

ЛИТЕРАТУРА

1. Озиранер А. С. Об оптимальной стабилизации движения относительно части переменных. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
2. Румянцев В. В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
4. Озиранер А. С. Об устойчивости положений равновесия твердого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
5. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости относительно части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1972, № 1.
6. Пожарицкий Г. К. О влиянии вязкости на устойчивость равновесия и стационарных вращений твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
7. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И. Г. «Теория устойчивости движения». Доп. 4. М., «Наука», 1966.
8. Озиранер А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
9. Озиранер А. С. Об одноосной стабилизации динамически симметричного спутника на круговой орбите. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.

УДК 539.3

**СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК
ТИПА ТИМОШЕНКО В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ
ПОВЕРХНОСТИ ОТСЧЕТА**

В. Н. Паймушин

(Казань)

Для решения задачи параметризации и определения метрики срединной поверхности оболочки сложной формы предлагается способ, основанный на введении в пространстве некоторой поверхности σ_0 простой геометрии, названной поверхностью отсчета, на которую отображается срединная поверхность σ . Положение точки на σ определяется гауссовыми координатами α^1, α^2 точки на σ_0 и расстоянием $H(\alpha^1, \alpha^2)$ между σ и σ_0 , измеренным по нормали к σ_0 . Разложением вектора перемещений оболочки по векторам базиса на σ , являющегося образом базиса на σ_0 , по теории типа Тимошенко сформулирована нелинейная краевая задача расчета оболочек сложной формы. Указан метод, позволяющий свести задачу исследования незамкнутых «неклассических» оболочек в осях их срединной поверхности к «условно-классической» задаче в осях поверхности отсчета. Предложена теория оболочек, пологих относительно поверхности отсчета, обобщающая классическую теорию пологих оболочек, срединная поверхность которых пологая относительно плоскости.

1. **Отображение срединной поверхности оболочки на поверхность отсчета.** Как известно, если между точками двух поверхностей σ_0 и σ установлено взаимно-однозначное и непрерывное соответствие, то каждой из двух соответствующих точек можно отнести одинаковые значения криволинейных координат. Такая параметризация данных поверхностей называется общей по отношению к рассматриваемому соответствию. При этом уравнения поверхностей, находящихся в общей параметризации, имеют вид $r^\circ = r^\circ(\alpha^1, \alpha^2)$, $r = r(\alpha^1, \alpha^2)$.

В теории оболочек обычно координатную поверхность совмещают со срединной, полагая $r^\circ(\alpha^1, \alpha^2) = r(\alpha^1, \alpha^2)$, что вызывает значительные затруднения при решении задач параметризации и определения метрики срединной поверхности оболочки сложной формы.

Пусть σ — срединная поверхность недеформированной оболочки. Введем в рассмотрение некоторую поверхность σ_0 , отнесенную к ее линиям кривизны α^1, α^2 , которую в дальнейшем назовем поверхностью отсчета.

Будем пользоваться обозначениями и вспомогательными формулами работы [1].

Если r^0 — радиус-вектор некоторой точки $M_0 \in \sigma_0$, а m^0 — единичный вектор нормали к σ_0 в этой точке, то при соответствующем выборе формы и расположения в пространстве поверхности σ_0 положение некоторой точки $M \in \sigma$ можно определить векторным уравнением

$$(1.1) \quad r(\alpha^1, \alpha^2) = r^0(\alpha^1, \alpha^2) + H(\alpha^1, \alpha^2)m^0$$

где H — расстояние между σ_0 и σ . Очевидно, отображение (1.1) будет взаимно-однозначным, если прямая линия, проведенная по нормали к σ_0 в каждой точке σ_0 , пересекает σ не более одного раза. Координатными линиями $\beta^i \in \sigma$ при таком способе параметризации срединной поверхности будут линии, очерчиваемые концом радиус-вектора r при движении точки M_0 по координатным линиям $\alpha^i \in \sigma_0$.

Дифференцируя (1.1) по α^i , с учетом формул $m_{,i}^0 = A_i^0 k_i e_i^0$ найдем координатные векторы основного базиса σ и компоненты метрического тензора (k_i — кривизны координатных линий $\alpha^i \in \sigma_0$)

$$(1.2) \quad r_i = A_i^0 \theta_i (e_i^0 + y_i m^0), \quad e_i^0 = r_i^0 / A_i^0$$

$$(1.3) \quad a_{ik} = r_i r_k = A_i^0 A_k^0 \theta_i \theta_k (\delta_{ik} + y_i y_k) \\ A_i^0 = |r_i^0|, \quad \theta_i = 1 + H k_i, \quad y_i = H_{,i} / (A_i^0 \theta)$$

Представим единичный вектор нормали m к σ в виде разложения

$$(1.4) \quad m = \xi (m^0 = \xi_i e_i^0)$$

где ξ, ξ_1, ξ_2 — неизвестные коэффициенты. Подставляя в скалярные произведения $mm = 1, mr_i = 0$ выражения (1.2), (1.4), найдем

$$(1.5) \quad \xi_i = y_i, \quad \xi = (1 + y_1^2 + y_2^2)^{-1/2}$$

Внося теперь формулы (1.2), (1.4) в выражения b_{ik} , получим

$$(1.6) \quad b_{11} = -A_1^0 \theta_1 \xi (A_1^0 k_1 C_1^2 + y_2 A_{1,2}^0 / A_2^0 - y_{1,1}) \quad (1,2) \\ b_{12} = -A_2^0 \theta_2 \xi (y_1 y_2 A_1^0 k_1 - y_{2,1} + y_1 A_{1,2}^0 / A_2^0) = b_{21}, \quad C_i^2 = 1 + y_i^2$$

Здесь и в дальнейшем символ (1, 2) означает, что невыписанные соотношения получаются из приведенных путем перестановки индексов 1 и 2.

Таким образом, соотношения (1.3) и (1.6) позволяют достаточно просто определить метрику срединной поверхности оболочки σ , если известны метрика поверхности отсчета и расстояние между σ и σ_0 .

2. Соотношения теории среднего изгиба тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета. При исследовании напряженно-деформированного состояния тонких оболочек численными методами удобно использовать соотношения теории оболочек типа Тимошенко, основанные на гипотезе прямой линии. В соответствии с этой гипотезой вектор перемещений некоторой точки P оболочки, находящейся до деформации на уровне z от σ , представим в виде

$$(2.1) \quad \omega^z = v + z\gamma = u_i r^i + w m + z(\gamma_i r^i + \gamma m), \quad -h/2 \leq z \leq h/2$$

Здесь u_i, γ_i — ковариантные компоненты вектора перемещений срединной поверхности σ и вектора поворотов, $r^i = a^{ik} r_k$ — векторы взаимного базиса, h — толщина оболочки. Можно показать, что

$$a^{11} = (\xi C_2 / A_1^0 \theta_1)^2, \quad a^{22} = (\xi C_1 / A_2^0 \theta_2)^2, \quad a^{12} = -\xi y_1 y_2 / A_1^0 A_2^0 \theta_1 \theta_2$$

Радиус-векторы точки P до и после деформации равны $R = r + z m, R^* = R + V^z$. Дифференцируя эти выражения по α^i, z , с учетом (2.1) найдем базисные векторы (при-

няты обозначения статьи [2])

$$(2.2) \quad \begin{aligned} R_i &= (\delta_i^k - z b_i^k) r_{ik}, \quad R_3 = m, \quad R_i^* = R + \partial_i v + z \partial_i \gamma \\ R_3^* &= m + \gamma, \quad \partial_i v = e_{ik} r^k + \omega_i m, \quad \partial_i \gamma = \Omega_{ik} r^k + \Omega_i m \\ e_{ik} &= \nabla_i u_k - b_{ik} w, \quad \omega_i = \nabla_i w + u_k b_i^k \\ \Omega_{ik} &= \nabla_i \gamma_k - b_{ik} \gamma, \quad \Omega_i = \nabla_i \gamma + \gamma_k b_i^k \end{aligned}$$

Приведем некоторые соотношения теории среднего изгиба [1, 2] для случая малых поперечных сдвигов. Изгиб оболочки называется средним, если ее максимальный прогиб одного порядка с толщиной h . Как показано в работе [2], среднему изгибу соответствуют следующие компоненты деформации:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 2\varepsilon_{ik} &= e_{ik} + e_{ki} + \omega_i \omega_k, \quad 2\varepsilon_{i3} = \omega_i + \gamma_i \\ 2\kappa_{ik} &= \Omega_{ik} + \Omega_{ki}, \quad 2\varepsilon_3 = 2\gamma + \gamma_i \gamma^i, \quad \Omega_{ik} = \nabla_i \gamma_k \end{aligned}$$

где ε_{ik} и κ_{ik} — ковариантные компоненты тензоров тангенциальной и изгибной деформации, $2\varepsilon_{i3}$ — поперечные сдвиги, не изменяющиеся по толщине оболочки.

Компоненты деформации оболочки по сдвиговой модели типа Тимошенко равны

$$(2.4) \quad \varepsilon_{ik}^z = \varepsilon_{ik} + z \kappa_{ik}, \quad \varepsilon_{i3}^z = \varepsilon_{i3}$$

Уравнения равновесия, соответствующие компонентам деформации (2.3), можно получить из вариационного уравнения Лагранжа ($\sigma^{33} = 0$, δA — элементарная работа внешних усилий и моментов [1])

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \delta A &= \int_{\sigma_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma^{ik} \delta \varepsilon_{ik}^z + 2\sigma^{i3} \delta \varepsilon_{i3}) d\sigma dz = \\ &= \int_{\sigma_0} [T^{ik} (\delta e_{ik} + \omega_i \delta \omega_k) + M^{ik} \delta \Omega_{ik} + N^i (\delta \omega_i + \delta \gamma_i)] d\sigma \\ \delta A &= \int_{\sigma_0} (X \delta v + M \delta \gamma) d\sigma + \int_C (\Phi^s \delta v + M^s \delta \gamma) ds \end{aligned}$$

Здесь положено $\delta_i^k - z b_i^k \approx \delta_i^k$ и введены усилия и моменты

$$(2.6) \quad T^{ik} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ik} dz, \quad M^{ik} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ik} z dz, \quad N^i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{i3} dz$$

Вариационную формулу (2.5) можно [1] преобразовать к виду

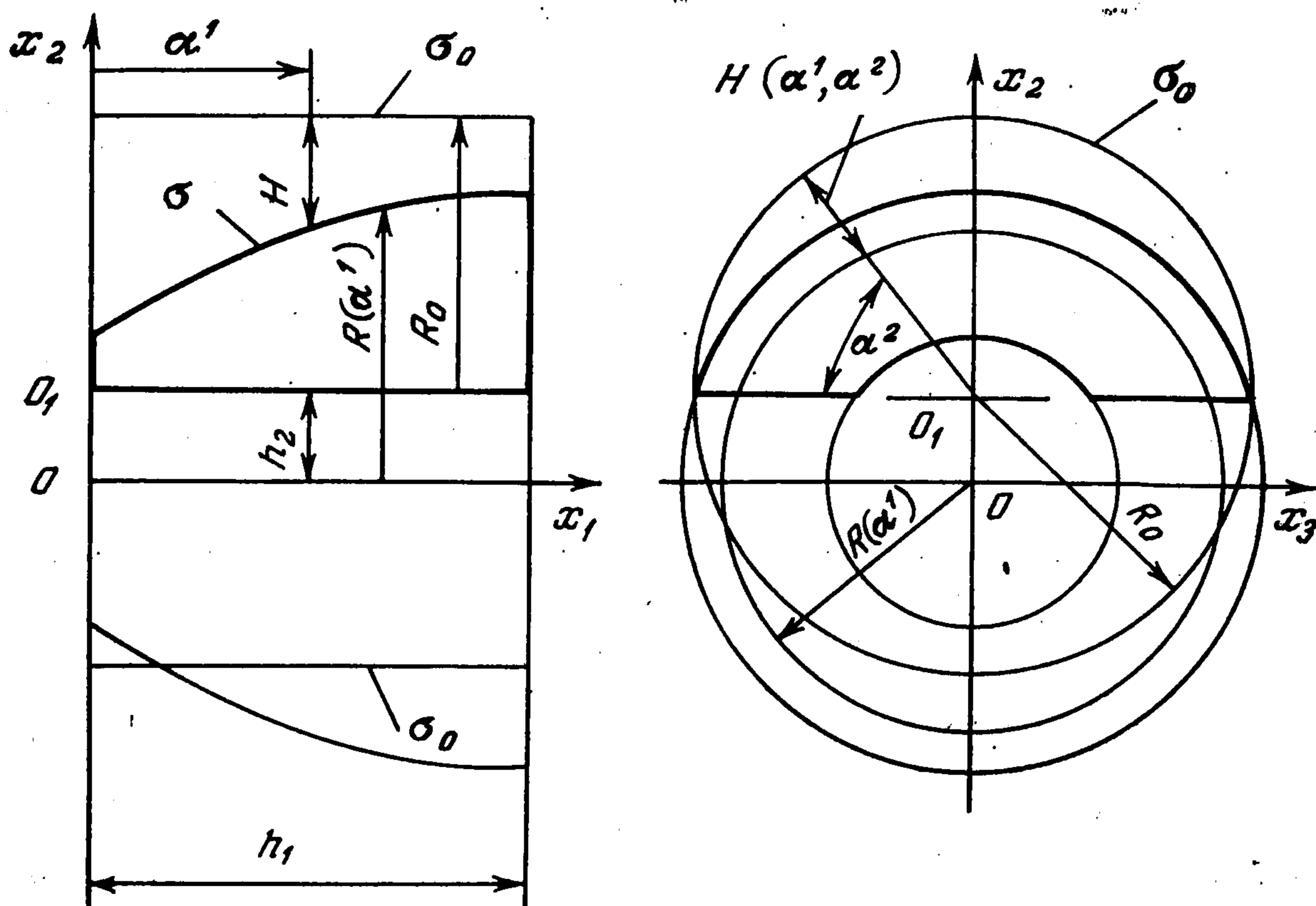
$$(2.7) \quad \int_C [(\Phi - \Phi^s) \delta v + (M - M^s) \delta \gamma] ds - \int_{\sigma_0} (L^i \delta u_i + L^3 \delta w + H^i \delta \gamma_i) d\sigma = 0$$

Отсюда вытекают уравнения равновесия и статические граничные условия

$$(2.8) \quad \begin{aligned} L^i &= \nabla_k T^{ik} - b_k^i N^{k3} + X^i = 0, \quad L^3 = \nabla_k N^{k3} + b_{ik} T^{ik} + X^3 = 0 \\ H^i &= \nabla_k M^{ik} - N^i + M^i = 0, \quad N^{i3} = N^i + T^{ik} \omega_k^i \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \Phi = \Phi^s, \quad M = M^s$$

Изложенный метод исследования оболочек сложной формы позволяет по-новому подойти к расчету широкого класса незамкнутых оболочек с нормальной проекцией контура $C \in \sigma$ на σ_0 , совпадающей с координатными линиями $\alpha^i = 0$, $a_i \in \sigma_0$. Классическим примером этого класса служит оболочка, вырезанная из оболочки вращения сечениями $x_1 = 0$, h_1 и $x_2 = h_2$, показанная на фигуре. Такая оболочка неклассическая, так как две ее контурные линии не совпадают с линиями меридианов поверхности вращения. Однако ее можно свести к классической, если в соответствии с изложенным выбрать в качестве σ_0 круговую цилиндрическую поверхность радиуса R_0 с осью, лежащей в плоскости $x_2 = h_2$ и параллельной оси поверхности вращения.



Выведем граничные условия для указанного класса оболочек. Принимая во внимание, что на координатных линиях $\beta^1 = \text{const} \in C$, являющихся образом координатных линий $\alpha^1 = 0, a_1$, векторы \mathbf{r}_2 касательные, а \mathbf{r}^1 — нормальные к контуру C , представим векторы тангенциальных перемещений \mathbf{v}^t и поворотов $\boldsymbol{\gamma}^t$ в виде $\mathbf{v}^t = u_\tau \mathbf{r}_2 + u_n \mathbf{r}^1$, $\boldsymbol{\gamma}^t = \gamma_\tau \mathbf{r}_2 + \gamma_n \mathbf{r}^1$. Выразим ковариантные компоненты этих векторов через u_τ, u_n, γ_τ и γ_n . Для этого составим векторные равенства

$$(2.10) \quad u_\tau \mathbf{r}_2 + u_n \mathbf{r}^1 = u_i \mathbf{r}^i, \quad \gamma_\tau \mathbf{r}_2 + \gamma_n \mathbf{r}^1 = \gamma_i \mathbf{r}^i$$

Умножая (2.10) скалярно на \mathbf{r}_1 , а затем на \mathbf{r}_2 , находим

$$(2.11) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_\tau a_{12} + u_n, & u_2 &= u_\tau a_{22} \\ \gamma_1 &= \gamma_\tau a_{12} + \gamma_n, & \gamma_2 &= \gamma_\tau a_{22} \quad (1, 2) \end{aligned}$$

Контурный интеграл уравнения (2.7) в рассматриваемом случае с учетом (2.11) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int_C [(\Phi - \Phi^s) \delta \mathbf{v} + (\mathbf{M} - \mathbf{M}^s) \delta \boldsymbol{\gamma}] ds &= \int_0^{a_2} \Lambda_{12} d\alpha^2 \Big|_0^{a_1} + \int_0^{a_1} \Lambda_{21} d\alpha^1 \Big|_0^{a_2} \\ \Lambda_{12} &= (\Phi^1 \sqrt{a} - \Phi_s^1 A_2) \delta \mathbf{v} + (\mathbf{M}^1 \sqrt{a} - M_s^1 A_2) \delta \boldsymbol{\gamma} = \\ &= [(T^{11} a_{12} + T^{12} a_{22}) \sqrt{a} - (\Phi_s^{11} a_{12} + \Phi_s^{12} a_{22}) A_2] \delta u_\tau + \\ &+ (T^{11} \sqrt{a} - \Phi_s^{11} A_2) \delta u_n + (N^{13} \sqrt{a} - \Phi_s^{13} A_2) \delta w + \\ &+ [(M^{11} \sqrt{a} + M^{12} a_{22}) \sqrt{a} - (M_s^{11} a_{12} + M_s^{12} a_{22}) A_2] \delta \gamma_\tau + \\ &+ (M^{11} \sqrt{a} - M_s^{11} A_2) \delta \gamma_n \quad (1, 2) \\ (A_i &= \sqrt{a_{ii}}, \quad \Phi_s^i = \Phi_s^{ik} \mathbf{r}_k + \Phi_s^{i3} \mathbf{m}, \quad M_s^i = M_s^{ik} \mathbf{r}_k + M_s^{i3} \mathbf{m}) \end{aligned}$$

Следовательно, различные варианты статических и геометрических граничных условий на контуре C при $\alpha^i = 0, a_i$ могут быть составлены из

$$(2.12) \quad \begin{aligned} (T^{11} a_{12} + T^{12} a_{22}) \sqrt{a} - (\Phi_s^{11} a_{12} + \Phi_s^{12} a_{22}) A_2 &= 0, & \delta u_\tau &= 0 \\ T^{11} \sqrt{a} - \Phi_s^{11} A_2 &= 0, & \delta u_n &= 0 \\ N^{13} \sqrt{a} - \Phi_s^{13} A_2 &= 0, & \delta w &= 0 \\ (M^{11} a_{12} + M^{12} a_{22}) \sqrt{a} - (M_s^{11} a_{12} + M_s^{12} a_{22}) A_2 &= 0, & \delta \gamma_\tau &= 0 \\ M^{11} \sqrt{a} - M_s^{11} A_2 &= 0, & \delta \gamma_n &= 0 \quad (1, 2) \end{aligned}$$

3. Соотношения теории тонких оболочек, пологих относительно поверхности отсчета. Рассмотрим частный случай, когда на изменение величины H (α^1, α^2) можно наложить условия пологости срединной поверхности оболочки относительно поверхности отсчета $y_i y_k = (A_i^\circ A_k^\circ \theta_i \theta_k)^{-1} H_{,i} H_{,i} \ll 1$; $i, k = 1, 2$

В силу выполнения этих условий в дальнейшем можно ввести ряд упрощений. Прежде всего, с точностью $1 + y_i^2 \approx 1$

$$(3.1) \quad C_i = (1 + y_i^2)^{1/2} \approx 1, \quad \xi = (1 + y_1^2 + y_2^2)^{-1/2} \approx 1$$

Кроме того, координатные линии β^i на σ можно считать ортогональными, полагая (χ — угол между векторами r_1 и r_2)

$$(3.2) \quad \cos \chi = y_1 y_2 / (C_1 C_2) \approx 0, \quad \sin \chi = 1 / (C_1 C_2 \xi) \approx 1$$

Следовательно, основной базис поверхности σ можно считать совпадающим со взаимным.

С учетом (1.5), (3.1) и (3.2) из соотношений (1.2), (1.4) находим

$$(3.3) \quad e_i = r_i / A_i \approx e_i^\circ + y_i m^\circ, \quad m \approx m^\circ - y_1 e_1^\circ - y_2 e_2^\circ$$

а формулы для кривизн k_{ik} координатных линий $\beta^i \in \sigma$ при использовании условий Кодацци $(k_2 A_2^\circ)_{,1} = k_1 A_{2,1}^\circ$ (1, 2) запишутся в виде

$$(3.4) \quad k_{11} = -b_{11} / a_{11} = k_1 / \theta_1 - (A_2^\circ y_{1,1} + y_2 A_{1,2}^\circ) / A_1^\circ A_2^\circ \\ A_1 A_2 k_{12} = -b_{12} = \theta_2 y_1 A_{1,2}^\circ + \theta_1 y_2 A_{2,1}^\circ - H_{,12} \quad (1, 2)$$

где в силу $C_i \approx 1$ коэффициенты $A_i \approx A_i^\circ \theta_i$.

Наконец, учитывая (3.1), (3.2), с использованием условий Кодацци можно получить приближенные формулы дифференцирования

$$(3.5) \quad A_2 e_{1,1} = -A_{1,2} e_2 - A_1 A_2 k_{11} m, \quad A_1 e_{1,2} = A_{2,1} e_2 - A_1 A_2 k_{12} m \\ m_{,1} = A_1 (k_{11} e_1 + k_{12} e_2) \quad (1, 2)$$

которые по внешнему виду совпадают с соответствующими формулами работы [1].

Обозначим через u_i, w, γ_i физические компоненты векторов v и γ : $v = u_i e_i + w m$, $\gamma = \gamma_i e_i + \gamma m$. Тогда, используя формулы (3.3), (3.5), с точностью $1 + y_i y_k \approx 1$ находим физические компоненты тензора деформаций

$$(3.6) \quad 2\varepsilon_{ik} = e_{ik} + e_{ki} + \omega_i \omega_k, \quad 2\varepsilon_{i3} = \omega_i + \gamma_i \\ 2\kappa_{ik} = \Omega_{ik} + \Omega_{ki}$$

где в отличие от (2.3)

$$(3.7) \quad e_{11} = A_1^{-1} u_{1,1} + u_2 A_{1,2} (A_1 A_2)^{-1} + k_{11} w, \quad e_{12} = A_1^{-1} u_{2,1} - \\ - u_1 A_{1,2} (A_1 A_2)^{-1} + k_{12} w, \quad \omega_1 = A_1^{-1} w_{,1} - k_{11} u_1 - k_{12} u_2 \\ \Omega_{11} = A_1^{-1} \gamma_{1,1} + \gamma_2 A_{1,2} (A_1 A_2)^{-1}, \quad \Omega_{12} = A_1^{-1} \gamma_{2,1} - \gamma_2 A_{1,2} (A_1 A_2)^{-1} \quad (1, 2)$$

Уравнения равновесия оболочки (2.8) с точностью $1 + y_i y_k \approx 1$ также можно привести к обычному виду

$$(3.8) \quad L^1 = (A_2 T_{11})_{,1} + (A_1 T_{12})_{,2} + T_{12} A_{1,2} - T_{22} A_{2,1} + A_1 A_2 (N_{i3} k_{1i} + X_1) = 0 \\ L^3 = (A_2 N_{13})_{,1} + (A_1 N_{23})_{,2} - A_1 A_2 (T_{ik} k_{ik} - X_3) = 0 \\ H^1 = (A_2 M_{11})_{,1} + (A_1 M_{12})_{,2} + M_{12} A_{1,2} - M_{22} A_{2,1} + A_1 A_2 (M_1 - N_1) = 0 \quad (1, 2)$$

где приближенно принято $T_{12} = T_{21}$, $M_{12} = M_{21}$, а также введено обозначение $N_{i3} = N_i + T_{ik} \omega_k$. Здесь T_{ik} , M_{ik} , X_i , M_i , N_i — физические компоненты соответствующих им тензоров и векторов.

Граничные условия (2.12) на кромках $\beta^i = \text{const}$ в силу $a_{12} \approx 0$ также принимают весьма простой вид

$$(3.9) \quad T_{ik} - \Phi_{ik}^s = 0, \quad \delta u_k = 0 \\ N_{i3} - \Phi_{i3}^s = 0, \quad \delta w = 0$$

$$M_{ik} = M_{ik}^s = 0, \quad \delta\gamma_k = 0, \quad i, k = 1, 2$$

$$(\Phi_i^s = \Phi_{ik}^s e_k + \Phi_{i3}^s m, \quad M_i^s = M_{ik}^s e_k + M_{i3}^s m)$$

Назовем соотношения (3.6) — (3.9) соотношениями теории среднего изгиба тонких оболочек типа Тимошенко, пологих относительно поверхности отсчета. Пределы применимости этих соотношений определяются предельными значениями углов между координатными векторами g_i и g_i^0 , которые, в свою очередь, выражаются через коэффициенты y_1 и y_2 . При допустимой ошибке вычисления основных факторов, определяющих напряженно-деформированное состояние оболочки, равной $\varepsilon = 0.05$, предельные значения y_i составляют ~ 0.225 , что подтверждается также количественным примером, рассмотренным в статье [3].

Отметим, что уравнения (3.8) можно заменить на приближенные, пренебрегая в первых двух уравнениях перерезывающими усилиями

$$(A_2 T_{11})_{,1} + (A_1 T_{1,2})_2 + T_{12} A_{1,2} - T_{22} A_{2,1} + A_1 A_2 X_1 = 0 \quad (1,2)$$

$$L^3 = 0, \quad H^i = 0, \quad i = 1, 2$$

а формулы для поворотов ω_i заменить на $\omega_i = A_i^{-1} w_{,1}$ для оболочек, срединная поверхность которых пологая относительно плоскости или пологая относительно любой другой поверхности отсчета в указанном выше смысле и делится на большое число пологих частей в классическом смысле.

Поступила 16 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1975.
2. Галимов К. З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
3. Паймушин В. Н., Фирсов В. А. Основные соотношения линейной теории тонких оболочек сложной формы в гауссовых координатах поверхности отсчета. В сб.: Труды семинара по теории оболочек. Тр. Казанск. физ.-техн. ин-та АН СССР, 1975, вып. 6.

УДК 539.375

ДОКРИТИЧЕСКИЙ РОСТ ТРЕЩИН

М. П. В н у к

(США)

Рассматривается модель устойчивого докритического роста сквозных трещин в тонких пластинах при монотонном, а также при циклическом нагружении. Учитываются вязкоупругие свойства материала; пластическая область в постановке Дагдейла считается малой.

1. Монотонное нагружение. Рассмотрим прямолинейную сквозную трещину в тонкой пластине из упругого или вязкоупругого материала. Считаем, что выполняется гипотеза Дагдейла, так что пластические деформации сосредоточены в бесконечно тонком слое на продолжении трещины, причем длина пластической зоны R весьма мала по сравнению с длиной трещины l (см. фиг. 1, где изображена окрестность конца трещины). С увеличением внешней растягивающей нагрузки, перпендикулярной трещине, длина пластической зоны R будет возрастать, а конец трещины будет продвигаться по пластическому слою. Внешние нагрузки будем всегда считать докритическими, так что подрастание трещины является устойчивым.

Вначале рассмотрим случай монотонного нагружения.