Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.4

ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ТОНКОГО АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

А. С. Космодамианский, В. Н. Ложкин

(Донецк)

Методом асимптотического интегрирования [1] трехмерных уравнений электроупругости для общего случая анизотропии построено решение задачи о равновесии тонкого пьезоэлектрического слоя, плоские грани которого не имеют электродного покрытия и на них заданы внешние механические воздействия. Построен основной итерационный процесс, позволивший оценить справедливость различных упрощающих предложений, сделанных при построении прикладных теорий [2–4]. Установлено, что отсутствие у слоя плоскости материальной симметрии, параллельной его срединной плоскости, не оказывает влияния на построение начального шага итерационного процесса, а сказывается при выводе соотношений последующих приближений.

1. Рассмотрим тонкий пьезоэлектрический слой постоянной толщины $2h$. Предположим, что массовые силы и объемные электрические заряды в слое отсутствуют, внешние физические воздействия заданы на плоских гранях слоя. Намагничиванием слоя будем пренебрегать.

Примем недеформированную срединную плоскость слоя за координатную плоскость x_1x_2; $-h \leqslant x_3 \leqslant h$. Будем считать, что поле деформаций, возникающих в слое, характеризуется вектором $\mathbf{R}$ $(r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{23}, r_{13}, r_{12})$, поле напряжений — вектором $\mathbf{T}$ $(t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{13}, t_{12})$, поле смещений — вектором $\mathbf{u}$ (u_1, u_2, u_3). Возникающее в слое электростатическое поле характеризуется векторами напряженности $\mathbf{E}$ (E_1, E_2, E_3) и электрической индукции $\mathbf{D}$ (D_1, D_2, D_3). Обозначим через v потенциал электрического поля, $E_m = \partial v / \partial x_m$.

Введем безразмерные величины

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{a}, \quad \xi_3 = \frac{x_3}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{a} \tag{1.1}$$

где a — некоторый линейный параметр. Слой будем называть тонким если его безразмерная полутолщина λ меньше единицы. Уравнения электроупругого равновесия принимают вид [5, 6]

$$\partial_1 t_{1i} + \partial_2 t_{i2} + \frac{1}{\lambda}\partial_3 t_{i3} = 0, \quad \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 + \frac{1}{\lambda}\partial_3 D_3 = 0 \tag{1.2}$$

$$(\partial_i = \partial/\partial\xi_i, \ i = 1, 2, 3)$$

Термодинамические соотношения, связывающие линейной зависимостью механические и электрические характеристики слоя, можно записать так [7]:

(1.3) $$\mathbf{R} = S\mathbf{T} + \frac{1}{4\pi} G\mathbf{D}, \quad \mathbf{E} = -G'\mathbf{T} + B\mathbf{D}$$

Здесь S — симметричная матрица модулей гибкости $s_{ij}{}^D$, измеренных при постоянной электрической индукции, $\mathbf{B}$ — симметричная матрица коэффициентов диэлектрической восприимчивости $\beta_{ij}{}^t$, измеренных при постоянных механических напряжениях, G — в общем случае несимметричная матрица пьезоэлектрических модулей g_{ij}, штрих означает транспонирование.

Будем считать, что хотя бы одна из электромеханических постоянных $s_{i4}{}^D$, $s_{i5}{}^D$, g_{3i} $(i = 1, 2, 3, 6)$, g_{j4} g_{j5}, $\beta_{j3}{}^t$ $(j = 1,2)$ отлична от нуля, т. е. рассмотрим общий случай анизотропии материала слоя.

Предположим, что плоские грани слоя не имеют электродного покрытия и что на них заданы внешние механические усилия, т. е.

(1.4) $$t_{i3} = q_{\pm i}, \quad D_3 = 0, \quad \xi_3 = \pm 1$$

где $q_{\pm i}$ (ξ_1, ξ_2) — известные функции. Для случая, когда плоские грани слоя электродированы, необходимо взять другую форму записи соотношений (1.3).

2. Остановимся на построении основного итерационного процесса [1], к которому можно свести решение задачи (1.2) — (1.4). Не ограничивая общности исследований, можно предположить, что

(2.1) $$q_{\pm i} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n q_{\pm i}^{(n)}$$

Обозначим через P любую из характеристик электроупругого состояния слоя. Как и в работе [1], зададим ее в виде ряда

(2.2) $$P = \lambda^m \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P^{(n)}$$

Показатель m принимает целочисленные значения, свои для каждой величины. Эти значения необходимо подобрать так, чтобы после подстановки представлений вида (2.2) в соотношения (1.2) — (1.4) и приравнивания в каждом из них выражения при одинаковых степенях λ, получить непротиворечивую последовательность систем уравнений для нахождения коэффициентов разложений (2.2), имеющих нетривиальное решение. Такие значения m называются непротиворечивыми. С учетом предположений (2.1) найдем, что

$m = -3$ для $a^{-1}u_3$;

$m = -2$ для $a^{-1} u_1$, $a^{-1}u_2$, $a^{-1}v$, t_{11}, t_{22}, t_{12}, D_1, D_2;

$m = -1$ для t_{13}, t_{23}, D_3;

$m = 0$ для t_{33}.

Рекуррентная система дифференциальных уравнений и соответствующие ей граничные условия принимают следующий вид:

(2.3) $$\partial_3 u_3^{(n)} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{X}_2^{(n-2)} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{X}_3^{(n-3)} + s_{33}^D t_{33}^{(n-4)}$$

$$\partial_3 \mathbf{X}_1^{(n)} = -\mathbf{M}_1 u_3^{(n)} + B_{11}\mathbf{X}_2^{(n-1)} + B_{12}\mathbf{X}_3^{(n-2)} + \mathbf{A}_{21} t_{33}^{(n-3)}$$

$$B_{21}\mathbf{X}_2^{(n)} = M_2\mathbf{X}_1^{(n)} - B_{22}\mathbf{X}_3^{(n-1)} - \mathbf{A}_{31}t_{33}^{(n-2)}$$
$$\partial_3\mathbf{X}_3^{(n)} = -M_2'\mathbf{X}_2^{(n)}, \quad \partial_3 t_{33}^{(n)} = -\mathbf{M}_1\mathbf{X}_3^{(n)}$$
$$\mathbf{X}_3^{(n)} = \mathbf{Q}_\pm^{(n-1)}, \quad t_{33}^{(n)} = q_{\pm 3}^{(n)}, \quad \xi_3 = \pm 1$$

Здесь

$$\mathbf{X}_1^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, v^{(n)}), \quad \mathbf{X}_2^{(n)} = (t_{11}^{(n)}, t_{22}^{(n)}, t_{12}^{(n)}, D_1^{(n)}, D_2^{(n)})$$
$$\mathbf{X}_3^{(n)} = (t_{13}^{(n)}, t_{23}^{(n)}, D_3^{(n)}), \quad \mathbf{Q}_\pm^{(n)} = (q_{\pm 1}^{(n)}, q_{\pm 2}^{(n)}, 0)$$
$$\mathbf{A}_{11} = \left(s_{13}^D, s_{23}^D, s_{36}^D, \frac{1}{4\pi}g_{13}, \frac{1}{4\pi}g_{23}\right)$$
$$\mathbf{A}_{12} = \left(s_{35}^D, s_{31}^D, \frac{1}{4\pi}g_{33}\right), \quad \mathbf{A}_{21} = (s_{35}^D, s_{34}^D, -g_{33})$$
$$\mathbf{A}_{31} = (s_{13}^D, s_{23}^D, s_{36}^D, -g_{13}, -g_{23}), \quad \mathbf{M}_1 = (\partial_1, \partial_2, 0)$$

$$B_{11} = \begin{Vmatrix} s_{15}^D & s_{25}^D & s_{56}^D & \frac{1}{4\pi}g_{15} & \frac{1}{4\pi}g_{25} \\ s_{14}^D & s_{24}^D & s_{46}^D & \frac{1}{4\pi}g_{14} & \frac{1}{4\pi}g_{24} \\ -g_{31} & -g_{32} & -g_{36} & \beta_{13}^t & \beta_{23}^t \end{Vmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{Vmatrix} s_{45}^D & s_{44}^D & \frac{1}{4\pi}g_{34} \\ s_{55}^D & s_{45}^D & \frac{1}{4\pi}g_{35} \\ -g_{35} & -g_{34} & \beta_{33}^t \end{Vmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{Vmatrix} s_{11}^D & s_{12}^D & s_{16}^D & \frac{1}{4\pi}g_{11} & \frac{1}{4\pi}g_{21} \\ s_{12}^D & s_{22}^D & s_{26}^D & \frac{1}{4\pi}g_{12} & \frac{1}{4\pi}g_{22} \\ s_{16}^D & s_{26}^D & s_{66}^D & \frac{1}{4\pi}g_{16} & \frac{1}{4\pi}g_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11}^t & \beta_{12}^t \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12}^t & \beta_{22}^t \end{Vmatrix}$$

$$B_{22}' = \begin{Vmatrix} s_{15}^D & s_{25}^D & s_{56}^D & -g_{15} & -g_{25} \\ s_{14}^D & s_{24}^D & s_{46}^D & -g_{14} & -g_{24} \\ \frac{1}{4\pi}g_{31} & \frac{1}{4\pi}g_{32} & \frac{1}{4\pi}g_{36} & \beta_{13}^t & \beta_{23}^t \end{Vmatrix}$$

$$M_2' = \begin{Vmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{Vmatrix}$$

Для реализации итерационного процесса (2.3) используем метод, изложенный в работе [1]. Для первых двух приближений ($n = 0{,}1$) будем иметь

(2.4) $$u_3^{(n)} = u_3^{(n,0)}(\xi_1, \xi_2)$$
$$\mathbf{X}_1^{(n)} = \mathbf{X}_1^{(n,0)} - \xi_3\mathbf{M}_1 u_3^{(n,0)} + {}^1/_2(1 - \xi_3^2) B_{11}B_{21}^{-1}M_2\mathbf{M}_1 u_3^{(n-1,0)}$$
$$\mathbf{X}_2^{(n)} = B_{21}^{-1}M_2\mathbf{X}_1^{(n,0)} - \xi_3 B_{21}^{-1}M_2\mathbf{M}_1 u_3^{(n,0)} + {}^1/_2(1 - \xi_3^2)\,\mathbf{X}_2^{(n,1)}$$

$$\overline{X}_2^{(n,1)} = B_{21}^{-1}(M_2B_{11} + B_{12}M_2')B_{21}^{-1}M_2M_1u_3^{(n-1,0)}$$

$$X_3^{(n)} = {}^1/_2(1+\xi_3)Q_+^{(n-1)} + {}^1/_2(1-\xi_3)Q_-^{(n-1)} -$$
$$- {}^1/_2(1-\xi_3^2)M_2'B_{21}^{-1}M_2M_1u_3^{(n,0)} - {}^1/_6(\xi_3-\xi_3^3)M_2'X_2^{(n,1)}$$

$$t_{33}^{(n)} = {}^1/_2(q_3^{(n)} + q_{-3}^{(n)}) + {}^3/_4(\xi_3 - {}^1/_3\xi_3^3)(q_3^{(n)} - q_{-3}^{(n)}) +$$
$$+ {}^1/_4(1-\xi_3^2)M_1(Q_+^{(n-1)} - Q_-^{(n-1)}) + {}^1/_4(\xi_3-\xi_3^3)M_1(Q_+^{(n-1)} +$$
$$+ Q_-^{(n-1)}) - {}^1/_{24}(1-\xi_3^2)^2M_1M_2'X_2^{(n,1)}$$

Система дифференциальных уравнений относительно неизвестных величин $X_1^{(n,0)}$ $(u_1^{(n,0)}, u_2^{(n,0)}, v^{(n,0)})$ и $u_3^{(n,0)}$ имеет вид

$$M_2'B_{21}^{-1}M_2X_1^{(n,0)} = -{}^1/_2(Q_+^{(n-1)} - Q_-^{(n-1)}) + {}^1/_3M_2'X_2^{(n,1)} \tag{2.5}$$
$$M_1M_2'B_{21}^{-1}M_2M_1u_3^{(n,0)} = {}^3/_2[q_3^{(n)} - q_{-3}^{(n)} + M_1(Q_+^{(n-1)} + Q_-^{(n-1)})]$$

В равенствах (2.3) — (2.5) $P^{(n)} \equiv 0$ при $n < 0$.

3. Рассмотрим теперь тонкую пьезоэлектрическую пластину, плоские грани которой свободны от физических воздействий, а деформирующие пластину факторы заданы на ее боковой поверхности. В этом случае

$$\overline{X}_1^{(n)} = X_1^{(n,0)} - \xi_3(M_1u_3^{(n,0)} - B_{11}M_3\Phi^{(n-1)}) + \tag{3.1}$$
$$+ {}^1/_2(1-\xi_3^2)B_{11}B_{21}^{-1}M_2M_1u_3^{(n-1,0)}$$

$$X_2^{(n)} = M_3\Phi^{(n)} + B_{21}^{-1}M_2X_{1,0}^{(n,0)} - \xi_3B_{21}^{-1}M_2(M_1u_3^{(n,0)} -$$
$$- B_{11}M_3\Phi^{(n-1)}) + {}^1/_2(1-\xi_3^2)X_2^{(n,1)}$$

$$X_3^{(n)} = -{}^1/_2(1-\xi_3^2)M_2'B_{21}^{-1}M_2(M_1u_3^{(n,0)} - B_{11}M_3\Phi^{(n-1)}) -$$
$$- {}^1/_6(\xi_3-\xi_3^3)M_2'X_2^{(n,1)}$$

$$t_{33}^{(n)} = -{}^1/_{24}(1-\xi_3^2)^2M_1M_2'X_2^{(n,1)} \quad (n = 0, 1)$$

$$\Phi^{(n)} = (\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}),$$

$$M_3' = \begin{Vmatrix} \partial_2^2 & \partial_1^2 & -\partial_1\partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_2 & -\partial_1 \end{Vmatrix}$$

Вектор $X_1^{(n,0)}$ представлен так:

$$X_1^{(n,0)} = X_{1,0}^{(n,0)} + X_{1,1}^{(n,0)}$$

При этом $X_{1,0}^{(n,0)}$ — частное решение неоднородного векторного уравнения системы (2.5), в котором $Q_\pm^{(n)} \equiv 0$, а компоненты вектора $X_{1,1}^{(n,0)}$ определяются равенствами

$$u_{1,1}^{(n,0)} = \int_0^{\xi_1} [(s_{12}^D\partial_1^2 - s_{16}^D\partial_1\partial_2 + s_{11}^D\partial_2^2)\varphi_1^{(n)} -$$
$$- \frac{1}{4\pi}(g_{21}\partial_1 - g_{11}\partial_2)\varphi_2^{(n)}]\,d\xi_1 + c^{(n)}\xi_2 + c_1^{(n)}$$

$$u_{2,1}^{(n,0)} = \int_0^{\xi_2} [(s_{22}^D\partial_1^2 - s_{26}^D\partial_1\partial_2 + s_{12}^D\partial_2^2)\varphi_1^{(n)} -$$
$$- \frac{1}{4\pi}(g_{22}\partial_1 - g_{12}\partial_2)\varphi_2^{(n)}]\,d\xi_2 - c^{(n)}\xi_1 + c_2^{(n)}$$

$$v_1^{(n,0)} = -\int\limits_0^{\xi_1} [(g_{12}\partial_1^2 - g_{16}\partial_1\partial_2 + g_{11}\partial_2^2)\varphi_1^{(n)} +$$
$$+ (\beta_{12}^t\partial_1 - \beta_{11}^t\partial_2)\varphi_2^{(n)}]\, d\xi_1 + c_3^{(n)}$$

где $c^{(n)}$, $c^{(n)}{}_1$, $c^{(n)}{}_2$ — постоянные, характеризующие жесткий поворот и смещение пластины в срединной плоскости, $c_3{}^{(n)}$ — нулевой уровень потенциала электрического поля.

Система дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_1{}^{(n)}$, $\varphi_2{}^{(n)}$ и $u_3{}^{(n,0)}$ принимает вид

$$L_4\varphi_1^{(n)} + \frac{1}{4\pi}L_3\varphi_2^{(n)} = 0, \quad L_3\varphi_1^{(n)} - L_2\varphi_2^{(n)} = 0 \tag{3.2}$$
$$\mathrm{M}_1 M_2' B_{21}^{-1} M_2 \mathrm{M}_1 u_3^{(n,0)} = \mathrm{M}_1 M_2' B_{21}^{-1} M_2 B_{11} M_3 \Phi^{(n-1)}$$
$$L_2 = \beta_{22}^t\partial_1^2 - 2\beta_{12}^t\partial_1\partial_2 + \beta_{11}^t\partial_2^2$$
$$L_3 = -g_{22}\partial_1^3 + (g_{12} + g_{26})\partial_1^2\partial_2 - (g_{21} + g_{16})\partial_1\partial_2^2 + g_{11}\partial_2^3$$
$$L_4 = s_{22}^D\partial_1^4 - 2s_{26}^D\partial_1^3\partial_2 + (2s_{12}^D + s_{66}^D)\partial_1^2\partial_2^2 - 2s_{16}^D\partial_1\partial_2^3 + s_{11}^D\partial_2^4$$

Как и раньше, будем считать, что в соотношениях (3.1) и (3.2) величины с индексами n равны нулю при $n < 0$.

Чтобы точно удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности тонкой пьезоэлектрической пластины, необходимо построить вспомогательные итерационные процессы, описывающие решения типа пограничного слоя [1]. Для интегрального выполнения этих условий достаточно основного итерационного процесса.

Отметим, что два первых уравнения системы (3.2) совпадают с системой разрешающих уравнений прикладной теории обобщенного плоского напряженного состояния тонких пьезоэлектрических пластин, построенной в работах [2,3] путем осреднения основных электромеханических характеристик. Последнее уравнение системы (3.2) по виду совпадает с уравнением классической теории изгиба тонких анизотропных пластин [6]. При этом обе прикладные теории предполагают наличие у пластины плоскости материальной симметрии, параллельной ее срединной плоскости.

4. Анализируя соотношения (2.4), (2.5) и (3.1), (3.2), можно сделать вывод, что отсутствие у пьезоэлектрического слоя или пластины плоскости материальной симметрии, параллельной срединной плоскости, не влияет на построение начального шага итерационного процесса (2.3), а сказывается при выводе соотношений последующих приближений. Следовательно, основные формулы обобщенного плоского напряженного состояния тонких пьезоэлектрических пластин, полученные в работах [2,3] путем осреднения электроупругих характеристик и при предположении наличия плоскости материальной симметрии, совпадающей со срединной плоскостью, справедливы и для тонких пьезоэлектрических пластин, обладающих общими свойствами анизотропии.

Последний вывод справедлив и для анизотропных пластин классического типа. В этом можно убедиться, если предположить, что все пьезоэлектрические модули равны нулю.

Из равенств (2.4) и (3.1) следует, что в случае несимметричного загружения пьезоэлектрического слоя или пластины гипотезы Кирхгофа в нулевом приближении имеют место, а гипотеза о линейности электростатического поля, введенная в работе [4], не выполняется даже в нулевом приближении независимо от наличия у них плоскости материальной симметрии.

Поступила 5 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Вековищева И. А.* Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 2.
3. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 5.
4. *Вековищева И. А.* Теория изгиба тонких пьезоэлектрических пластин. Изв. АН АрмССР. Механика, 1972, т. 25, № 4.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
7. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. М., «Наука», 1968.