Таким образом, решение нелинейного уравнения свелось к решению нескольких линейных уравнений при тех же граничных условиях. Физически это означает, что задача о балке на одностороннем основании свелась к уже решенной задаче о балке на двухстороннем основании с переменной жесткостью постели.

Поступила 15 VIII 1977

УДК 531.36

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

А. С. Озиранер

(Москва)

Результаты, полученные в [1], распространяются на задачу оптимальной стабилизации положения равновесия твердого тела с полостью, содержащей однородную несжимаемую вязкую жидкостью, по отношению к части обобщенных координат, обобщенным скоростям и кинетической энергии жидкости.

1. Рассмотрим твердое тело, имеющее односвязную полость, которая частично или целиком заполнена однородной несжимаемой вязкой жидкостью. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ $(n \leqslant 6)$ — обобщенные координаты системы. Предположим, что наложенные связи не зависят от времени и на систему действуют потенциальные силы, а также некоторые дополнительные силы вида [2]

$$Q_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij}(\mathbf{q})\, w_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) \tag{1.1}$$

(w_j — управляющие воздействия); силой поверхностного натяжения пренебрегаем. Уравнения движения примем в виде [3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i + \sum_{j=1}^{r} m_{ij} w_j \quad (i = 1, \ldots, n \leqslant 6) \tag{1.2}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнения Навье — Стокса, неразрывности и соответствующие граничные и начальные условия.

Взяв в качестве функции Ляпунова полную энергию $H = T + U$ системы, получим

$$H^\cdot = -\int_\tau E\, d\tau + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} m_{ij} w_j q_i^\cdot \tag{1.3}$$

$$E = 2\mu \sum_{i,\,j=1}^{3} e_{ij}^2, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Здесь $\mathbf{v}$ (v_1, v_2, v_3) — вектор скорости жидкости относительно неподвижной системы координат; $x_1 x_2 x_3$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом; в дальнейшем через $\mathbf{u}$ (u_1, u_2, u_3) — обозначается вектор скорости жидкости в этой системе.

Предположим, что [1, 4]

1) уравнения движения (1.2) при $w_j = 0$ допускают частное решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\cdot = 0$, $\mathbf{v} = 0$ (положение равновесия);

2) потенциальная энергия U определенно-положительна относительно $q_1, \ldots, q_m$ $(m < n)$; при этом в силу (1.3) при $w_j = 0$ положение равновесия устойчиво по отношению к $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}, T_2$ (T_2 — кинетическая энергия жидкости);

3) координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ — угловые (mod 2π), и все величины, входящие в систему (1.2), и функция H 2π-периодичны по $q_{m+1}, \ldots, q_n$; при этом можно считать, что в возмущенном движении $q_{m+1}(t), \ldots, q_n(t)$ ограничены [4,5];

4) при $w_j = 0$ в множестве $U > 0$ нет положений равновесия.

Следуя [2], поставим задачу (ср. с [1]) нахождения управляющих воздействий $w_j = w_j^{\circ}$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}, T_2$ положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0, \mathbf{v} = 0$ и минимизирующих функционал

$$J = \int_0^{\infty} \left(\psi + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} w_i w_j\right) dt \tag{1.4}$$

в котором ψ — подлежащая определению неотрицательная функция, а квадратичная форма — определенно-положительная функция управляющих воздействий.

В качестве класса $K = \{\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\}$ управлений $\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ рассмотрим множество непрерывных функций $\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$, удовлетворяющих условию [1]

$$w_j = 0 \quad \text{при} \quad q_1 = \ldots = q_m = q_1^{\cdot} = \ldots = q_n^{\cdot} = 0 \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.5}$$

Далее, как и в работах [4,6], будут введены некоторые предположения о характере возмущенных движений.

Сделаем непрерывную замену переменных [6]

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3), \quad \nu = \nu(x_1, x_2, x_3), \quad \tau = W(x_1, x_2, x_3)$$

и пусть уравнение боковой стенки $\nu(x_1, x_2, x_3) = \beta_0 = \text{const}$, а уравнение свободной поверхности жидкости при каждом $\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) \in K$ представимо в виде $\tau - \alpha_0 = \varkappa(t, \lambda, \nu)$, $\alpha_0 = \text{const}$.

Считается, что при каждом $\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) \in K$ заданием в начальный момент $t = t_0$ значений

$$\mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}_0^{\cdot}, \quad u_i(t_0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3), \quad \varkappa(t_0, \lambda, \nu)$$

причем $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, последующее движение системы определено однозначно.

Пусть при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ в каждом возмущенном движении уклонение ∇ удовлетворяет условию [3] $\nabla > \varepsilon l$.

Допустим, что при каждом $\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) \in K$ выполняются следующие предположения.

А. [4] в каждом возмущенном движении

$$\|\mathbf{u}\| \leqslant M, \quad \|\mathbf{u}^{\cdot}\| \leqslant M, \quad |e_{ij}| \leqslant M, \quad |e_{ij}^{\cdot}| \leqslant M$$

$$|\partial e_{ij} / \partial x_s| \leqslant M, \quad |\partial u_i / \partial x_j| \leqslant M \quad (s, j, s = 1, 2, 3; M = \text{const})$$

Б. [4,6] Функция $\varkappa(t, \lambda, \nu)$ непрерывна по λ, ν равномерно относительно $t \geqslant 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $|\lambda' - \lambda''| < \delta$, $|\nu' - \nu''| < \delta$ следует $|\varkappa(t, \lambda', \nu) - \varkappa(t, \lambda'', \nu'')| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

В. [4,6] Функция H непрерывно зависит от начальных условий, т. е. для любых $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ существует $\delta(\varepsilon, \theta) > 0$, такое, что из

$$\|\mathbf{q}_0' - \mathbf{q}_0''\| < \delta, \quad \|\mathbf{q}_0'^{\cdot} - \mathbf{q}_0''^{\cdot}\| < \delta, \quad |\varphi_i'(x_1, x_2, x_3) - \varphi_i''(x_1, x_2, x_3)| < \delta$$
$$|\varkappa'(0, \lambda, \nu) - \varkappa''(0, \lambda, \nu)| < \delta$$

следует

$$|H(\mathbf{q}'[\theta], \mathbf{q}'^{\cdot}[\theta], \mathbf{u}'[\theta], \varkappa'[\theta]) - H(\mathbf{q}''[\theta], \mathbf{q}''^{\cdot}[\theta], \mathbf{u}''[\theta], \varkappa''[\theta])| < \varepsilon$$

Рассмотрим выражение [7] $B[H, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = H^{\cdot} + \omega$, в котором ω — подынтегральная функция из (1.4), а функция $H^{\cdot}$ определяется выражением (1.3).

Исходя из условий $B[H, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{v}, \mathbf{w}^{\circ}] = 0$ и $B = [H, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \geqslant 0$ для всех $\mathbf{w} \in K$, аналогично [2] можно показать, что оптимальные управляющие воздействия

$w_j{}^\circ$ и функция ψ имеет вид (Δ_{kj} — алгебраическое дополнение элемента β_{kj})

$$(1.6)\qquad w_j{}^\circ = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\frac{\Delta_{kj}}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} m_{ik}q_i{}^{\cdot} \quad (\Delta = \det\|\beta_{ij}\|)$$

$$(1.7)\qquad \psi = \int_\tau E\,d\tau + S, \quad S = \sum_{i,\,j=1}^{r}\beta_{ij}w_i{}^\circ w_j{}^\circ$$

Предположим, что квадратичная форма S определенно-положительна относительно $q_1{}^{\cdot}, \ldots, q_n{}^{\cdot}$. Учитывая, что (ср. с [2])

$$H^{\cdot}\big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^\circ} = -\int_\tau E\,d\tau - 2S$$

на основании [4] заключаем, что положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ при $w_j = w_j{}^\circ$ асимптотически устойчиво относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1{}^{\cdot}, \ldots, q_n{}^{\cdot}, T_2$, причем $\lim H(q^\circ[t], q^{\cdot\circ}[t], \mathbf{u}^\circ[t], \varkappa^\circ[t]) = 0$ при $t \to \infty$.

Замечание. Поскольку E — определенно-положительная квадратичная форма компонент тензора скоростей деформаций, первое слагаемое в формуле для ψ (см. (1.7)) играет по отношению к жидкости роль, аналогичную роли S по отношению к обобщенным скоростям. Таким образом, функция ψ в (1.4), характеризует скорость затухания как обобщенных скоростей, так и относительного движения жидкости.

Пусть теперь $w_j{}^* \in K$ — какие-либо управляющие воздействия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1{}^{\cdot}, \ldots, q_n{}^{\cdot}, T_2$. Покажем что

$$(1.8)\qquad \lim_{t\to\infty} H(q^*[t], q^{\cdot *}[t], \mathbf{u}^*[t], \varkappa^*[t]) = 0$$

Допустим противное. Для любой последовательности $t_s \to \infty$ последовательность функций $\{\varkappa^*[t_s, \lambda, \nu]\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна (см. предположение Б), поэтому в силу теоремы Арцела из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, для некоторой последовательности $t_k \to \infty$ в силу условий 3) и (1.5)

$$\mathbf{q}^*[t_k] \to \mathbf{q}_*, \quad \mathbf{q}^{\cdot *}[t_k] \to 0, \quad \mathbf{u}^*[t_k] \to 0, \quad \varkappa^*[t_k, \lambda, \nu] \to \varkappa_*(\lambda, \nu), \quad \mathbf{w}^*[t_k] \to 0.$$

Очевидно, что точка ($\mathbf{q}_*$, $\mathbf{q}^{\cdot} = 0$, $\mathbf{u} = 0$, $\varkappa = \varkappa_*$, $\mathbf{w} = 0$) положение равновесия, в этой точке $T = 0$ и, следовательно, если равенство (1.8) места не имеет, то в этой точке $U > 0$, что противоречит предположению 4).

Применяя теорему 2 работы [1], приходим к следующему выводу: управляющие воздействия (1.6) разрешают задачу об оптимальной стабилизации относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1{}^{\cdot}, \ldots, q_n{}^{\cdot}, T_2$ положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ при критерии качества управления (1.4), (1.7).

Замечания. 1) Рассматриваемая система имеет бесконечное число степеней свободы. Однако доказательство теоремы 2 работы [1] в данном случае сохраняется.

2) Этот результат остается в силе, если квадратичная форма S постоянно-положительна по $q_1{}^{\cdot}, \ldots, q_n{}^{\cdot}$, а в множестве [1,8] $(H > 0) \cap (S = 0)$ нет движений всей системы как одного твердого тела (необходимые и достаточные условия наличия такого движения даются теоремой [2]).

2. *Пример 1* [9]. Рассмотрим вопрос об оптимальной стабилизации движений динамически симметричного спутника, при которых центр масс спутника вращается по круговой орбите вокруг притягивающего центра, а ось симметрии перпендикулярна плоскости орбиты центра масс. Предположим, что в корпусе спутника имеется полость, целиком заполненная однородной несжимаемой вязкой жидкостью. Сохраняются обозначения и постановка задачи работы [9]. Пусть управляющий момент, соответствую-

щий координате ψ_1, и минимизируемый функционал имеют вид (2.1) и (2.2)

$$Q_{\psi_1} = mw \tag{2.1}$$

$$J = \int_0^\infty (\psi + \beta w^2)\, dt \tag{2.2}$$

Согласно (1.7) и (1.8) находим

$$w^\circ = -\frac{m}{2\beta}\psi_1^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{2.3}$$

$$\psi = \int_\tau E\, d\tau + \frac{m^2}{4\beta_i}\psi_1^{\boldsymbol{\cdot}2} \tag{2.4}$$

В случае, когда в теле отсутствует полость с жидкостью, полученные в п. 1 результаты совпадают с примером из [1]. В качестве иллюстрации рассмотрим вопрос об оптимальной стабилизации движений абсолютно твердого динамически симметричного спутника, при которых центр масс вращается по круговой орбите, а ось симметрии ориентирована на притягивающий центр либо перпендикулярно плоскости орбиты центра масс [9].

Пример 2. Исследуем сначала вопрос об оптимальной стабилизации оси динамической симметрии на притягивающий центр (см. п. 1 работы [9]). Пусть управляющие моменты, соответствующие координатам ψ_1 и ψ_2, и минимизируемый функционал имеют вид

$$Q_{\psi_1} = m_1 w_1, \quad Q_{\psi_2} = m_2 w_2 \tag{2.5}$$

$$J = \int_0^\infty (\psi + \beta^{(1)} w_1^2 + \beta^{(2)} w_2^2)\, dt \tag{2.6}$$

Согласно [1, 2] (ср. с (1.9) и (1.10)), находим

$$w_1^\circ = -\frac{m_1}{2\beta^{(1)}}\psi_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad w_2^\circ = -\frac{m_2}{2\beta^{(2)}}\psi_2^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{2.7}$$

$$\psi = \frac{m_1^2}{4\beta^{(1)}}\psi_1^{\boldsymbol{\cdot}2} + \frac{m_2^2}{4\beta^{(2)}}\psi_2^{\boldsymbol{\cdot}2} \tag{2.8}$$

Рассмотрим теперь вопрос об оптимальной стабилизации оси динамической симметрии перпендикулярно плоскости орбиты [9]. Пусть управляющие моменты, соответствующие координатам φ_1, φ_2, ψ_1, и минимизируемый функционал имеют вид

$$Q_{\varphi_1} = m_1 w_1, \quad Q_{\varphi_2} = m_2 w_2, \quad Q_{\psi_1} = m_3 w_3 \tag{2.9}$$

$$J = \int_0^\infty (\psi + \beta^{(1)} w_1^2 + \beta^{(2)} w_2^2 + \beta^{(3)} w_3^2)\, dt \tag{2.10}$$

Далее аналогично предыдущему получаем

$$w_1^\circ = -\frac{m_1}{2\beta^{(1)}}\varphi_1^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad w_2^\circ = -\frac{m_2}{2\beta^{(2)}}\varphi_2^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad w_3^\circ = -\frac{m_3}{2\beta^{(3)}}\psi_1^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{2.11}$$

$$\psi = \frac{m_1^2}{4\beta^{(1)}}\varphi_1^{\boldsymbol{\cdot}2} + \frac{m_2^2}{4\beta^{(2)}}\varphi_2^{\boldsymbol{\cdot}2} + \frac{m_3^2}{4\beta^{(3)}}\psi_1^{\boldsymbol{\cdot}2} \tag{2.12}$$

Примеры 1 и 2 показывают, что используемые в [9] законы стабилизации в виде диссипативных сил оптимальны по отношению к функционалам ((2.2), (2.4)), ((2.6), (2.8)), ((2.10), (2.12)), если в [9] в качестве функции Релея принять $f = m^2\psi_1^{\boldsymbol{\cdot}2} / 4\beta$ для примера 1 и аналогичные выражения для f в задачах, рассмотренных в примере 2.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 21 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Озиранер А. С.* Об оптимальной стабилизации движения относительно части переменных. ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
2. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
4. *Озиранер А. С.* Об устойчивости положений равновесия твердого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
5. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости относительно части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1972, № 1.
6. *Пожарицкий Г. К.* О влиянии вязкости на устойчивость равновесия и стационарных вращений твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
7. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И. Г. «Теория устойчивости движения». Доп. 4. М., «Наука», 1966.
8. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
9. *Озиранер А. С.* Об одноосной стабилизации динамически симметричного спутника на круговой орбите. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.

УДК 539.3

СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ ПОВЕРХНОСТИ ОТСЧЕТА

В. Н. Паймушин

(Казань)

Для решения задачи параметризации и определения метрики срединной поверхности оболочки сложной формы предлагается способ, основанный на введении в пространстве некоторой поверхности σ_0 простой геометрии, названной поверхностью отсчета, на которую отображается срединная поверхность σ. Положение точки на σ определяется гауссовыми координатами α^1, α^2 точки на σ_0 и расстоянием $H(\alpha^1, \alpha^2)$ между σ и σ_0, измеренным по нормали к σ_0. Разложением вектора перемещений оболочки по векторам базиса на σ, являющегося образом базиса на σ_0, по теории типа Тимошенко сформулирована нелинейная краевая задача расчета оболочек сложной формы. Указан метод, позволяющий свести задачу исследования незамкнутых «неклассических» оболочек в осях их срединной поверхности к «условно-классической» задаче в осях поверхности отсчета. Предложена теория оболочек, пологих относительно поверхности отсчета, обобщающая классическую теорию пологих оболочек, срединная поверхность которых полога относительно плоскости.

1. Отображение срединной поверхности оболочки на поверхность отсчета. Как известно, если между точками двух поверхностей σ_0 и σ установлено взаимно-однозначное и непрерывное соответствие, то каждой из двух соответствующих точек можно отнести одинаковые значения криволинейных координат. Такая параметризация данных поверхностей называется общей по отношению к рассматриваемому соответствию. При этом уравнения поверхностей, находящихся в общей параметризации, имеют вид $\mathbf{r}^\circ = \mathbf{r}^\circ(\alpha^1, \alpha^2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2)$.

В теории оболочек обычно координатную поверхность совмещают со срединной, полагая $\mathbf{r}^\circ(\alpha^1, \alpha^2) = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2)$, что вызывает значительные затруднения при решении задач параметризации и определения метрики срединной поверхности оболочки сложной формы.