УДК 531.011

О РЕАКЦИЯХ В СИСТЕМАХ С ОДНОСТОРОННИМИ ОПОРАМИ

Г. И. Яковлев

(Москва)

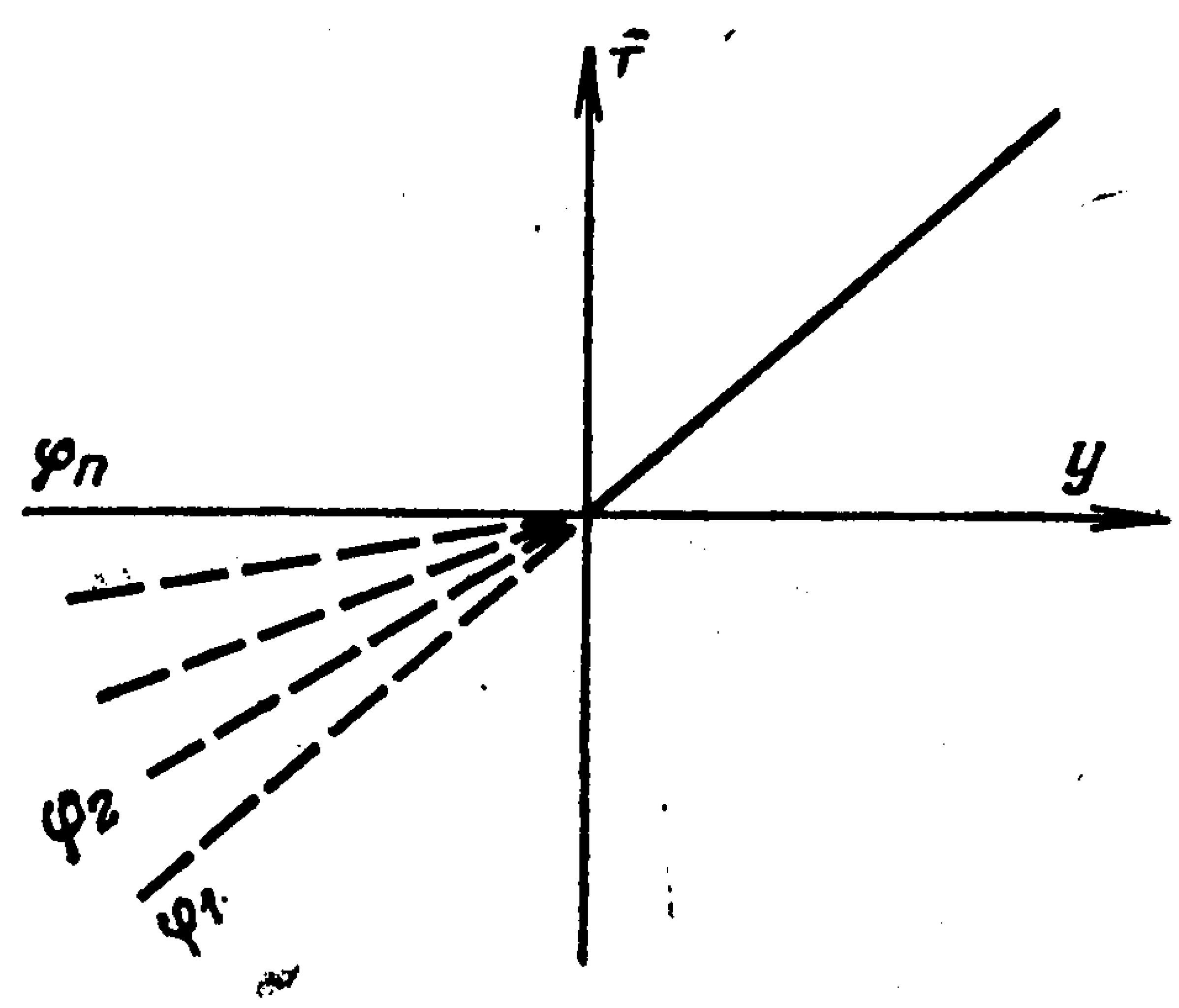
Рассматривается работа систем с односторонними опорами, точечными и непрерывными. В случае дискретных опор задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. В случае упругого основания задача приводится к решению линейных уравнений с переменными коэффициентами и с теми же граничными условиями, что и в исходной задаче.

1. Точечные опоры. Предлагается способ нахождения опорных реакций при односторонних точечных опорах.

Если обозначить через x_i реакцию в i-й опоре, а через y расстояние от тела до i-й опоры (которое всегда можно считать положительным), то задача сведется к решению системы n линейных уравнений

$$A\bar{x} + B\bar{y} + \bar{b} = 0 \tag{1.1}$$

с $2n$ неизвестными x_i и y_i при условиях: $x_i \geqslant 0$ при $y_i = 0$ и $y_i \geqslant 0$ при $x_i = 0$ (решение должно лежать хотя бы на одной из координатных полуосей). В реальных технических задачах свойства матриц A и B таковы, что решение существует и единственно.



Вначале делается замена переменных $x_i = \alpha u_i + \beta v_i$, $y_i = \gamma u_i + \delta v_i$, и система приводится к виду

$$C\bar{u} + D\bar{v} + \bar{h} = 0 \tag{1.2}$$

при условиях: $\alpha u_i + \beta v_i \geqslant 0$ при $\gamma u_i + \delta v_i = 0$ и $\gamma u_i + \delta v_i \geqslant 0$ при $\alpha u_i + \beta v_i = 0$. Геометрически это означает, что решение должно лежать на двух лучах, т. е. в фазовом пространстве на поверхности, образованной плоскостями. Аналитически это означает, что решение ищется на поверхности $\bar{u} = \bar{f}(\bar{v})$.

Для технического нахождения решения конструируем систему поверхностей, зависящую от параметра

$$\bar{u} = \bar{\varphi}(k, \bar{v}) \tag{1.3}$$

такую, что при $k = k_2$ система превращается в $\bar{u} = \bar{\varphi}(k_2, \bar{v}) \equiv \bar{f}(v)$, а при $k = k_1$ — в линейную зависимость

$$\bar{u} = \bar{\varphi}(k_1, \bar{v}) \equiv a\bar{v} \tag{1.4}$$

Функция $\bar{u}$ должна иметь непрерывные частные производные по всем аргументам: этого можно добиться, если слегка округлить угол на фигуре.

Подставив (1.4) в (1.2), можно найти $\bar{v}_1$ и $\bar{u}_1 = a\bar{v}_1$. Положим, что известно решение системы при каком-нибудь значении параметра k. Найдем решение при значении $k + dk$.

Используя (1.2), получим

$$C\bar{\varphi}(k + dk,\ \bar{v} + d\bar{v}) + D(\bar{v} + d\bar{v}) + \bar{h} = C\bar{\varphi}(k, \bar{v}) +$$
$$+ C\left[\frac{\partial\varphi}{\partial k}(k, \bar{v})\, dk + \frac{\partial\bar{\varphi}(k, \bar{v})}{\partial\bar{v}}\, d\bar{v}\right] + D(\bar{v} + d\bar{v}) + \bar{h} + \ldots$$

Многоточием обозначены члены высших порядков, равные $C\overline{\varphi}_k(k, \bar v)dk + [C\overline{\varphi}_{\bar v}'(k, \bar v) + D]d\bar v + 4Bn = 0$.

Переходя к пределу, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$[C\overline{\varphi}_{\bar v}(k, \bar v) + D]\,\frac{d\bar v}{dk} + C\overline{\varphi}_k(k, \bar v) = 0$$

При $k = k_1$ известно $\bar v_1$. Нужно найти решение этой системы $\bar v_2$ при значении $k = k_2$. Если при интегрировании системы на интервале $[k_1, k_2]$ матрица $E = C\overline{\varphi}_v(k, \bar v) + D$ нигде не равна нулю, то при обычных ограничениях на систему (условии Липшица и т. д.) решение существует и однозначно. Значение $\bar u_2$ определяется тогда из (1.3): $\bar u_2 = \overline{\varphi}(k_2, \bar v_2)$. Возвращаясь к переменным $\bar x$ и $\bar y$, получим решение задачи.

2. Балка на упругом основании. Уравнение равновесия балки на упругом одностороннем основании запишем в виде $d^4y / dx^4 + f(y) = 0$, где y — перемещение балки, а функция $f(y)$ изображена на фигуре.

Трудность заключается в удовлетворении многим граничным условиям. Предлагается функцию $f(y)$ включить в семейство зависящих от параметра φ функций $F(\varphi, y)$, причем так, чтобы при $\varphi = \varphi_1$ была бы линейная зависимость $F(\varphi_1, y) \equiv ky$, а при $\varphi = \varphi_n$ — заданная функция $f(y)$, т. е. $F(\varphi_n, y) \equiv f(ly)$.

Функция $F(\varphi, y)$ должна иметь непрерывные первые частные производные по аргументам: ее можно сконструировать различными способами, если немного округлить излом в районе нуля, что для практики несущественно.

Если известно решение задачи $\partial^4 y(\varphi, x) / \partial x^4 + F(\varphi, x) = 0$ при каком-то одном значении параметра φ, то при изменении его на $d\varphi$ значение ординат изменится на dy.

Уравнение связи будет таким:

$$\frac{\partial^4 y(x, \varphi + d\varphi)}{\partial x^4} + F(\varphi + d\varphi, y + dy) = \frac{\partial^5 y(x, \varphi)}{\partial x^4 \partial\varphi}\, d\varphi + \frac{\partial F(\varphi, y)}{\partial\varphi}\, d\varphi + \frac{\partial F(\varphi, y)}{\partial y}\, dy = 0$$

$$\left[\frac{\partial^5 y(\varphi, x)}{\partial x^4 \partial\varphi} + F_\varphi(\varphi, y)\right] d\varphi + F_y(\varphi, y)\, dy = 0$$

Полученное уравнение в частных производных решается методом прямых.

Задавшись рядом значений параметра $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, можно определить соответствующие этим значениям функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ из уравнений

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} - ky_1 = 0$$

$$\left[\frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + F_\varphi(\varphi_1, y_1)\right](\varphi_2 - \varphi_1) + F_y(\varphi_1, y_1)(y_2 - y_1) = 0$$

$$\left[\frac{\partial^4 y_n}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 y_{n-1}}{\partial x^4} + F_\varphi(\varphi_{n-1}, y_{n-1})\right](\varphi_n - \varphi_{n-1}) + F_y(\varphi_{n-1}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) = 0$$

Каждое из уравнений линейное, с переменным коэффициентом и с правой частью; их нужно решать при заданных одних и тех же граничных условиях.

Поскольку здесь вычисляются малые разности, то следует их вычислять непосредственно, т. е. систему лучше записать в следующей форме:

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} + ky_1 = 0, \quad y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

$$\frac{d^4(\Delta y_k)}{dx^4} + F_y(\varphi_k, y_k)\,\Delta y_k = -F_\varphi(\varphi_k, y_k)(\varphi_{k+1} - \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Таким образом, решение нелинейного уравнения свелось к решению нескольких линейных уравнений при тех же граничных условиях. Физически это означает, что задача о балке на одностороннем основании свелась к уже решенной задаче о балке на двухстороннем основании с переменной жесткостью постели.

Поступила 15 VIII 1977

УДК 531.36

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

А. С. Озиранер

(Москва)

Результаты, полученные в [1], распространяются на задачу оптимальной стабилизации положения равновесия твердого тела с полостью, содержащей однородную несжимаемую вязкую жидкостью, по отношению к части обобщенных координат, обобщенным скоростям и кинетической энергии жидкости.

1. Рассмотрим твердое тело, имеющее односвязную полость, которая частично или целиком заполнена однородной несжимаемой вязкой жидкостью. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ $(n \leqslant 6)$ — обобщенные координаты системы. Предположим, что наложенные связи не зависят от времени и на систему действуют потенциальные силы, а также некоторые дополнительные силы вида [2]

$$Q_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij}(\mathbf{q})\, w_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot) \tag{1.1}$$

(w_j — управляющие воздействия); силой поверхностного натяжения пренебрегаем. Уравнения движения примем в виде [3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i + \sum_{j=1}^{r} m_{ij} w_j \quad (i = 1, \ldots, n \leqslant 6) \tag{1.2}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнения Навье — Стокса, неразрывности и соответствующие граничные и начальные условия.

Взяв в качестве функции Ляпунова полную энергию $H = T + U$ системы, получим

$$H^\cdot = -\int_\tau E\, d\tau + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} m_{ij} w_j q_i^\cdot \tag{1.3}$$

$$E = 2\mu \sum_{i,\,j=1}^{3} e_{ij}^2, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Здесь $\mathbf{v}$ (v_1, v_2, v_3) — вектор скорости жидкости относительно неподвижной системы координат; $x_1x_2x_3$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом; в дальнейшем через $\mathbf{u}$ (u_1, u_2, u_3) — обозначается вектор скорости жидкости в этой системе.

Предположим, что [1, 4]

1) уравнения движения (1.2) при $w_j = 0$ допускают частное решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\cdot = 0$, $\mathbf{v} = 0$ (положение равновесия);