Прикладная математика и механика, Том 42, 1978

УДК 539.384.624.073

# ВСТРЕЧНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В. Г. Литвинов, Н. Г. Медведев

(Киев)

Рассмотрены методы минимума энергии и ортогональных проекций для задач о напряженном состоянии ортотропных оболочек вращения переменной толщины, которые позволяют получать приближенные решения и оценивать их погрешность в энергетической норме.

Формулировка метода ортогональных проекций, который является встречным по отношению к методу минимума энергии и позволяет оценивать погрешность приближенных решений в энергетической норме, дана в работе [1]. Там же эти методы изучены для пространственных задач теории упругости и для пластин постоянной толщины.

**1. Основные соотношения.** Потенциальную энергию деформации ортотропной оболочки можно представить в виде [2]

$$W(\omega)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(C_{11}\varepsilon_{11}^2+2C_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+C_{22}\varepsilon_{22}^2+C_{66}\varepsilon_{12}^2)\,d\Omega+ \\ +\frac{1}{2}\int_{\Omega}(D_{11}\gamma_{11}^2+2D_{12}\gamma_{11}\gamma_{22}+D_{22}\gamma_{22}^2+4D_{66}\gamma_{12}^2)\,d\Omega \tag{1.1}$$

Здесь $\omega=(u, v, w)$ — смещения точки срединной поверхности оболочки, являющиеся функциями от $\varphi$, $z$, периодическими с периодом $2\pi$ по $\varphi$; $z\in[0, L]$, $L$ — длина оболочки; $(r, \varphi, z)$ — цилиндрические координаты; $\varepsilon_{ik}$, $\gamma_{ik}$ — компоненты деформации оболочки вращения, выражаемые через $\omega$, коэффициенты первой квадратичной формы $A_1^2$, $A_2^2$, радиусы кривизны $R_1$, $R_2$ и образующую $r(z)$ [3]; коэффициенты $C_{ik}$, $D_{ik}$ зависят от толщины оболочки $h(\varphi, z)$, модулей упругости $E_1$, $E_2$, коэффициентов Пуассона $\nu_1$, $\nu_2$ и модуля сдвига $G$ [2].

**2. Основные предположения.** При нормировании функций $u$, $v$, $w$ в качестве множества, на котором определены эти функции, рассматривается область $\Omega=(0, 2\pi)\times(0, L)$.

Предполагаем, чо функционал $W(\omega)$, определяемый выражением (1.1), задан в некотором подпространстве (которое определено ниже) пространства $H_0=W_{2,0}^1(\Omega)\times W_{2,0}^1(\Omega)\times W_{2,0}^2(\Omega)$ — прямом произведении пространств С. Л. Соболева [4] периодических по $\varphi$ функций; $\omega=(u, v, w)\in H_0$, $u\in W_{2,0}^1(\Omega)$, $v\in W_{2,0}^1(\Omega)$, $w\in W_{2,0}^2(\Omega)$.

Функция смещений $\omega$ удовлетворяет некоторым краевым условиям, которые можно представить в виде $I\omega=0$, где $I$ — оператор граничных условий, действующий в пространстве функций, заданных на $S_1$

$$S_1 = S_{11} \bigcup S_{12}$$
$$S_{11} = \{(\varphi, z) \mid 0 < \varphi < 2\pi, \quad z = 0\}$$
$$S_{12} = \{(\varphi, z) \mid 0 < \varphi < 2\pi, \quad z = L\}$$

Предполагаем выполненными следующие допущения:

1) $h(\varphi, z)$ — измеримая по $d\Omega$ функция, удовлетворяющая почти всюду в $\Omega$ условию $0 < h_1 \leqslant h(\varphi, z) \leqslant h_2$, где $h_1$, $h_2$ — положительные постоянные;

2) $\nu_1$, $\nu_2$ — постоянные, причем $0 < \nu_1 < 1$, $0 < \nu_2 < 1$;

3) $E_1$, $E_2$, $G$ — положительные постоянные;

4) Функция $r(z)$ — дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, L]$ и при $\forall z \in [0, L]$ удовлетворяет неравенствам

$$r(z) \geqslant c, \quad c = \text{const} > 0$$
$$|R_1^{-1} - R_2^{-1}| = |A_1^{-3}\frac{d^2r}{dz^2} + r^{-1}A_1^{-1}| \geqslant c_1, \quad c_1 = \text{const} > 0$$

Существует обобщенная производная $d^3r / dz^3 \in L_\infty(0, L)$;

5) Оператор граничных условий $I$ является линейным непрерывным отображением из $H_0$ в $(L_2(S_1))^m)$ $(m = 3, 4)$ и для $\forall\omega \in H_0$ из условия $W(\omega) = 0$, $I\omega = 0$ следует, что $\omega = 0$.

В частности, допущение 5) будет выполняться, если оператор $I$ соответствует закреплению оболочки в том смысле, что она не может иметь жестких смещений.

Обозначим через $H$ замыкание в норме

$$\|\omega\|_H^2 = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|w\|^2_{W_2^2(\Omega)} \tag{2.1}$$

множества бесконечно дифференцируемых в полосе $0 \leqslant z < L$, $-\infty < \varphi < \infty$ периодических по $\varphi$ функций, удовлетворяющих условию $I\omega = 0$. Очевидно, что $H \subset H_0$.

Рассмотрим в $H$ симметричную билинейную форму

$$\begin{aligned} a(\omega', \omega'') = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\int_\Omega \Big\{ h \Big[ &\varepsilon_{11}'\varepsilon_{11}'' + \nu_2(\varepsilon_{11}'\varepsilon_{22}'' + \varepsilon_{22}'\varepsilon_{11}'') + \\ &+ \frac{\nu_2}{\nu_1}\varepsilon_{22}'\varepsilon_{22}'' + \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1}G\varepsilon_{12}'\varepsilon_{12}''\Big] + \\ &+ \frac{h^3}{12}\Big[\gamma_{11}'\gamma_{11}'' + \nu_2(\gamma_{11}'\gamma_{22}'' + \gamma_{22}'\gamma_{11}'') + \\ &+ \frac{\nu_2}{\nu_1}\gamma_{22}'\gamma_{22}'' + 4\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1}G\gamma_{12}'\gamma_{12}''\Big]\Big\} d\Omega \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\varepsilon_{ik}'$, $\gamma_{ik}'$ и $\varepsilon_{ik}''$, $\gamma_{ik}''$ — компоненты деформаций, порожденные смещениями $\omega'$ и $\omega''$.

В силу допущений 1) — 4) форма $a(\omega', \omega'')$ определена для любых $\omega'$, $\omega''$ из $H$. Очевидно, также, что $a(\omega, \omega) = 2W(\omega)$. На основании допущения 5) из условий $\omega \in H$, $a(\omega, \omega) = 0$ вытекает, что $\omega = 0$. Следовательно, форма $a(\omega', \omega'')$ порождает скалярное произведение и норму в $H$, определяемую выражением

$$\|\omega\|^2_{H'} = a(\omega, \omega) \tag{2.3}$$

Аналогично [3] доказывается следующее утверждение.

*Теорема 1.* Пусть выполнены допущения 1) — 5). Тогда в пространстве $H$ нормы, определяемые выражениями (2.1), (2.3), эквивалентны, т. е. существуют постоянные $m_1$, $m_2 > 0$, такие, что

$$m_1 \|\omega\|_H \leqslant \|\omega\|_{H'} \leqslant m_2 \|\omega\|_H \quad \forall \omega \in H \tag{2.4}$$

Теорема 1 устанавливает коэрцитивность оператора теории оболочек. Другие результаты, связанные с коэрцитивностью операторов оболочек, имеются в работе [5].

**3. Задача о напряженном состоянии оболочки.** Пусть $g$ $(\varphi, z)$ — вектор внешней нагрузки, действующей на оболочку. Предполагаем, что $g \in H^*$ (где $H^*$ — пространство, сопряженное к $H$). Обобщенным решением задачи о напряженном состоянии оболочки вращения назовем функцию $\omega_0 \in$ $\in H$, для которой выполняется условие

$$a(\omega_0, h) = (g, h) \quad \forall h \in H \tag{3.1}$$

Известно [1], что решение задачи (3.1) существует и сообщает минимум функционалу

$$\psi(\omega) = a(\omega, \omega) - 2(g, \omega), \quad \omega \in H$$

Если $V_k$ — конечномерное подпространство в $H$, то существует единственная функция $\omega_k \in V_k$, для которой [1]

$$\psi(\omega_k) = \inf_{\omega \in V_k} \psi(\omega) \tag{3.2}$$

и справедливы соотношения

$$\|\omega_k - \omega_0\|_{H'}^2 = \|\omega_0\|_{H'}^2 - \|\omega_k\|_{H'}^2 \tag{3.3}$$

$$\psi(\omega_0) = -\|\omega_0\|_{H'}^2, \quad \psi(\omega_k) = -\|\omega_k\|_{H'}^2 \tag{3.4}$$

Как видно из (3.3), если известна величина $\|\omega_0\|_{H'}{}^2$ или хотя бы ее оценка сверху, то можно оценить погрешность приближенного решения $\omega_k$. Чтобы оценить сверху величину $\|\omega_0\|_{H'}{}^2$, применим метод ортогональных проекций.

**4. Метод ортогональных проекций.** Обозначим через $E$ прямое произведение шести пространств $L_2(\Omega)$, т. е. $E = (L_2(\Omega))^6$. $E$ является множеством всевозможных упорядоченных элементов вида

$$(T_1, T_2, T_{12}, M_1, M_2, M_{12}) = M; \quad T_1, T_2, T_{12}, M_1, M_2, M_{12} \in L_2(\Omega)$$

Множество $E$ становится гильбертовым пространством, если в нем ввести скалярное произведение и норму, полагая

$$(M', M'') = \int_\Omega (T_1'T_1'' + T_2'T_2'' + T_{12}'T_{12}'' + M_1'M_1'' + M_2'M_2'' + M_{12}'M_{12}'')\, d\Omega \tag{4.1}$$

$$\|M\| = (M, M)^{1/2}$$

Считая выполненными допущения 1) — 5), введем в пространстве $E$ билинейную симметричную форму

(4.2) $$b(M', M'') = \int\limits_\Omega \frac{1}{h}\Big[D(X_1'X_1'' + \nu_1 X_1'X_2' + \nu_1 X_1''X_2'' + {} + \frac{\nu_2}{\nu_1} X_2'X_2'') + \frac{T_{12}'T_{12}''}{G}\Big] d\Omega + \int\limits_\Omega \frac{12}{h^3}\Big[D\big(Y_1'Y_1'' + {} + \nu_1 Y_1'Y_2' + \nu_1 Y_1''Y_2'' + \frac{\nu_2}{\nu_1} Y_2'Y_2''\big) + 4\frac{M_{12}'M_{12}''}{G}\Big] d\Omega$$

$$X_1 = T_1 - T_2\nu_1, \quad X_2 = T_2 - T_1\nu_2$$

$$Y_1 = M_1 - M_2\nu_1, \quad Y_2 = M_2 - M_1\nu_2, \quad D = E_1^{-1}(1 - \nu_1\nu_2)^{-1}$$

*Теорема 2.* При выполнении допущений 1) — 3) форма $b(M', M'')$ определяет скалярное произведение в $E$ и норму

(4.3) $$\| M \|_E = [b(M, M)]^{1/2}$$

эквивалентную основной норме (4.1) пространства $E$.

*Доказательство.* Используя неравенство $-a^2 - b^2 \leqslant -2ab$ и допущения 1) — 3), имеем

$$b(M, M) = \int\limits_\Omega \frac{1}{h}\Big[P(T_1, T_2) + \frac{T_{12}^2}{G}\Big] d\Omega + {} + \int\limits_\Omega \frac{12}{h^3}\Big[P(M_1, M_2) + \frac{4M_{12}^2}{G}\Big] d\Omega \geqslant \int\limits_\Omega \frac{1}{h}\Big[Q(T_1, T_2) + \frac{T_{12}^2}{G}\Big] d\Omega + {} + \int\limits_\Omega \frac{12}{h^3}\Big[Q(M_1, M_2) + \frac{4M_{12}^2}{G}\Big] d\Omega \geqslant {} \geqslant C_1 \int\limits_\Omega (T_1^2 + T_2^2 + T_{12}^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_{12}^2)\, d\Omega = C_1 \| M \|^2,$$

$$\forall M \in E$$

$$P(x, y) = \frac{1}{E_1}\Big(x^2 + \frac{\nu_2}{\nu_1} y^2 - 2\nu_1 xy\Big), \quad Q(x, y) = {} = \frac{1}{E_1}\Big[(1 - \nu_1)x^2 + \nu_1\Big(\frac{1}{\nu_2} - 1\Big)y^2\Big], \quad C_1 = \mathrm{const} > 0$$

Из предположений 1) — 3) следует обратная оценка

$$b(M, M) \leqslant c_2 \| M \|^2, \quad \forall M \in E; \quad c_2 = \mathrm{const} > 0$$

Утверждение доказано.

Введем линейный ограниченный оператор $U$, действующий из $E$ в $H^*$, который определим выражением

(4.4) $$(UM, \omega) = \int\limits_\Omega (T_1\varepsilon_{11} + T_2\varepsilon_{22} + T_{12}\varepsilon_{12} + M_1\gamma_{11} + {} + M_2\gamma_{22} + 2M_{12}\gamma_{12})\, d\Omega, \quad M \in E, \quad \omega \in H$$

Обозначим через $F_2$ ядро оператора $U$

(4.5) $$F_2 = \{M \mid M \in E, \quad UM = 0\}$$

Здесь $F_2$ — замкнутое линейное множество в $E$, т. е. подпространство в $E$. Линейность множества $F_2$ очевидна, а замкнутость его следует из того что $F_2$ является прообразом замкнутого множества, состоящего из одной точки (нулевого элемента в $H^*$) при непрерывном отображении $U$.

Рассмотрим оператор

$$A\colon \omega \to A\omega = \{C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22},\ \ C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22},\ \ C_{66}\varepsilon_{12},\ \ D_{11}\gamma_{11} + D_{12}\gamma_{22},\ \ D_{12}\gamma_{11} + D_{22}\gamma_{22},\ \ 2D_{66}\gamma_{12}\} \tag{4.6}$$

являющийся линейным непрерывным отображением $H$ в $E$. Обозначим через $F_1$ образ оператора $A$, $F_1 = A\,(H)$. Очевидно, что $F_1$ — линейное множество. Покажем, что $F_1$ — замкнутое множество в $E$. Пусть $\{A\omega_n\}$ — фундаментальная последовательность элементов из $F_1$. В силу полноты пространства $E$ существует элемент $M^{(0)} \in E$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \| A\omega_n - M^{(0)} \|_E = 0 \tag{4.7}$$

Остается убедиться, что $M^{(0)} \in F_1$.

Из соотношений (2.2), (2.3), (4.2), (4.3), (4.6) следует тождество

$$\| A\omega \|_E^2 = \| \omega \|_{H'}^2 \quad \forall\omega \in H \tag{4.8}$$

Из (4.8) вытекает, что $\{\omega_n\}$ — фундаментальная последовательность в $H$ и в силу полноты $H$ сходится к элементу $\omega_0 \in H$. Теперь, учитывая (4.7) и принимая во внимание, что $A$ — непрерывный оператор из $H$ в $E$, получим

$$\lim_{n\to\infty} A\omega_n = A\omega_0 = M^{(0)}$$

Следовательно, $M^{(0)} \in F_1$ и $F_1$ — подпространство в $E$.

Пусть $M$ — произвольный элемент из $F_2$, а $N = A\omega$ — произвольный элемент из $F_1$. Из соотношений (4.2), (4.5), (4.6) имеем

$$b\,(M, N) = (UM, \omega) = 0$$

поэтому $F_1$ и $F_2$ — ортогональные подпространства.

Покажем далее, что подпространства $F_1$ и $F_2$ образуют разложение $E$, т. е. $E = F_1 \oplus F_2$.

Вернемся к форме $a\,(\omega', \omega'')$, определяемой соотношением (2.2). Эту форму можно представить в виде

$$a\,(\omega', \omega'') = (B\omega', \omega''), \quad \forall\omega', \omega'' \in H \tag{4.9}$$

где $B$ — линейное непрерывное отображение из $H$ в $H^*$, а $(B\omega', \omega'')$ — скалярное произведение элементов $B\omega' \in H^*$, $\omega'' \in H$. Из соотношений (2.2), (4.4), (4.6) следует, что $B$ является композицией отображений $A \in L\,(H, E)$ и $U \in L\,(E, H^*)$

$$B = U \circ A \tag{4.10}$$

Пусть $M$ — произвольный элемент из $E$. Покажем, что его можно представить в виде $M = M^{(1)} + M^{(2)}$, где $M^{(1)} \in F_1$ и $M^{(2)} \in F_2$.

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $\omega \in H$, такую, что

$$B\omega = UM \tag{4.11}$$

Из соотношения (4.9) следует, что задача (4.11) имеет единственное решение $\omega \in H$. Тогда $M^{(1)} = A\omega \in F_1$ и в силv (4.10), (4.11) для элемента $M^{(2)} = M - M^{(1)} = M - A\omega$ имеем

$$UM^{(2)} = U(M - A\omega) = 0$$

Следовательно, $M^{(2)} \in F_2$ и $E = F_1 \oplus F_2$.

Вернемся теперь к задаче о напряженном состоянии оболочки (3.1). Из соотношений (2.2), (4.4), (4.6) следует, что задача (3.1) представляется в виде

$$U \circ A\omega = B\omega = g, \quad g \in H^* \tag{4.12}$$

Пусть $M'$ — такой элемент из $E$, что $UM' = g$. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(M) = \| M' - M \|_E^2, \quad M \in F_2 \tag{4.13}$$

Так как $F_2$ — замкнутое линейное множество в гильбертовом пространстве $E$, то существует единственный элемент $M^{(0)} \in F_2$, для которого

$$J(M^{(0)}) = \inf_{M \in F_2} J(M) \tag{4.14}$$

и $M^{(0)}$ является проекцией элемента $M'$ на $F_2$. Тогда $M' - M^{(0)} \in F_1$, и поэтому существует функция $\omega \in H$, такая, что

$$A\omega = M' - M^{(0)} \tag{4.15}$$

Отсюда имеем

$$B\omega = (U \circ A)\,\omega = U(M' - M^{(0)}) = g$$

Следовательно, если элемент $M^{(0)} \in F_2$ минимизирует функционал (4.13), то функция $\omega \in H$, для которой $A\omega = M' - M^{(0)}$, является решением задачи (4.12), т. е. обобщенным решением задачи о напряженном состоянии оболочки вращения (в обозначениях п. 3 $\omega = \omega_0$). При этом с учетом (4.8), (4.15) имеем

$$J(M^{(0)}) = \| M' - M^{(0)} \|_E^2 = \| A\omega \|_E^2 = \| \omega \|_{H'}^2$$

Полученные результаты сформулируем в следующем виде.

*Теорема 3.* Пусть выполнены предположения 1) — 5), $g \in H^*$, а $M'$ — произвольный элемент из $E$, удовлетворяющий соотношению $UM' = g$. Тогда существует единственный элемент $M^{(0)}$, удовлетворяющий условию (4.14), а если $\omega \in H$ — решение задачи (4.12), то $A\omega = M' - M^{(0)}$ и

$$\| M' - M^{(0)} \|_E^2 = \| \omega \|_{H'}^2 \tag{4.16}$$

*Теорема 4.* Пусть $\{F_2^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность $n$-мерных подпространств пространства $F_2$. Существует единственный элемент $M^{(n)} \in F_2^{(n)}$, такой, что

$$\| M' - M^{(n)} \|_E^2 = \inf_{M \subset F_2^{(n)}} \| M' - M \|_E^2 \tag{4.17}$$

и если

$$\lim_{n \to \infty} \{ \inf_{N \in F_2^{(n)}} \| N - M \|_E \} = 0, \quad \forall M \in F_2 \tag{4.18}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \| M' - M^{(n)} - A\omega \|_E = 0 \tag{4.19}$$

$$\| M' - M^{(n)} - A\omega \|_E^2 \leqslant \| M' - M^{(n)} \|_E^2 - \| \omega_k \|_{H'}^2 \tag{4.20}$$

$$\| \omega_k - \omega \|_{H'}^2 \leqslant \| M' - M^{(n)} \|_E^2 - \| \omega_k \|_{H'}^2 \tag{4.21}$$

Здесь $\omega$ — решение задачи (4.12), $\omega_k$ — элемент из $V_k$, удовлетворяющий соотношению (3.2).

*Доказательство.* С учетом (4.15) имеем

$$\| M' - M^{(n)} \|_E^2 \geqslant \| M' - M^{(0)} \|_E^2 = \| \omega \|_{H'}^2$$

Отсюда и из (3.3), учитывая, что $\omega_0 = \omega$, получим неравенство (4.21). С другой стороны, с учетом (4.5) найдем

$$\| M' - M^{(0)} - A\omega \|_E^2 = \| M^{(0)} - M^{(n)} \|_E^2 \tag{4.22}$$

Учитывая, что $M' - M^{(0)} \in F_1$, $M^{(0)} - M^{(n)} \in F_2$ и $F_1 \perp F_2$, получим

$$\| M' - M^{(n)} \|_E^2 = \| (M' - M^{(0)}) + (M^{(0)} - M^{(n)}) \|_E^2 = \\ = \| M' - M^{(0)} \|_E^2 + \| M^{(0)} - M^{(n)} \|_E^2 \tag{4.23}$$

Из (4.16), (4.22), (4.23) следует

$$\| M' - M^{(n)} - A\omega \|_E^2 = \| M^{(0)} - M^{(n)} \|_E^2 = \\ = \| M' - M^{(n)} \|_E^2 - \| M' - M^{(0)} \|_E^2 = \|M' - M^{(n)} \|_E^2 - \| \omega \|_{H'}^2$$

Отсюда с учетом (3.4) получим (4.20).

Для $\forall M \in F_2^{(n)}$ справедливо представление

$$\| M' - M \|_E^2 = \| M' - M^{(0)} \|_E^2 + \| M^{(0)} - M \|_E^2$$

Отсюда с учетом (4.17), (4.18) найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \| M^{(0)} - M^{(n)} \|_E^2 = 0$. Теперь из (4.22) следует соотношение (4.19). Теорема доказана.

Поступила 20 VI 1977

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.
3. *Литвинов В. Г., Медведев Н. Г.* Задача устойчивости оболочек вращения и методы Ритца — Галеркина. Прикл. механ., 1977, т. 13, вып. 7.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., «Наука», 1969.
5. *Корнеев В. Г.* О дифференциальных операторах теории тонких оболочек и теории оболочек Рейсснера. В кн.: Исследования по теории упругости и пластичности, вып. 10. Изд-во ЛГУ, 1974.