

$$M_{ik} = M_{ik}^s = 0, \quad \delta\gamma_k = 0, \quad i, k = 1, 2$$

$$(\Phi_i^s = \Phi_{ik}^s e_k + \Phi_{i3}^s m, \quad M_i^s = M_{ik}^s e_k + M_{i3}^s m)$$

Назовем соотношения (3.6) — (3.9) соотношениями теории среднего изгиба тонких оболочек типа Тимошенко, пологих относительно поверхности отсчета. Пределы применимости этих соотношений определяются предельными значениями углов между координатными векторами  $g_i$  и  $g_i^0$ , которые, в свою очередь, выражаются через коэффициенты  $y_1$  и  $y_2$ . При допустимой ошибке вычисления основных факторов, определяющих напряженно-деформированное состояние оболочки, равной  $\varepsilon = 0.05$ , предельные значения  $y_i$  составляют  $\sim 0.225$ , что подтверждается также количественным примером, рассмотренным в статье [3].

Отметим, что уравнения (3.8) можно заменить на приближенные, пренебрегая в первых двух уравнениях перерезывающими усилиями

$$(A_2 T_{11})_{,1} + (A_1 T_{1,2})_{,2} + T_{12} A_{1,2} - T_{22} A_{2,1} + A_1 A_2 X_1 = 0 \quad (1,2)$$

$$L^3 = 0, \quad H^i = 0, \quad i = 1, 2$$

а формулы для поворотов  $\omega_i$  заменить на  $\omega_i = A_i^{-1} w_{,1}$  для оболочек, срединная поверхность которых пологая относительно плоскости или пологая относительно любой другой поверхности отсчета в указанном выше смысле и делится на большое число пологих частей в классическом смысле.

Поступила 16 III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1975.
2. Галимов К. З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
3. Паймушин В. Н., Фирсов В. А. Основные соотношения линейной теории тонких оболочек сложной формы в гауссовых координатах поверхности отсчета. В сб.: Труды семинара по теории оболочек. Тр. Казанск. физ.-техн. ин-та АН СССР, 1975, вып. 6.

УДК 539.375

#### ДОКРИТИЧЕСКИЙ РОСТ ТРЕЩИН

М. П. В н у к

(США)

Рассматривается модель устойчивого докритического роста сквозных трещин в тонких пластинах при монотонном, а также при циклическом нагружении. Учитываются вязкоупругие свойства материала; пластическая область в постановке Дагдейла считается малой.

1. Монотонное нагружение. Рассмотрим прямолинейную сквозную трещину в тонкой пластине из упругого или вязкоупругого материала. Считаем, что выполняется гипотеза Дагдейла, так что пластические деформации сосредоточены в бесконечно тонком слое на продолжении трещины, причем длина пластической зоны  $R$  весьма мала по сравнению с длиной трещины  $l$  (см. фиг. 1, где изображена окрестность конца трещины). С увеличением внешней растягивающей нагрузки, перпендикулярной трещине, длина пластической зоны  $R$  будет возрастать, а конец трещины будет продвигаться по пластическому слою. Внешние нагрузки будем всегда считать докритическими, так что подрастание трещины является устойчивым.

Вначале рассмотрим случай монотонного нагружения.

Необратимая работа, которая расходуется в некоторой контрольной точке  $P$  пластической зоны за время  $\delta t$ , предшествующее разрыву, определяется выражением

$$(1.1) \quad \int_{t-\delta t}^t \sigma(x, \tau) U_p'(x, \tau) d\tau$$

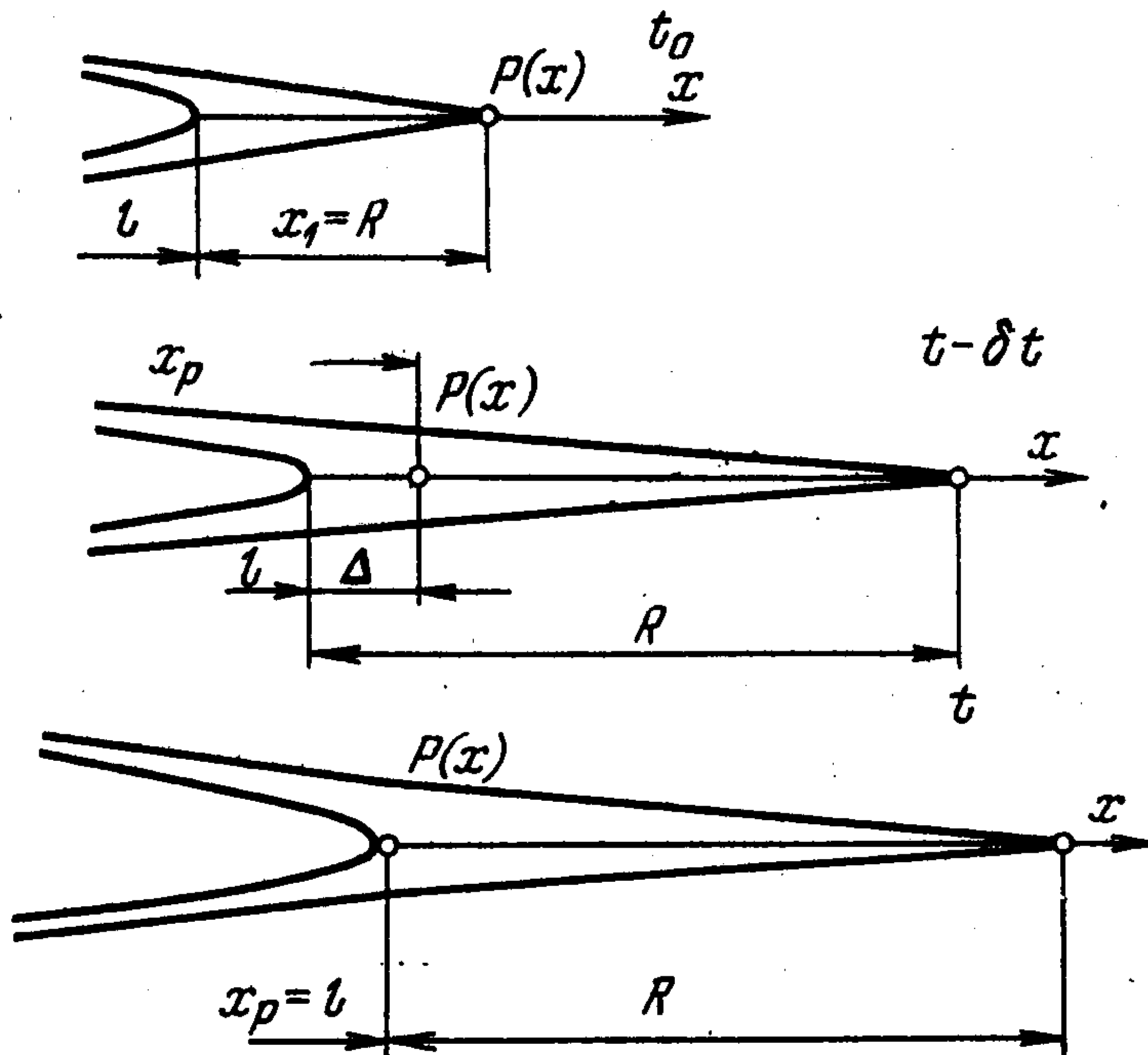
Здесь время  $\tau = t$  отвечает моменту, в которой происходит разрыв в точке  $P$ ,  $\sigma(x, \tau)$  — нормальное напряжение в точке  $P$  на площадке, ориентированной вдоль оси  $x$ , совпадающей с линией трещины,  $U_p'(x, \tau)$  — скорость смещения на верхнем берегу пластического отрезка в точке  $P$  по нормали к оси  $x$ . Время  $\delta t$  считается малым настолько, чтобы выполнялось условие

$$\Delta \ll R \ll l \quad (\Delta = \delta t dl / dt)$$

Предполагается, что  $\Delta$  — структурная постоянная данного материала типа «частицы Нойбера». Физически можно считать, что интеграл (1.1) описывает суммарное «накопление повреждения» в точке  $P$  за время  $\delta t$  до разрыва.

Предполагая, что  $\sigma(x, \tau) = \text{const}$  в зоне  $\Delta$ , и считая смещение за время  $\delta t$  равным определенному критическому раскрытию трещины  $U_0$ , из (1.1) получим

$$(1.2) \quad U_0 = \left( \frac{\partial U_p}{\partial x_1} \right)_{t-\delta t} \delta x_1 + \left( \frac{\partial U_p}{\partial R} \right)_{t-\delta t} \delta R + \dots$$



Фиг. 1

Здесь переменные  $x$  и  $t$  заменены на расстояние от вершины трещины  $x_1$  и размер пластической зоны  $R$ , являющиеся неизвестными функциями времени.

Так как  $x = x_1 + l$  (см. фиг. 1), а значение  $x$  для контрольной точки  $P$  фиксировано во времени, можно заменить  $\partial / \partial x_1$  на  $(-\partial / \partial l)$  и  $\delta x_1$  на  $(-\delta l)$ .

Для упругого вне пластической зоны материала смещение  $U_p$  определяется соотношением

$$(1.3) \quad U_p(x_1, R) = \frac{4\sigma_s R}{\pi E} \left( \sqrt{1 - \frac{x_1}{R}} - \frac{x_1}{2R} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x_1/R}}{1 - \sqrt{1 - x_1/R}} \right)$$

Здесь  $\sigma_s$  — предел текучести,  $E$  — модуль Юнга. В этом случае критерий (1.2) принимает вид

$$(1.4) \quad \frac{dR}{dl} = \frac{\pi E U_0}{4\sigma_s \Delta} - \frac{1}{2} \left( 1 + \ln \frac{4R}{\Delta} \right)$$

Интегрирование этого уравнения дает кривую сопротивления росту трещины. Впервые такая кривая аналитически была построена Г. П. Черепановым на основе развитой им энергетической теории [1]. Чтобы оценить эффект роста, предсказываемый уравнением (1.4), достаточно сравнить размер пластической зоны  $R_0$  в начальный момент развития трещины

$$(1.5) \quad R_0 = \frac{\pi E}{4\sigma_s} U_0$$

с максимальным размером пластической зоны  $R_\infty$ , соответствующим установившейся

стадии роста трещины, когда  $dR / dl = 0$

$$(1.6) \quad R_{\infty} = \frac{\Delta}{4} \exp \left( \frac{\pi E U_0}{2 \sigma_s \Delta} - 1 \right)$$

Так как  $U_0 \sim \Delta$ , то отношение  $R_{\infty} / R_0$  для типичной величины  $\sigma_s / E$  очень велико.

Теперь предположим, что материал вне пластической зоны линейно-вязкоупругий, т. е.

$$(1.7) \quad S_{i,j} = \int_0^t G_1(t-\tau) \frac{de_{i,j}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad \sigma = \int_0^t G_2(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau$$

Здесь  $S_{i,j}$  и  $e_{i,j}$  — девиаторы,  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — первые инварианты тензора напряжений и деформаций соответственно;

$G_1(t)$  — модуль релаксации для чистого сдвига,  $G_2(t)$  — модуль релаксации для чистого сжатия.

В этом случае смещение  $U_p$  выражается формулой

$$(1.8) \quad U_p(x_1, R) = U_p^{\circ} \{x_1(t), R(t)\} + \int_{t_0}^t \frac{\Omega(t-\tau)}{\Omega(0)} U_p^{\circ} \{x_1(\tau), R(\tau)\} d\tau$$

Здесь нижний предел  $t_0$  совпадает с моментом времени, когда контрольная точка  $P$  входит в пластическую зону; верхний индекс градус означает упругую составляющую перемещения  $U_p$ , функция  $\Omega(t)$  имеет вид

$$(1.9) \quad \Omega(t) = L^{-1}_{S \rightarrow t} \left\{ \frac{2 [2G_1^*(S) + G_2^*(S)]}{S^2 [G_1^*(S) + 2G_2^*(S) G_1^*(S)]} \right\}$$

где звездочка означает преобразование Лапласа, а  $L^{-1}$  — его обращение.

При помощи формулы (1.8) критерий (1.2) можно привести к виду

$$(1.10) \quad \frac{dR}{dl} = \left( \frac{4E}{\pi \sigma_s} \right) \left( \frac{U_0}{\Delta} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \ln \frac{4R}{\Delta} \right) - R [\delta \Omega(t)] \Omega^{-1}(0)$$

Влияние вязкоупругих деформаций на устойчивый рост трещин определяется последним членом в уравнении (1.10), а более точно — приращением  $\delta \Omega(t) = \Omega(\delta t) - \Omega(0)$ .

Разлагая функцию  $\Omega(\delta t)$  в ряд, получим связь ее со скоростью изменения размера пластической зоны и скоростью нагружения  $Q$

$$\delta \Omega(t) = \left( \frac{dR}{dl} - \frac{\partial R}{\partial l} \right) \frac{\Omega(0)}{Q} \left( \frac{\partial R}{\partial R} \right)^{-1} \Delta$$

Окончательно уравнение (1.10) запишем в форме

$$(1.11) \quad \frac{dR}{dl} = \left[ \frac{4U_0 E}{\pi \sigma_s} - \frac{\Delta}{2} \left( 1 + \frac{4R}{\Delta} \right) + C \Delta \left( \frac{\partial R}{\partial Q} \right)^{-1} R \left( \frac{\partial R}{\partial l} \right) \right] \Delta^{-1} \times \\ \times \left[ 1 + CR \left( \frac{\partial R}{\partial Q} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

Параметр  $C$  существенно влияет на сопротивление росту трещины. Результаты численного интегрирования уравнения (1.11), обработанные в координатах безразмерная нагрузка  $Q = \pi \sigma / (2 \sigma_s)$  — безразмерная длина трещины  $l / R_{\infty}$  при некоторых фиксированных значениях параметра  $\lambda = \pi l / (2l)$ , приведены на фиг. 2 (стрелки указывают начало неустойчивости). Кривые 1—3 соответствуют значениям  $\lambda = 0.2, 0.4$  и  $0.6$ .

Для материалов, не чувствительных к скорости нагружения, когда  $C = 0$ , уравнение (1.11) переходит в уравнение (1.4). Заметим, что только при  $C = 0$  кривая сопротивления росту трещин является универсальной кривой, т. е. форма кривой не-

зависит ни от геометрии образца, ни от длины начальной трещины. Существование такой универсальной кривой было предсказано ранее Райсом [2] для трещин продольного сдвига и Г. П. Черепановым — для трещин нормального разрыва [1]. Очевидно, эта универсальность нарушается, как только материал становится чувствительным к скорости нагружения.

Для заданной нагрузки, а также формы образца и расположения трещины зависимость  $R$  от  $l$  и  $Q$  можно считать известной. Поэтому выражение (1.11) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое связывает длину трещины  $l$  с безразмерной нагрузкой  $Q$ .

### 2. Циклическое нагружение. Рассмотрим

рост усталостных трещин как последовательность участков медленного роста, каждый из которых описывается уравнением (1.11). Интегрируя это уравнение в пределах одного цикла нагружения, получим приращение трещины за один цикл

$$(2.1) \quad dl = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} F dR + \oint CR \left( \frac{dR}{\partial Q} \right)^{-1} F dR$$

$$F = \left\{ \frac{1}{2} \ln(R_{\infty}/R) + CR (\partial R / \partial l) (\partial R / \partial Q)^{-1} \right\}^{-1}$$

Так как длина трещины существенно не меняется в течение одного цикла нагружения, в выражении (2.1) она считается постоянной. Тогда переменную интегрирования  $R$  можно заменить на  $Q$ .

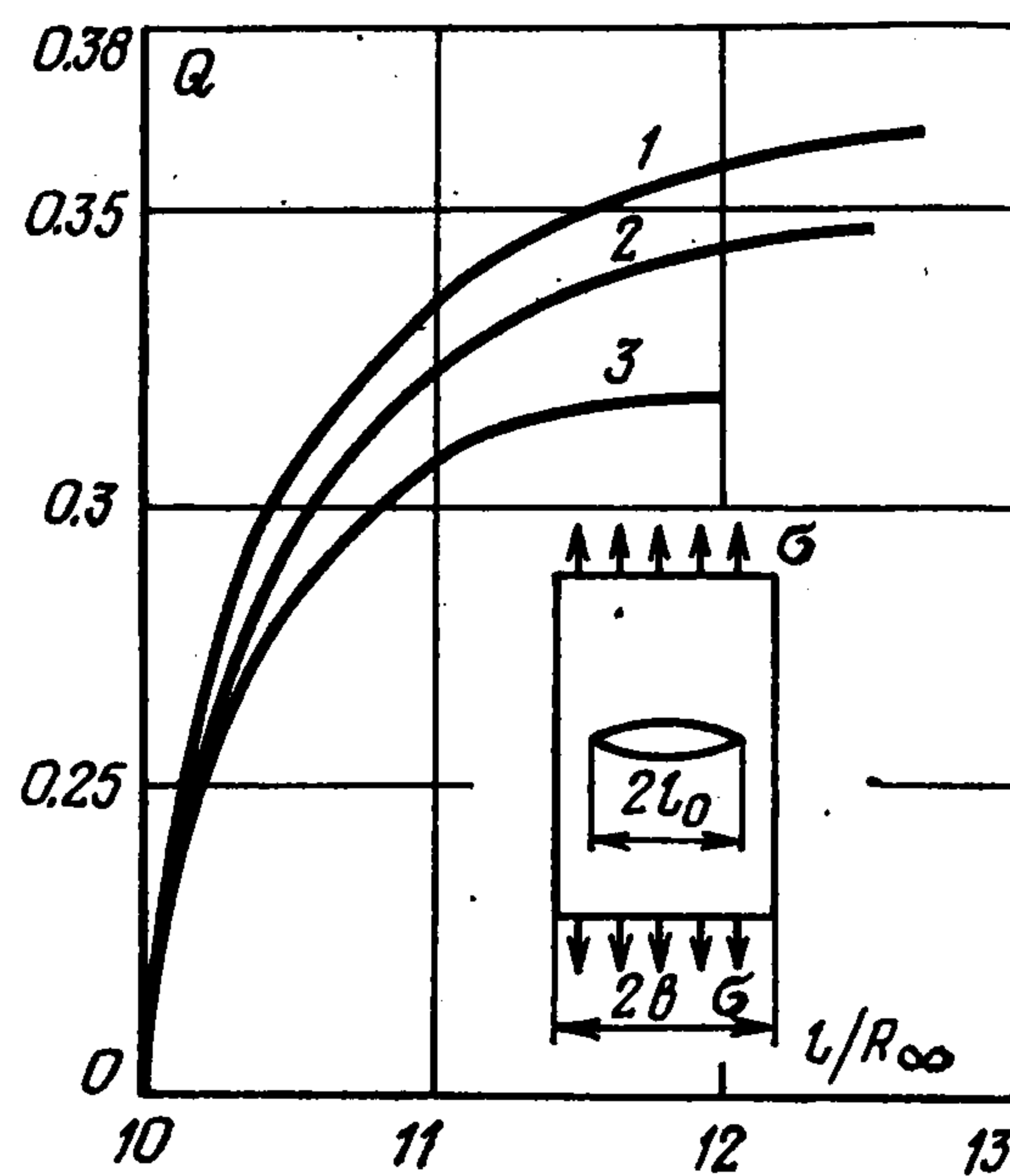
Заметим, что первый интеграл (2.1) распространяется только на восходящую часть цикла, в то время как второй интеграл охватывает весь цикл. Это влечет за собой и различную физическую интерпретацию указанных двух слагаемых. Первый интеграл определяет медленный рост трещины, который может происходить только в течение активного процесса нагружения. Второй интеграл определяется вязкоупругим поведением материала, и поэтому некоторое подрастание трещины может происходить при постоянной нагрузке или даже при уменьшающейся нагрузке. Если весь цикл разделить на возрастающую ( $0 \leq t \leq T/2$ ) и убывающую ( $T/2 \leq t \leq T$ ) ветви, величина подрастания трещины на указанных двух участках нагружения может быть определена соответственно из выражений

$$(2.2) \quad (dl)_+ = \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} \left( \frac{\partial R}{\partial Q} \right) F dQ$$

$$(dl)_- = \int_{T/2}^T \left( \frac{R}{Q} \right) F dt$$

Интегралы (2.2) могут быть вычислены для любого заданного режима нагружения  $Q = Q(t)$ . Первый из интегралов может быть вычислен через максимальный и минимальный уровни нагрузки в цикле, при этом не требуется знания точной зависимости  $Q$  от времени. Чтобы вычислить в (2.2) второй интеграл, требуется знать функцию  $Q(t)$ .

Проиллюстрируем применение этих соотношений для вычисления скорости роста усталостной изолированной трещины в бесконечной пластине.



Фиг. 2

Из (2.2) для скорости роста усталостной трещины имеем

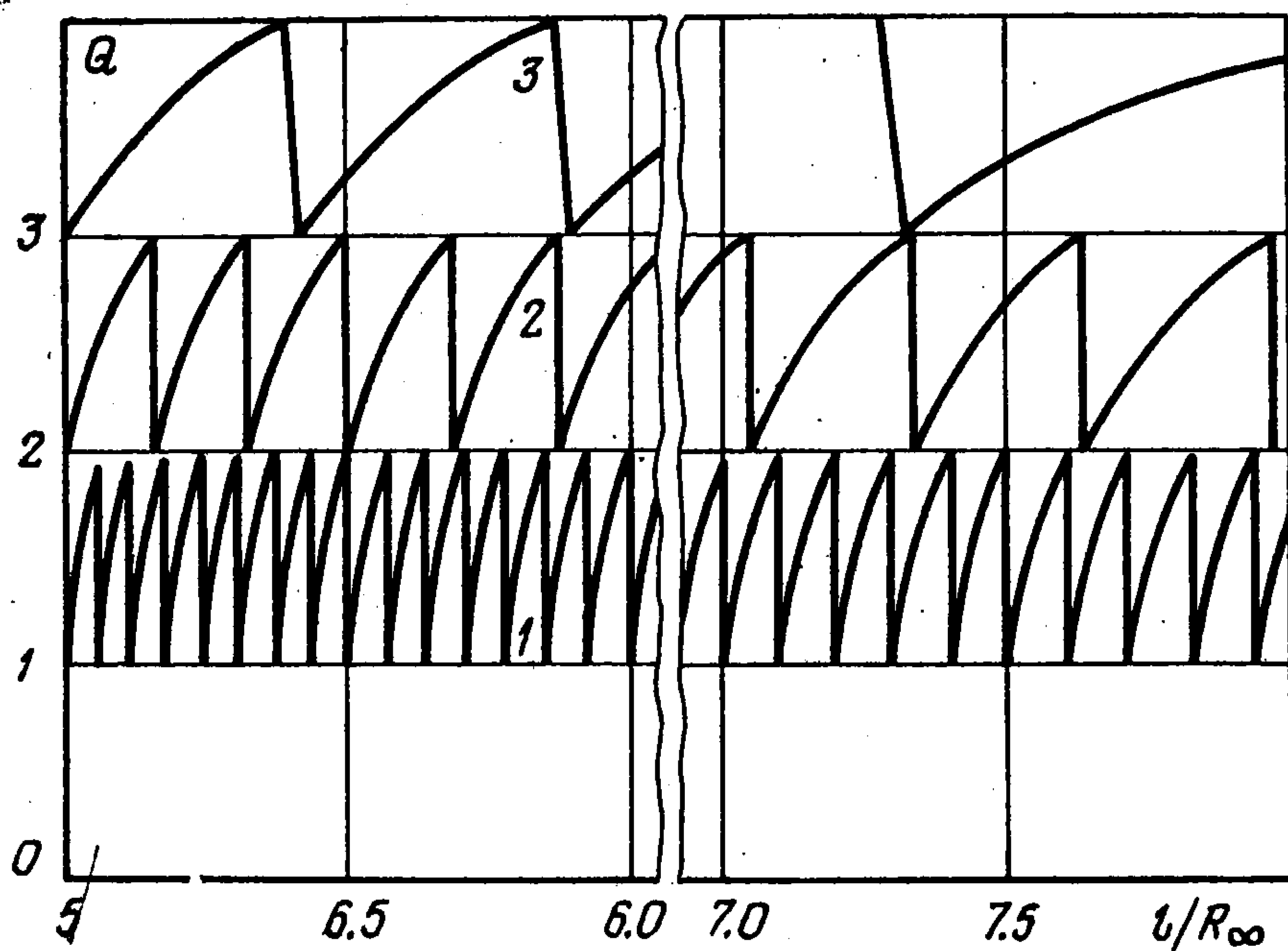
$$(2.3) \quad (dl)_+ = l \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} \left( 2Q + \frac{BQ^2}{Q'} \right) G dQ$$

$$G = \{ \ln(2R_{\infty}/lQ^2) - Q^2 \}^{-1}$$

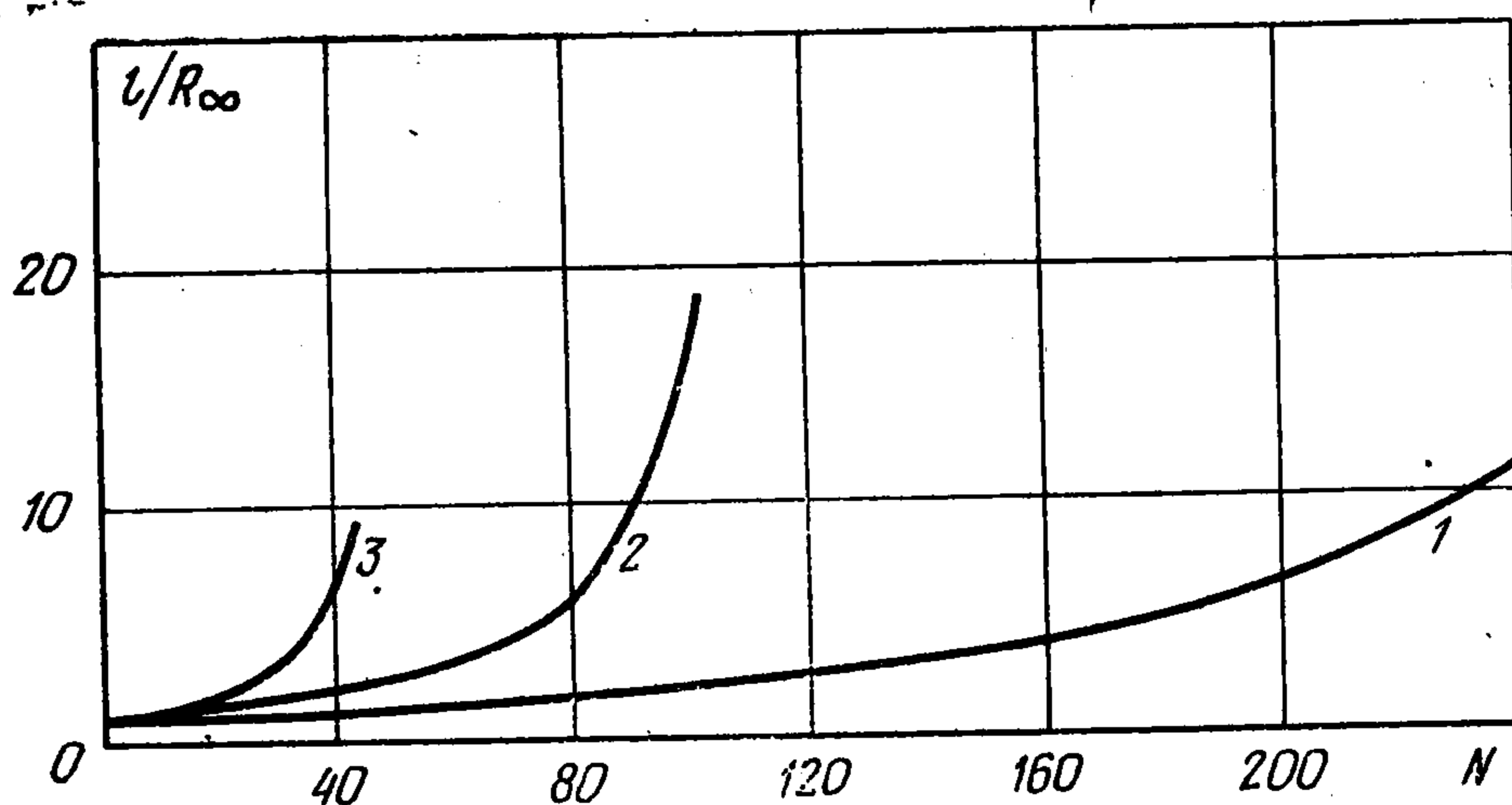
$$(dl)_- = CQ'l \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} \left( \frac{Q^2}{Q'} \right) G dQ$$

$$\frac{dl}{dN} = l \oint \left( 2\alpha Q + \frac{Q^2}{Q'} \right) G dQ$$

Здесь  $N$  — число циклов, коэффициент  $\alpha$  равен единице для восходящего участка цикла нагружения и нулю — для убывающего участка.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3—5 приведены некоторые результаты вычисления интеграла (2.3), когда циклическая нагрузка задается простой пилообразной функцией

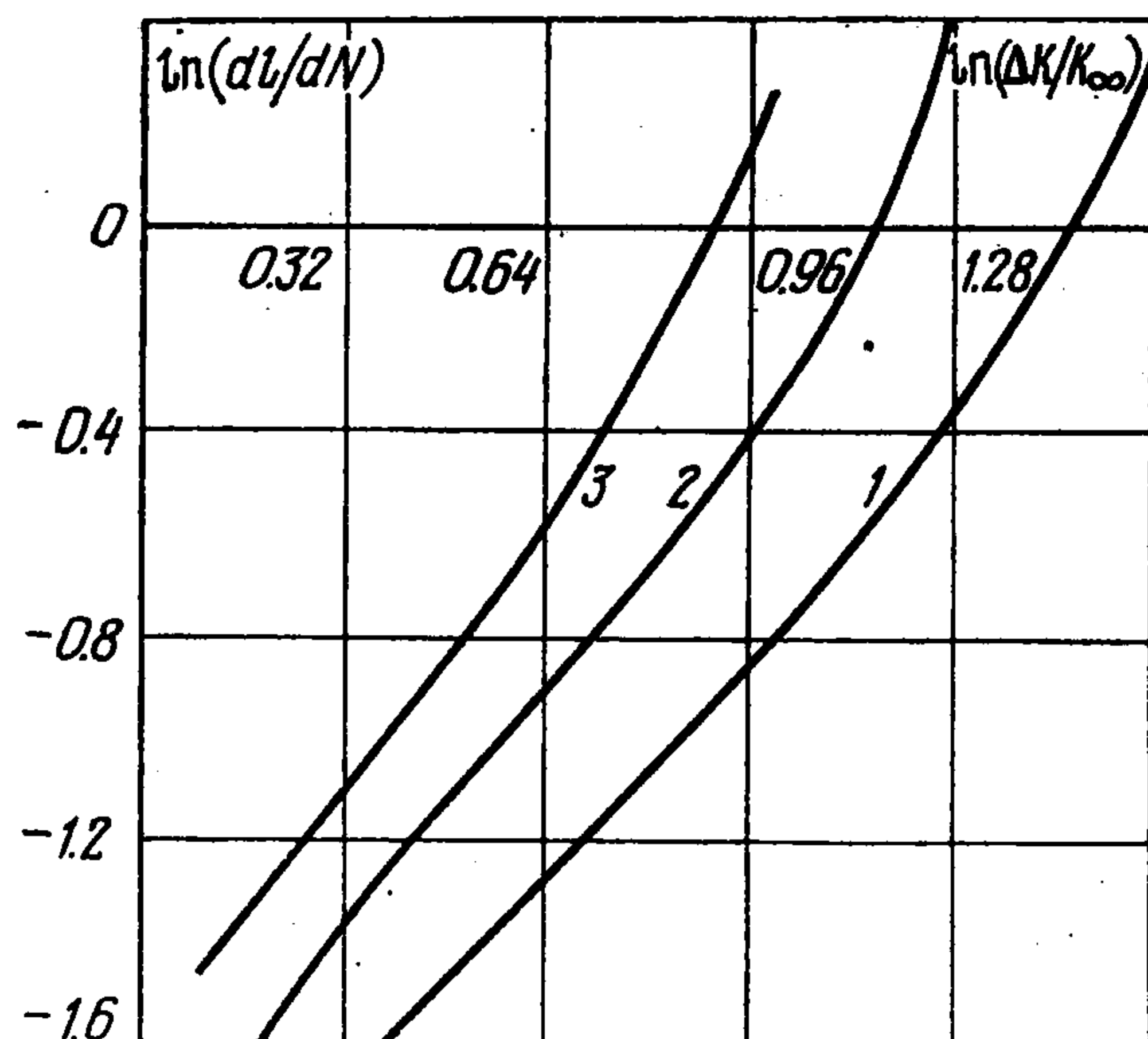
$$Q(t) = \begin{cases} (-nT + t) Q', & nT \leq t \leq (2n+1)T/2 \\ (nT - t) Q', & (2n+1)T/2 \leq t \leq T(n+1) \end{cases}$$

На фиг. 3 по оси абсцисс отложена безразмерная длина трещины  $l/R_{\infty}$ , по оси ординат — безразмерная нагрузка  $Q$ . Численное интегрирование производилось по

методу Рунге — Кутта. Частота нагружения  $\omega = 5 \text{ сек}^{-1}$  ( $Q = \pi^{-1} \text{ сек}^{-1}$ );  $B = 0.1$  (здесь  $B = CQ'$ ),  $Q_{\min} = 0.1, 0.2$  и  $0.3$ ,  $Q_{\max} = 0.2, 0.3$  и  $0.4$  (кривые 1—3 соответственно). Как видно, рост усталостной трещины даже в течение одного цикла является сильно асимметричным процессом.

Роль нисходящей ветви увеличивается при более высоких уровнях нагрузки при большей величине параметра  $C$ .

На фиг. 4 показан рост усталостной трещины в функции числа циклов  $N$ . На фиг. 5 представлена зависимость скорости роста трещины от размаха коэффициента интенсивности напряжений  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  (по оси абсцисс отложена величина  $\ln(\Delta K / K_{\infty})$ ). Условия нагружения на фиг. 3—5 идентичны. [Последний график приведен в логарифмических координатах. Заметим, что в некоторой промежуточной области графики на фиг. 5 близки к линейным. Наклон этих прямых оказался близким к 4.0 в соответствии с законом Пэриса.



Фиг. 5

Для проверки закона Майнера накопления повреждений составлены две программы испытаний с переменной нагрузкой. Результаты испытаний приведены в таблице. Приведенные здесь результаты в целом подтверждают закон Майнера. Отдельно рассмотрим результаты, полученные при экстремальных условиях нагружения.

Пусть первоначально приложена циклическая нагрузка при  $N_i / N_f = 150/202$  (здесь  $N_f$  — долговечность образца (число циклов до разрушения),  $N_i$  — текущее число циклов) и наименьшим уровне нагрузки ( $0.1 \leq Q \leq 0.2$  и  $B = 1$ ). Затем [приложим только половину цикла с наивысшим уровнем нагрузки ( $0.3 \leq Q \leq 0.4$ ). Следовательно,  $\Sigma N_i / N_f = 0.743$ . Таким образом, отклонение от закона Майнера составляет в этом случае около 26%.

Q	B	$N_f$	$N_i$	$\Sigma N_i / N_f$	$N_i$	$\Sigma N_i / N_f$
0.3—0.4	0.01	48	12	1.0267	28	0.988
	0.1	43	11		25	
	1.0	22	6		13	
0.2—0.3	0.01	110	20	1.0282	19	0.981
	0.1	102	18		17	
	1.0	59	11		10	
0.1—0.2	0.01	311	120	1.0285	72	1.003
	0.1	292	113		68	
	1.0	202	77		49	

Пусть теперь первоначально приложена циклическая нагрузка при  $N_i / N_f = 22 / 22$  и при наивысшем уровне нагрузки ( $0.3 \leq Q \leq 0.4$  и  $B = 1$ ). Затем приложим дополнительно 52 цикла при наименьшем уровне нагрузки ( $0.1 \leq Q \leq 0.2$ ). Тогда  $\Sigma N_i / N_f = 1.26$  (отклонение от закона Майнера также составляет 26%). В этих случаях получается сравнительно большое отклонение приведенных выше результатов от закона Майнера. Тем не менее, учитывая специфичность рассмотренных случаев, не следует считать, что  $\Sigma N_i / N_f$  сильно отличается от единицы.

Изложенные результаты являются развитием работ автора [3-6].

Недавно автором<sup>1</sup> получено уравнение близкое по форме к уравнению (1.4), но справедливое в случае, когда размер пластической зоны произволен. В рассматриваемой задаче это уравнение отличается от (1.4) лишь наличием множителя  $R/I$  в правой части. Указанное уравнение интегрируется в замкнутой форме и результат имеет вид

$$R = R_0 \left( \frac{l}{l_0} \right)^{\lambda_0 + 1} \exp \left\{ - \frac{1}{4} \ln^2 \frac{l}{l_0} \right\}$$

$$\lambda_0 = \frac{u_0}{\Delta} \left( \frac{\pi E}{4\sigma_s} \right) - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{l_0}{\Delta}$$

т. е.  $\lambda_0$  зависит от геометрии и согласив материала,

В заключение автор благодарит профессора Джуричича, составившего программы вычислений.

Поступила 6 V 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О росте трещин при циклическом нагружении. ПМТФ, 1968, № 6.
2. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In: Fracture, vol. 2. N. Y., Acad. Press., 1968.
3. Wnuk M. P. Prior-to-failure extension of flows under nonotonic and pulsating loadings. J. Engng Fracture, Mech., 1973, vol. 5, p. 379—397.
4. Wnuk M. P. Slow growth of cracks in a rate sensitive tresca solid. J. Engng Fracture Mech., 1973, vol. 5, No. 3.
5. Wnuk M. P. Quasi-static extension of a tensile crack contained in a viscoelastic—plastic solid. Trans. ASME J. Appl. Mech. Ser. E, 1974, vol. 41, p. 234—242. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж-механ. Сер. E, 1974, т. 41).
6. Wnuk M. P. Fatigue in rate sensitive solids, Internat. J. Fracture Mech., 1974, vol. 10, No. 2, p. 223—226.

<sup>1</sup> Wnuk M. P. Stable and unstable cleavage fracture in fully yielded components. NSF Progress Report. S. Dakota State Univ., June, 1978.