij} + T^{ksij}\nabla_s\delta g_{ij} - \delta\Omega^k\right)n_k d\sigma \tag{6.2}$$

Здесь

$$P_i{}^k = -\frac{1}{2\varkappa}R\delta_i{}^k + \nabla_i\Omega^k - \delta_i{}^k\nabla_j\Omega^j \tag{6.3}$$
$$T^{kij} = -{}^1\!/_2\Omega^k g^{ij} + \nabla_s N^{ksij}$$
$$T^{ksij} = \frac{1}{2\varkappa}\left[g^{ij}g^{ks} - {}^1\!/_2\left(g^{is}g^{jk} + g^{js}g^{ik}\right)\right] + N^{ksij}$$

Выражение (6.2) для δW при $\Omega^i = 0$, $N^{ksij} = 0$ дано в [1]; функции Ω^i рассматривались в [5].

Выделяя в (6.2) производные по нормали, δW запишем в виде

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma} \left(P_i{}^k n_k \delta x^i + T_{(0)}^{ij} \delta g_{ij} + T_{(1)}^{ij} \frac{D}{Dn} \delta g_{ij} - n_k \delta \Omega^k\right) d\sigma$$

где

$$T_{(1)}^{ij} = \frac{1}{2\varkappa}(g^{ij} - \varepsilon n^i n^j)$$

$$T_{(0)}^{ij} = -\frac{1}{2} n_k \Omega^k g^{ij} + \frac{1}{2\varkappa}(b_\alpha{}^\alpha n^i n^j - \varepsilon b^{\alpha\beta} \zeta_\alpha{}^i \zeta_\beta{}^j)$$

Использование нековариантных вариаций $\delta' g_{ij}$ дает следующее выражение для δW:

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma} (t_i{}^k \delta x^i + t_i{}^{ks} \partial_s \delta x^i + \theta^{kij} \delta' g_{ij} + T^{ksij} \partial_s \delta' g_{ij} - \delta' \Omega^k)\, n_k\, d\sigma \tag{6.4}$$

Здесь

$$t_i{}^k = \frac{1}{\varkappa}\left(R_i{}^k - \frac{1}{2} R \delta_i{}^k\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_s \times$$
$$\times \left\{\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\varkappa}(g^{km} g^{js} - g^{kj} g^{sm}) \partial_j g_{im} + \delta_i{}^s \Omega^k - \delta_i{}^k \Omega^s + N_i{}^{ks}\right]\right\} \tag{6.5}$$

$$t_i{}^{ks} = \frac{1}{2\varkappa}(g^{kj} g^{sm} - g^{ks} g^{mj}) \partial_i g_{mj} + N_i{}^{ks}$$

$$\theta^{kij} = \frac{1}{4\varkappa}[(g^{ki} g^{ns} - g^{ks} g^{ni}) \Gamma_{sn}^j + (g^{kj} g^{ns} - g^{ks} g^{nj}) \Gamma_{ns}^i] -$$
$$- \frac{1}{2} \Omega^k g^{ij} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_s (\sqrt{-g}\, N^{ksij})$$

Компоненты T^{ksij} в (6.4) определены равенством (6.3).

Так как смешанные компоненты всех предложенных разными авторами псевдотензоров энергии — импульса гравитационного поля в силу уравнений Эйнштейна представляются в виде дивергенции антисимметрических компонент с тремя индексами, то в качестве $t_i{}^k$ в (6.5) можно получить все предложенные выражения для псевдотензоров энергии — импульса со смешанными индексами даже при $\Omega^i = 0$, $\delta\Omega^i = 0$ только выбором произвольных функций $N_i{}^{ks}$. Например, псевдотензору Лоренца [13] соответствуют функции $N_i{}^{ks} = 0$. Для псевдотензора Эйнштейна [14] имеем

$$N_i{}^{ks} = \frac{1}{2\varkappa}\left\{-(g^{km} g^{js} - g^{kj} g^{sm}) \partial_j g_{im} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{in} \partial_m [(-g)(g^{kn} g^{sm} - g^{sn} g^{km})]\right\}$$

При $\Omega^i \neq 0$ предыдущие результаты также получаются переопределением $N_i{}^{ks}$. В частности, если в лагранжиане (6.1) функции Ω^i определить равенством

$$\Omega^i = \frac{1}{2\varkappa}(g^{si} \Gamma_{sj}{}^j - g^{js} \Gamma_{js}{}^i) = \frac{1}{2\varkappa(-g)} \partial_s [(-g) g^{si}]$$

то лагранжиан Λ не зависит от производных от символов Кристоффеля, а формула (6.2) для δW переходит в следующую:

$$\delta W = \int_\Sigma (t_i^k \delta x^i + N_i^{ks} \partial_s \delta x^i + \theta^{kij} \delta' g_{ij} + N^{ksij} \partial_s \delta' g_{ij}) n_k d\sigma \tag{6.6}$$

Здесь $N_i^{ks} = -N_i^{sk}$, $N^{ksij} = -N^{skij}$ произвольны, а для θ^{kij}, t_i^k имеем

$$t_i^k = \frac{1}{\varkappa}(R_i^k - \frac{1}{2} R\delta_i^k) - \frac{1}{2\varkappa} \partial_s \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{in} \partial_m [(-g)(g^{kn} g^{sm} - g^{sn} g^{km})] \right\} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_s (N_i^{ks} \sqrt{-g}) \tag{6.7}$$

$$\theta^{kij} = \frac{1}{4\varkappa} [(g^{ij} g^{sp} - g^{si} g^{jp} - g^{js} g^{ip}) \Gamma_{sp}^k + \left(- g^{ij} g^{sk} + g^{si} g^{jk} + g^{js} g^{ik}\right) \Gamma_{sp}^p] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_s (\sqrt{-g}\, N^{ksij})$$

При $N_i^{ks} = 0$ компоненты t_i^k в (6.7) являются компонентами псевдотензора энергии — импульса гравитационного поля по Эйнштейну.

Поступила 23 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* О тензоре энергии — импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, р 3.
2. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
3. *Седов Л. И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5; Механика сплошной среды, т. 1,М., «Наука», 1976.
4. *Седов Л. И.* Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
5. *Седов Л. И.* О локальном уравнении энергии в гравитационном поле. Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3.
6. *Желнорович В. А.* Модели сред с внутренним электромагнитным и механическим моментами. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.
7. *Логунов А. А., Фоломешкин В. Н.* Проблема энергии — импульса и теория гравитации. Теорет. и мат. физика, 1977, т. 32, № 3.
8. *Mindlin R. D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. Int. J. Solids Structures, 1965, vol. 1, No 4, 417—438,
9. *Желнорович В. А.* Вариационный принцип и уравнения состояния для сплошных сред. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 1.
10. *Желнорович В. А.* Об интегральных законах сохранения для сплошных сред в общей теории относительности. Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 1.
11. *Желнорович В. А.* К вопросу об определении энергии — импульса в общей теории относительности. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 5.
12. *Лурье М. В.* Использование вариационного принципа для изучения распространения поверхностей разрыва в сплошной среде. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
13. *Lorentz H. A.* Over Einstein's Theorie der Zwaartekracht. Amst. Akad. Versl., 1916, vol. 25, p. 468—486.
14. *Einstein A.* Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. Sitzb. Kgl. preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1916, Bd. 2, S. 1111—1116.
5. *Схоутен И., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М., Изд. иностр. лит., 1948.