Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.374

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

П. П. Мосолов

(Москва)

Дается доказательство эквивалентности дифференциальной и вариационной постановок задач о движении вязкопластической среды при наличии областей жесткого состояния среды и областей течения. Из предложенного доказательства вытекает совпадение верхней грани статических коэффициентов предельной нагрузки с нижней гранью кинематических коэффициентов предельной нагрузки для жесткопластического тела.

Ранее, в общем случае было известно лишь неравенство между этими гранями. Эквивалентность соответствующих постановок задач ранее была известна в случае нелинейно-вязких жидкостей, обладающих диссипативным потенциалом (она непосредственно следует из общих теорем вариационного исчисления). Исследование корректности постановок задач в дифференциальной форме проведено в [1] методом вариационных неравенств для нескольких частных случаев движения вязкопластической среды с диссипативным потенциалом Мизеса.

1. Функционалы интегрального типа и их субдифференциалы. Пусть $\Phi(e)$ — выпуклый, конечный функционал на банаховом пространстве B, E — замкнутое линейное многообразие в B, т. е. $E = e_0 + H$, где e_0 — какой-нибудь элемент из E, H — замкнутое подпространство в B. Линейный, непрерывный функционал $L(e)$ называется опорным к $\Phi(e)$ на E в e, если

$$\Phi(e+h) - \Phi(e) \geqslant \langle L(e),\ h\rangle,\quad \forall h \in H,\quad L \in B^* \tag{1.1}$$

Здесь B^* — пространство линейных, непрерывных функционалов на B, $\langle L, g\rangle$ — значение функционала L из B^* на g из B.

Известно (см. [2], стр. 104), что выпуклый, непрерывный функционал имеет опорный функционал на B в любом элементе e из B. Совокупность всех опорных функционалов в e на E называется субдифференциалом функционала Φ в e на E и обозначается $\partial\Phi(e)$ (см. [3], стр. 58). Таким образом, определен многозначный оператор A

$$A : e \in E \subset B \to \partial\Phi(e) \subset B^*$$

Лемма 1.1. Оператор A монотонный, т. е.

$$\langle L(e_1) - L(e_2),\ e_1 - e_2\rangle \geqslant 0,\quad \forall L(e_i) \in \partial\Phi(e_i),\quad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

Доказательство. Записав неравенства (1.1) для $e = e_1$, $h = e_2 - e_1$ и для $e = e_2$, $h = e_1 - e_2$ и затем сложив их, получаем (1.2).

Пусть u — элемент из B и v_n, $n = 1,2, \ldots$ — плотное множество в B. Обозначим V следующее множество элементов:

$$v_{n,k} = (v_n + (2^k - 1)\ u) / 2^k, \quad n = 1, 2, \ldots; \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Лемма 1.2. Пусть для любого v из V и некоторого $L(v)$ из $\partial\Phi(v)$ выполнено неравенство

(1.3) $$\langle \chi - L(v), u - v \rangle \geqslant 0.$$

Тогда функционал χ входит в $\partial\Phi(u)$.

Доказательство. Из определения $\partial\Phi$ и (1.3) находим

(1.4) $$\langle \chi, v - u \rangle \leqslant \langle L(v), v - u \rangle \leqslant \Phi(2v - u) - \Phi(v)$$

Подставляя в (1.4) последовательно при $k = 0, 1, 2, \ldots$ элементы $v_{n,k}$, и складывая получающиеся неравенства, находим

(1.5) $$\langle \chi, 2(v_n - u) \rangle \leqslant \Phi(u + 2(v_n - u)) - \Phi(u)$$

Из (1.5) и плотности элементов v_n следует утверждение леммы.

Отметим еще одно свойство субдифференциала (теорема Моро — Рокафеллара), которое будет использовано ниже. Пусть $\Psi(e)$ имеет вид $\Psi(e) = \Phi_1(e) + \Phi_2(e)$, где $\Phi_i(e)$ — выпуклые, непрерывные в B функционалы. Тогда $\partial\Psi(e) = \partial\Phi_1(e) + \partial\Phi_2(e)$ (см. [3], стр. 59). В частности, если

(1.6) $$\Psi(e) = \Phi(e) + \langle f, e \rangle, \qquad f \in B^*$$

то $\partial\Psi(e) = \partial\Phi(e) + f$.

Рассмотрим задачу о нахождении u из E, такого, что $O \in \partial\Phi(u) = A(u)$ (задача 1), т. е. задачу о существовании в $\partial\Phi(u)$, такого L, что $\langle L, h \rangle = 0$, $\forall h \in H$. Было показано (см. [3], стр. 89), что задача 1 эквивалентна задаче о минимуме функционала $\Phi(e)$. Именно, искомым u является элемент из E, на котором Φ достигает нижней грани на E.

Рассмотрим несколько более общую задачу (задача 2). Пусть C — многозначное отображение E в B^*. Требуется найти u из E, такое, что в $C(u)$ найдется функционал L, для которого $\langle L, h \rangle = 0$, $\forall\, h \in H$. Представим C в виде $C = A + R$, где $A(e) = \partial\Phi(e)$, и пусть $A(E) = B^*$. Тогда на B^* определен, вообще говоря, многозначный оператор $A^{-1} : B^* \to E \subset B$. Решение задачи 2 ищем в виде $u = A^{-1}L$. Тогда для нахождения L получаем уравнение

(1.7) $$L + RA^{-1}L = O, \quad O \in B^*$$

Исследованию разрешимости уравнения (1.7) посвящена обширная литература. Если, например, RA^{-1} — сжимающий оператор, то уравнение (1.7) разрешимо. Заметим, что построение A^{-1} можно рассматривать как вариационную задачу.

Конкретизируем вид функционалов $\Phi(e)$. Пусть ω — ограниченное измеримое множество в R^n и $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{e})$ — функция на $\omega \times R^m$, обладающая свойствами

$\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{e}) > 0$ при $|e| > 0$, $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{e}) = 0$ при $|\mathrm{e}| = 0$ ($|\mathrm{e}|$ — норма в R^m);

$\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{e},) \leqslant C\,|e|^p$ при $|\mathrm{e}| \geqslant 1$ $(1 \leqslant p < \infty)$;

при каждом фиксированном e функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e})$ почти всюду непрерывна по x; при каждом x функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e})$ выпукла по e.

Обозначим $L_p^m(\omega)$ пространство измеримых вектор-функций $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = (e_1(\mathbf{x}), \ldots, e_m(\mathbf{x}))$, для которых конечен интеграл по ω от $|\mathbf{e}(\mathbf{x})|^p$. Из указанных свойств функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e})$ и ограниченности ω следует [4], что на $L_p^m(\omega)$ определен функционал

$$\Phi(\mathbf{e}(\mathbf{x})) = \int_\omega \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{x}))\, d\omega \tag{1.8}$$

Из теоремы об общем виде линейного, непрерывного функционала в $L_p(\omega)$ (см. [5], стр. 190) для $L(e)$ из (1.1), когда $\Phi(e)$ вида (1.8), имеем представление

$$\langle L(e),\ h\rangle = \int_\omega \sigma(\mathbf{x})\, \mathbf{h}(\mathbf{x})\, d\omega, \quad \forall \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in L_p^m(\omega) \tag{1.9}$$

Условие (1.1) можно записать в виде

$$\int_\omega [\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x})) - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) - \sigma(\mathbf{x})\, \mathbf{h}(\mathbf{x})]\, d\omega \geqslant 0,\ \forall \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in L_p^m(\omega) \tag{1.10}$$

Лемма 1.3. Если $\sigma(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (1.10), то для почти всех x из ω выполнено неравенство

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{x})) \geqslant \sigma(\mathbf{x})\, \mathbf{h},\ \forall \mathbf{h} \in R^m \tag{1.11}$$

Доказательство. Если утверждение леммы неверно, то для некоторого $\bar{\mathbf{h}}$ из R^m существует в ω множество M положительной меры, на котором выполнено неравенство, противоположное (1.11). Полагая $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ равным $\bar{\mathbf{h}}$ на M и равным нулю вне M, приходим к противоречию с (1.10).

Таким образом, для описания субдифференциала (1.8) достаточно знать выражения субдифференциала (опорных функций) φ. Субдифференциал φ удобно описывать с помощью сопряженной (двойственной по Лежандру (Юнгу)) функции φ^* (см. [6], стр. 120).

$$\varphi^*(\mathbf{x}, \sigma) = \sup_{\mathbf{e} \in R^m} (\mathbf{e}\sigma - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e})), \quad \mathbf{e}\sigma = \sum_i e_i \sigma_i \tag{1.12}$$

Операция перехода от φ к φ^* инволютивна [6] (если, например, φ, φ^* всюду непрерывны), т. е.

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \sup_{\sigma \in R^m} (\mathbf{e}\sigma - \varphi^*(\mathbf{x}, \sigma)) \tag{1.13}$$

Формулы (1.12), (1.13) определяют многозначные отображения $\mathbf{e}(\sigma)$, $\sigma(\mathbf{e})$. Именно, $\mathbf{e}(\sigma)$ — совокупность всех e из R^m, при которых в (1.12) достигается верхняя грань. Аналогично из (1.13) определяются $\sigma(\mathbf{e})$. Из (1.11) следует, что опорный функционал к (1.8) допускает представление (1.9), причем для почти всех x из ω

$$\sigma(\mathbf{x}) \in \sigma(\mathbf{e}(\mathbf{x})) \tag{1.14}$$

Например, если функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e})$ удовлетворяет указанным выше условиям и гладкая при $|\mathbf{e}| > 0$, то (1.14) для почти всех x из ω эквивалентно соотношениям

(1.15) $\sigma(\mathbf{x}) = \nabla_e \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{x})), \quad |\mathbf{e}| > 0; \quad \varphi^*(\mathbf{x}, \sigma(\mathbf{x})) = 0, \quad |\mathbf{e}| = 0$

2. О некоторых стационарных задачах для вязкопластических сред. Пусть ω — область в R^3, заполненная сплошной средой. Рассмотрим линейное многообразие U кинематически допустимых полей скоростей в ω. Принцип виртуальных мощностей (см., например, [7] стр. 23, 156) состоит в следующем:

(2.1)
$$\int_\omega \rho \mathbf{h} \frac{d\mathbf{u}}{dt}\, d\omega + \int_\omega \sum_{ij} \sigma_{ij} h_{ij}\, d\omega - F(\mathbf{h}) = 0, \quad \forall \mathbf{h}$$
$$h_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right)$$

где $F(\mathbf{h})$ — мощность внешних сил на вариации $\mathbf{h}$ поля $\mathbf{u}$ из U, σ_{ij} — действительное поле напряжений, ρ — плотность среды.

Модель несжимаемой вязкопластической среды определяется диссипативным потенциалом $\varphi(\mathbf{x}, e_{ij})$ (см. [8]). Пусть функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e},)$, $\mathbf{e} = (e_{ij})$ обладает свойствами, указанными в п. 1

$$\varphi > c|\mathbf{e}| \left(|\mathbf{e}| = \left(\sum_{ij} e_{ij}^2\right)^{1/2}\right)$$

и φ — гладкая функция при $|\mathbf{e}| > 0$. Тогда связь между σ_{ij} и $\mathbf{u}$ для вязкопластической среды определяется формулами

(2.2)
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial e_{ij}}(\mathbf{x}, e_{ij}), \quad |\mathbf{e}| > 0 \left(e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)$$
$$\varphi^*(\mathbf{x}, \sigma_{ij}) = 0, \quad |\mathbf{e}| = 0$$

Кроме того, предполагается, что $\mathbf{u}$ из U удовлетворяет условию несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

Обычно (см., например, [9,10]) условие текучести определяет призму в пространстве σ_{ij}. Второе условие в (2.2), также представляющее собой условие текучести, определяет область типа шара. Очевидно, что в силу условия несжимаемости обе формулировки условия текучести эквивалентны.

Рассмотрим теперь принцип виртуальных мощностей в следующем приближении (медленные стационарные движения):

(2.3)
$$\int_\omega \sum_{ij} \sigma_{ij} h_{ij}\, d\omega = F(\mathbf{h})$$

и рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (2.2), (2.3).

Введем полуограниченный снизу на U функционал

(2.4)
$$I(\mathbf{u}) = \int_\omega \varphi(\mathbf{x}, e_{ij}(\mathbf{x}))\, d\omega - F(\mathbf{u})$$

Здесь $F(\mathbf{u})$ — линейный функционал.

Теорема 2.1. Если $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ — решение задачи (2.2), (2.3), то $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ минимизирует (2.4) на U. Если $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ минимизирует (2.4) на U, то существуют $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$, такие, что $\mathbf{u}$, σ_{ij} — решение задачи (2.2), (2.3).

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из замечания относительно вида субдифференциала для (1.6), из (1.15) и замечания п. 1 относительно разрешимости задачи 1.

Итак, исследование корректности задачи (2.2), (2.3) сведено к проблеме минимума функционала (2.4), которая подробно рассмотрена в [8,11].

Условия (2.2) показывают, что задача об установившихся движениях вязкопластической среды является задачей в области с неизвестной границей. Теорема 2.1 устанавливает эквивалентность этой задачи задаче о минимуме функционала (2.4), вообще говоря недифференцируемого. Отметим один частный случай, когда связь дифференциальной постановки задачи и вариационного принципа особенно проста. Пусть решение задачи (2.2), (2.3) таково, что $|\mathbf{e}(\mathbf{x})| \geqslant a > 0$ всюду в ω. В этом случае недифференцируемость $\varphi(\mathbf{x}, e_{ij})$ при $|\mathbf{e}| = 0$ несущественна и функционал (2.4) на такой экстремали дифференцируем. В этих предположениях первое условие в (2.2) и (2.3) представляют собой обычное уравнение Эйлера для функционала (2.4). Именно в таких предположениях установлена [12] связь между уравнениями движения и вариационным принципом для диссипативного потенциала вида

$$(2.5)\qquad \varphi(\mathbf{x}, e_{ij}) = \mu I_2^2/2 + \tau_0 I_2, \quad I_2 = \Big(\sum_{ij} e_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

Заметим, что можно исследовать корректность несколько более общего класса задач. Именно, заменим условие (2.2) следующим соотношением:

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{ij} = \frac{\partial\varphi}{\partial e_{ij}} + \rho_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{e}), \quad |\mathbf{e}| > 0 \\ &\varphi^*(\mathbf{x}, \sigma_{ij}) = 0, \quad |\mathbf{e}| = 0 \end{aligned}$$

Задача (2.3), (2.6) — это задача 2 п. 1, причем

$$\langle R(\mathbf{u}), \mathbf{h}\rangle = \int_\omega \sum_{ij} \rho_{ij} h_{ij}\, d\omega$$

Если, например, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e})$ имеет вид (2.5), ρ_{ij} удовлетворяют условиям

$$\rho_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = 0; \ |\rho_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \rho_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)| \leqslant k_{ij}|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2|$$

и k_{ij} достаточно малы, то оператор RA^{-1} — сжимающий.

3. Функции со значениями в банаховых пространствах. Приведем подготовительный материал, который будет использован в п. 4 при исследовании нестационарных задач.

Пусть B — сепарабельное, рефлексивное банахово пространство (см. [5], стр. 149). Рассмотрим функцию $f(t)$ на отрезке $[0, T]$ со значениями в B; функция $f(t)$ измерима (см. [13], стр. 765), если для любого ε, $\varepsilon > 0$ существует компакт K_ε, $K_\varepsilon \subset [0,T]$ лебеговой меры меньше ε, такой, что вне K_ε функция $f(t)$ непрерывна. Обозначим $M_B{}^p[0,T]$, $p \geqslant 1$ (см. [13], стр. 804) пространство измеримых функций $f(t)$, у которых $\|f\|_B{}^p(t)$ суммируема на $[0,T]$. Через $M_B{}^\infty[0, T]$ обозначим пространство измеримых функций, у которых на $[0,T]$ ограничена величина $\|f\|_B(t)$.

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H. Пусть $f(t)$ — функция на $[0, T]$ со значениями в H. Производной df/dt называется элемент из H, такой, что

$$(3.1)\qquad \lim_{\Delta t\to 0} \| df/dt - (f(t+\Delta t) - f(t))/\Delta t \|_H = 0$$

Будем говорить, что функция $f(t)$ имеет обобщенную производную $f'(t)$ на $[0,T]$, если $f(t)$ непрерывна на $[0,T]$, $f'(t)$ из $M_H^1\,[0,\ T]$ и

$$\int_0^T (f',\ \varphi)_H\, dt = -\int_0^T \left(f,\ \frac{d\varphi}{dt}\right)_H dt, \qquad \forall \varphi(t) \tag{3.2}$$

где $\varphi(t)$ из $C_H\,[0,\ T]$ и имеет кусочно-непрерывную производную на $[0,T]$, $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$. Можно показать, что обобщенная производная совпадает с производной (3.1) на $[0,\ T]$, кроме, быть может, множества лебеговой меры нуль (см. [14], стр. 343).

Для функций со значениями в H имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_0^T (f_1',\ f_2)_H\, dt + \int_0^T (f_1,\ f_2')_H\, dt = (f_1(T),\ f_2(T))_H - (f_1(0),\ f_2(0))_H$$

Обозначим $L_B{}^p\,[0,\ T]$ фактор-пространство $M_B{}^p\,[0,\ T]$ по пространству пренебрежимых (т. е. равных нулю почти всюду) функций [13]; $L_B{}^p\,[0,\ T]$ — банахово пространство с нормой

$$\left\{\int_0^T \|f\|_B^p(t)\, dt\right\}^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty; \qquad \inf_M \sup_{t \in [0,\ T] \setminus M} \|f\|_B(t)$$

где M — множество лебеговой меры нуль на $[0,\ T]$.

Лемма 3.1. Пусть $\{u_n(t)\}$ — последовательность кусочно-линейных непрерывных функций, причем $\|du_n / dt\|_H \leqslant c$ (производная существует всюду на $[0,\ T]$, кроме конечного числа точек). Пусть функции $u_n(t)$ равномерно на $[0,\ T]$ сходятся к $u(t)$. Тогда существует $u'(t)$ из $M_H{}^\infty\,[0,\ T]$ и

$$\int_0^T \left(\frac{du_n}{dt},\ v\right)_H dt \to \int_0^T (u',\ v)_H\, dt, \qquad \forall v(t) \in M_H^1\,[0,\ T]$$

Утверждение леммы следует из того, что $L_{B^*}^\infty\,[0,\ T]$ сопряжено к $L_B{}^1$ $[0,\ T]$, [13] и свойства слабой компактности пространства, сопряженного к сепарабельному пространству [5].

Пусть $R(t,\ e)$ — числовая функция, определенная на $[0,\ T] \times B$, $R(t,0) = 0$ и $R(t,\ e(t))$ из $M^\infty\,[0,\ T]$ при $e(t)$ из $M_B{}^\infty\,[0,\ T]$.

Лемма 3.2. Если

$$\int_0^T R(t,e(t))\, dt = 0 \quad \left(\int_0^T R(t,\ e(t))\, dt \geqslant 0\right), \ \forall e(t) \in M_B{}^\infty\,[0,\ T]$$

то $R(t,\ e) = 0$ $(R(t,\ e) \geqslant 0)$ для почти всех t из $[0,\ T]$ и всех e из B.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.3.

Лемма 3. 3. Если $e(t)$ из $M_B{}^\infty\,[0,\ T]$, то в $A(e(t)) = \partial\Phi(e(t))$ содержится сечение из $M_{B^*}^\infty\,[0,\ T]$, т. е. существует функция $\omega(t)$ из $M_{B^*}^\infty$ $[0,\ T]$, такая что $\omega(t) \in A(e(t))$. ▌

Для доказательства покажем, что в $A(e(t))$ содержится измеримое сечение. Приблизим $e(t)$ ступенчатыми функциями $e_n(t)$ в норме $L_B{}^p\,[0,\ T]$ [13]. Существует ступенчатая функция $\omega_n(t)$ из $M_{B^*}^\infty\,[0,\ T]$, такая, что, вопервых, $\omega_n(t) \in A(e_n(t))$ и, во-вторых

$$\int_0^T \langle \omega_n(t), v(t) \rangle\, dt \leqslant \int_0^T [\Phi(e_n(t) + v(t)) - \Phi(e_n(t))]\, dt$$

Последовательность $\{\omega_n(t)\}$ можно считать слабо сходящейся к $\omega(t)$ из $M_{B^*}^\infty [0, T]$ и

$$0 \leqslant \int_0^T [\langle \omega(t), v(t) \rangle - (\Phi(e(t) + v(t)) - \Phi(e(t)))]\, dt, \tag{3.3}$$

$$\forall v(t) \in M_B^\infty [0, T]$$

Из (3.3) и леммы 3.2 следует утверждение леммы 3.3.

4. О некоторых нестационарных постановках задач в теории вязкопластических сред. Сначала рассмотрим задачу о разрешимости абстрактного параболического уравнения с многозначным стационарным оператором, а затем полученные результаты применим к исследованию динамических задач для вязкопластических сред.

Пусть $u(t)$ из $C_H [0, T] \cap M_B^\infty [0, T]$ и $u'(t)$ из $M_H^\infty [0, T]$. Пусть, далее, $\omega(t)$ из $M_{B^*}^\infty [0, T]$ — сечение $A(u(t))$ (оператор $A = \partial\Phi$ введен в п. 1 и для простоты предполагается не зависящим от t). Предположим, что $f(t)$ из $C_H [0, T]$. Функция $u(t)$ называется обобщенным решением нестационарной задачи

$$A(u(t)) + \partial u / \partial t = f(t), \qquad u(0) = u_0$$

если для почти всех t из $[0, T]$ выполняется равенство

$$(u', v)_H + \langle \omega(t), v \rangle = (f, v)_H, \quad u(0) = u_0, \quad \forall v \in B \cap H \tag{4.1}$$

Теорема единственности обобщенного решения доказывается по той же схеме, что и для однозначных монотонных операторов (см. [15], стр. 173). Теорема существования обобщенного решения может быть получена на основании работы [16].

Именно, пусть $\{\Delta t_i^n\}$, $i = 1, \ldots, n$; $\Sigma_i \Delta t_i^n = T$ — разбиение $[0, T]$. Рассмотрим цепочку элементов u_i^n из $B \cap H$, таких, что

$$\inf_u \left\{ \frac{1}{2\Delta t_i^n} \| u - u_{i-1}^n \|_H^2 + \Phi(u) - (f(t_i^n), u)_H \right\} = \tag{4.2}$$

$$= \frac{1}{2\Delta t_i^n} \| u_i^n - u_{i-1}^n \|_H^2 + \Phi(u_i^n) - (f(t_i^n), u_i^n)_H$$

Из теоремы Моро-Рокафеллара (см. п. 1) и (4.2) следует, что существуют $\omega(u_i^n)$ из $\partial\Phi(u_i^n)$, для которых

$$\left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta t_i^n}, v \right)_H + \langle \omega(u_i^n), v \rangle = (f(t_i^n), v)_H, \quad \forall v \in B \cap H \tag{4.3}$$

В [16] доказано, что

$$\| u_i^n \|_B + \| u_i^n \|_H \leqslant c_1 \tag{4.4}$$

Пусть $f(t)$ и начальный элемент u_0 удовлетворяют условиям

$$\|f(t_1)-f(t_2)\|_H \leqslant c_2 |t_1-t_2| \max_{i=1,2} \|f(t_i)\|_H \tag{4.5}$$

$$\|(u_1^n - u_0)/\Delta t_1^n\|_H \leqslant c_3, \qquad \forall \Delta t_1^n \tag{4.6}$$

В этих предположениях в [16] доказано, что

$$\|(u_i^n - u_{i-1}^n)/\Delta t_i^n\|_H \leqslant c_4, \qquad i=2,3,\ldots,n \; (\forall n) \tag{4.7}$$

Введем функции $u^n(t)$, $\bar{u}^n(t)$, где $u^n(t)$ — ступенчатая функция, равная u_{i-1}^n при $t_{i-1}^n \leqslant t < t_i^n$, $\bar{u}^n(t)$ — непрерывная, кусочно-линейная функция, равная u_i^n при $t=t_i^n$. Из (4.3) находим, что

$$\int_0^T \left(\frac{d\bar{u}^n}{dt}, v(t)\right)_H dt + \int_0^T \langle \omega(u^n(t), v(t)\rangle dt = \tag{4.8}$$

$$= \int_0^T (f^n(t), v(t))_H \, dt, \qquad \forall v(t) \in M^1_{B\cap H}[0,T]$$

$$\omega(u^n(t)) = \omega(u_{i-1}^n), \qquad f^n(t) = f(t_{i-1}^n) \qquad (t_{i-1}^n \leqslant t < t_i^n)$$

В [16] доказано, что при выполнении условий (4.5), (4.6) функции $\bar{u}^n(t)$ сходятся в норме $C_H[0,T]$ к $u(t)$. Из леммы 3.1 и (4.7) следует, что существует $u'(t)$. В силу (4.4) можно считать, что функции $\omega(u^n(t))$ слабо в $M^\infty_{B^*}[0,T]$ сходятся к $\chi(t)$.

Покажем, что $\chi(t)$ из $A(u(t))$. Из (4.8) следует равенство

$$\int_0^T [(u', v)_H + \langle \chi, v\rangle - (f, v)_H]\, dt = 0, \qquad \forall v \in M'_{B\cap H}[0,T] \tag{4.9}$$

Пусть $v(t)$ из $M^\infty_B[0,T]$, $\omega(v(t))$ из $M^\infty_{B^*}[0,T]$ и $\omega(v(t))$ из $A(v(t)) = \partial\Phi(v(t))$ (см. лемму 3.3). Далее (аналогично [15], стр. 171)

$$\int_0^T \langle \omega(u^n(t) - \omega(v(t)), \quad u^n(t) - v(t)\rangle dt \geqslant 0, \qquad \forall v(t) \in M_B^\infty[0,T] \tag{4.10}$$

Из (4.8) при $v(t) = u^n(t)$ находим

$$\int_0^T \langle \omega(u^n(t), u^n(t)\rangle dt = \int_0^T \left[(f^n(t), u^n(t))_H - \left(\frac{d\bar{u}^n}{dt}, u^n\right)_H\right] dt = \tag{4.11}$$

$$= \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_n^n\|_H^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \|u_i^n - u_{i-1}^n\|_H^2 + \int_0^T (f^n(t), u^n(t)_H dt \to$$

$$\to \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \int_0^T (f(t), u(t))_H \, dt$$

Из (4.9) — (4.11) и формулы интегрирования по частям п. 3 имеем

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \chi - \omega(v(t)), \quad u - v\rangle \, dt, \qquad \forall v(t) \in M_B^\infty[0,T]$$

Из последнего неравенства, лемм 3.2, 1.2 следует, что χ из $A(u(t))$, т. е. доказано существование обобщенного решения (4.1).

Параболические уравнения с многозначными стационарными операторами A рассматривались в [17, 18]. В [17] для построения обобщенного решения использовано понятие производящего оператора полугруппы и само понятие обобщенного решения, более слабое по сравнению с (4.1). Выше удалось доказать существование обычного обобщенного решения благодаря введению условия (4.6) на начальный элемент u_0 (В [17,18] такое условие на начальный элемент не рассматривалось.) В [16] показано, что выполнение условия (4.6) связано с требованием определенной гладкости начальных условий, в частности, оно всегда выполнено, например, если начальный элемент u_0 минимизирует $\Phi(u)$.

Отметим, что изложенная вариационная схема построения приближенных решений параболических уравнений (по существу совпадающая со схемой Ротэ) может представить интерес с вычислительной точки зрения даже в случае линейных уравнений. Это связано с тем, что, используя двойственные функционалы, можно эффективно получать верхние и нижние оценки минимальных значений функционалов (4.2), что дает дополнительную информацию по сравнению, например, с методом сеток о точности приближенного решения.

Перейдем теперь к нестационарным движениям вязкопластической среды. Рассмотрим принцип виртуальных мощностей (2.1) в следующем приближении (медленные нестационарные движения):

$$\int_\omega \Big(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\mathbf{h} + \sum_{ij} \sigma_{ij} h_{ij}\Big)\, d\omega = F(\mathbf{h}), \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \ \mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x) \tag{4.12}$$

где σ_{ij} определены формулами (2.2). При этих условиях задача (4.12) — частный случай (4.1). Именно

$$\langle L(\mathbf{u}), \mathbf{h}\rangle = \int_\omega \sum_{ij} \sigma_{ij} h_{ij}\, d\omega; \quad (\mathbf{u}, \mathbf{h})_H = \int_\omega \rho \sum_i u_i h_i\, d\omega$$

Отметим, что рассмотрено довольно много конкретных механических задач о нестационарных движениях вязкопластической среды [19]. Однако далеко не всегда в этих задачах дана корректная математическая постановка, учитывающая взаимодействие жестких зон и областей течения.

5. О коэффициенте предельной нагрузки для жесткопластической среды. Рассмотрим приложение теоремы 2.1 к задаче о двусторонних оценках коэффициента предельной нагрузки.

Диссипативный потенциал $\varphi(\mathbf{x}, e_{ij})$ в случае жесткопластической среды таков, что [8] $\varphi(\mathbf{x}, \lambda e_{ij}) = \lambda \varphi(\mathbf{x}, e_{ij})$, $\forall \lambda \geqslant 0$.

Пусть кинематически допустимые поля скоростей образуют линейное пространство. Коэффициент предельной нагрузки c^* для внешних сил с объемной плотностью $\mathbf{f}$ и поверхностной плотностью $\mathbf{t}$ определяется формулой [8]

$$(c^*)^{-1} = \sup_{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in U} F(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \Big[\int_\omega \varphi(\mathbf{x}, e_{ij}(\mathbf{x}))\, d\omega\Big]^{-1}$$

$$F(\mathbf{u}) = \int_\omega \mathbf{f}\mathbf{u}\, d\omega + \int_{\partial\omega} \mathbf{t}\mathbf{u}\, dS$$

Если $F(\mathbf{u}) > 0$ и для некоторого $\mathbf{u}$ из U, то получаем верхнюю оценку для c^*.

$$c^* \leqslant c_u = \Big(\int_\omega \varphi(\mathbf{x}, e_{ij}(\mathbf{x}))\, d\omega\Big) / F(\mathbf{u})$$

Пусть c_σ — такое неотрицательное число, что существуют функции σ_{ij} из $M^\infty(\omega)$, для которых выполняются равенства

$$\int_\omega \sum_{ij} \sigma_{ij} e_{ij}\, d\omega = c_\sigma F(\mathbf{u}), \ \forall \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in U, \ \varphi^*(\mathbf{x}, \sigma_{ij}(\mathbf{x})) = 0 \tag{5.1}$$

Так как $\varphi^*(\mathbf{x}, \sigma_{ij}) = 0$, то

$$\sum_{ij} \sigma_{ij} e_{ij} \leqslant \varphi(\mathbf{x}, e_{ij})$$

и из (5.1) получаем, что

$$\frac{1}{c_\sigma} \geqslant F(\mathbf{u}) \Big/ \int_\omega \varphi\, d\omega, \qquad \forall \mathbf{u} \in U$$

Таким образом, если $F(\mathbf{u}) > 0$ хотя бы для одного $\mathbf{u}$ из U, то $c^* \geqslant c_\sigma$ Обозначим $c_* = \sup c_\sigma$. Очевидно, что

$$c^* \geqslant c_* \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. $c^* = c_*$.

Доказательство. Можно считать, что $c^* > 0$, так как, если $c^* = 0$, то для $c_\sigma = 0$ можно взять $\sigma_{ij} = 0$. Возьмем положительное число c, $0 < c < c^*$ и рассмотрим функционал

$$J_c(\mathbf{u}) = \int_\omega \varphi(\mathbf{x}, e_{ij}(\mathbf{x}))\, d\omega - cF(\mathbf{u})$$

Очевидно, что $J_c(\mathbf{u}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{u}$ из U, т. е. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ — минимизирующее $J_c(\mathbf{u})$ векторное поле. Но тогда по теореме 2.1 существуют σ_{ij}, такие, что при $c_\sigma = c$ выполнены равенства (5.1).

Теорема доказана. Ранее, в общем случае было известно лишь неравенство (5.2).

Поступила 17 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж. Л.* О неравенствах в частных производных. Успехи матем. наук, 1971, т. 26, вып. 2.
2. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.
3. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.
4. *Аркин В. И., Левин В. Л.* Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи. Успехи матем. наук, 1972, т. 27, вып. 3.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
6. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
7. *Жермен П.* Механика сплошных сред. М., «Мир», 1965.
8. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. Изд-во МГУ, 1971.
9. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
10. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
11. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* О корректности краевых задач в механике сплошных сред. Матем. сб., 1972, т. 88, вып. 2.
12. *Ильюшин А. А.* Деформация вязкопластического тела. Уч. зап. МГУ. Механика, 1940, вып. 39.
13. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1969.
14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 5. М., Физматгиз, 1959.
15. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
16. *Мосолов П. П.* Вариационные методы в нестационарных задачах. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1970, т. 34, вып. 2.
17. *Komura Y.* Non-linear semi-groups in Hilbert space. J. Math. Soc. Japan, 1967, vol. 19, No. 4.
18. *Brézis H., Crandall M. G., Pazy A.* Perturbations of non-linear maximal monotone sets in Banach space. Commun. Pure and Appl. Math., 1970, vol. 23, No. 11.
19. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязкопластических сред. Изд-во МГУ, 1970.