Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ДЕЙСТВИЕ УГЛУБЛЕННОЙ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ НА ВЯЗКОУПРУГИЙ СЛОЙ, ПОКРЫВАЮЩИЙ УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

С. К. Асланов, А. С. Семенов

(Одесса)

Рассматривается плоская задача о действии импульсного источника возмущений на двухслойное основание, состоящее из верхнего вязкоупругого слоя, полностью сцепленного с упругим полупространством. Верхняя граница основания не нагружена. Импульсный источник находится в упругом полупространстве на данной глубине и задается массовыми силами в форме произведения дельта-функций по координатам и времени. Исследования проводятся при помощи интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Смещения в слое представляются в виде равномерно сходящихся рядов по отраженным в слое волнам. В качестве примера рассматривается вязкоупругая среда больцмановского типа.

Вязкоупругий слой толщины R покрывает упругое полупространство. Изучается динамическое поведение слоя, когда в полупространстве на глубине $H - h$ от границы раздела сред включается импульсный источник возмущений.

Задача сводится к решению уравнений Коши

$$\sigma_{kl,l}^{(1)} = \rho^{(1)}\ddot{u}_k^{(1)}, \quad \sigma_{kl,l}^{(2)} + \rho^{(2)}X_k = \rho^{(2)}\ddot{u}_k^{(2)} \quad (k,\ l = 1,2) \tag{1}$$

в слое и полупространстве соответственно при нулевых начальных данных и при следующих условиях на граничных поверхностях:

$$z = 0, \quad \sigma_{kl}^{(1)} = 0; \quad z = h, \quad \sigma_{kl}^{(1)} = \sigma_{kl}^{(2)}, \quad u_k^{(1)} = u_k^{(2)} \tag{2}$$

($\rho^{(j)}$ — плотности сред, $u_k^{(j)}$ — смещения в слое и полупространстве). Связь между напряжениями и деформациями принимается в виде

$$\sigma_{kl} = \delta_{kl}L(\varepsilon) + 2M(\varepsilon_{kl}) \quad (\varepsilon = u_{k,k}, \quad \varepsilon_{kl} = {}^1/_2\,(u_{k,l} + u_{l,k})) \tag{3}$$

Здесь L, M — линейные операторы, дифференциальные по времени с постоянными коэффициентами или интегральные по времени с разностными ядрами для вязкоупругой среды, заполняющей слой. Для упругой среды полупространства операторы L, M вырождаются в постоянные Ляме λ и μ.

Для решения задачи используются интегральные преобразования Лапласа по времени и координате z с параметрами s и p соответственно и интегральное преобразование Фурье по координате x с параметром k. Преобразованные величины будем обозначать теми же буквами, что и оригиналы, указывая параметры, от которых они зависят.

Для массовых сил принят следующий закон изменения:

$$X_1 = X = 0, \quad X_2 = Z = P\delta(x)\,\delta(z - H)\,\delta(t)$$

Используя связь (3), применяя указанные интегральные преобразования к задаче, описываемой вторым уравнением (1) с условиями (2), (3), и учитывая условие излучения для смещений и напряжений в полупространстве, получаем следующие формулы для смещений в полупространстве:

$$(4)\qquad \begin{aligned} u_1^{(2)}(k, s; z) = &- \frac{Pik}{2s^2\Delta}\{\Delta \exp[-\nu_a(H' - z)] - T_+{}^*(k, s)\,Q_1 \times \\ &\times \exp[-\nu_a(H' + z)] + 4\nu_a\nu_b g Q_3 \exp[-\nu_a(H' - \nu_b z]\} - \\ &- \frac{P\nu_b}{2s^2\Delta}\{\Delta \exp[-\nu_b(H' - z)] + T_+{}^*(k, s)\,Q_2 \exp[-\nu_b(H' + z)] - \\ &- 4k^2 g Q_4 \exp[-\nu_b H' - \nu_a z]\} \\ u_2^{(2)}(k, s; z) = &- \frac{\nu_a}{ik}(u_p^{(2)} - u_{pp}^{(2)} + u_{sp}^{(2)}) - \frac{ik}{\nu_b}(u_s^{(2)} - u_{ss}^{(2)} + u_{ps}^{(2)}); \\ H' = H &- 2h \\ \Delta = T_-\Delta_0, &\quad g_s = 2k^2 + s^2 v_s{}^2, \quad g = 2k^2 + s^2 b^2 \\ T_\pm{}^* = g^2 &\pm 4k^2\nu_a\nu_b, \quad \nu_a{}^2 = k^2 + s^2 a^{-2}, \quad \nu_b{}^2 = k^2 + s^2 b^{-2} \\ T_\pm = g_s{}^2 &\pm 4k^2 \nu_p \nu_s, \quad \nu_p{}^2 = k^2 + s^2 v_p{}^2, \quad \nu_s{}^2 = k^2 + s^2 v^2{}_s \\ a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho^{(2)}}, &\quad b^2 = \frac{\mu}{\rho^{(2)}}, \quad v_p{}^2 = \frac{\rho^{(1)}}{L + 2M}, \quad v_s{}^2 = \frac{\rho^{(1)}}{M} \end{aligned}$$

Δ_0, Q_i не приводятся в силу громоздкости.

Вывод формул (4) и все дальнейшие преобразования и вычисления проводились в предположении

$$v_p / v_s = b / a = \nu = \text{const}$$

которое приводит к равенству $v_p a = v_s b = \Theta$.

Первичные продольная и поперечная волны, падая из полупространства на границу раздела сред, каждая возбуждает в слое продольную и поперечную волны. Для удобства исследований поле смещений в слое разбивается на части, обусловленные последовательными отражениями волн от границ слоя и представляются равномерно сходящимися рядами [1] (для удобства записи в дальнейшем используются обозначения $u_1^{(1)} = u$, $u_2^{(1)} = w$, $u(k, s; z) = u_p + u_s$, $w(k, s; z) = u_p\nu_p / ik - u_s ik / \nu_s$).

Приведем формулу лишь для u_p

$$u_p(k, s; z) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn}^+ \exp[-(n + 1)\nu_p h - m\nu_s h + \nu_p z] +$$

$$+ \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn}^- \exp[-(n - 1)\nu_p h - m\nu_s h - \nu_p z]$$

$$a_{mn}^+ = \Omega(V_{mn} T_- p^+ - V_{m-2,\, n} T_+ s^+ - V_{m-1,\, n-1} 4k^2 g s^-)$$

$$a_{mn}^- = \Omega(V_{m,\, n-2} T_+ p^- - V_{m-2,\, n-1} T_- s^- + V_{m-1,\, n-1} 4k^2 g s^+)$$

$$p^\pm = B\tau_1 \pm \nu_b ikC\tau_2, \quad s^\pm = ikD\tau_1 \pm \nu_b A\tau_2$$

$$A = 2k^2(\nu_p - \nu_a)(\Theta^2 - 1) + 2s^2\nu_a b^{-2}\Theta^2$$
$$C = 2(k^2 - \nu_s\nu_a)(\Theta^2 - 1)$$
$$B = 2k^2(\nu_s - \nu_b)(\Theta^2 - 1) + 2s^2\nu_b b^{-2}\Theta^2$$
$$D = 2(k^2 - \nu_p\nu_b)(\Theta^2 - 1)$$
$$\Omega = \frac{2Pik\Theta^2}{s^2\Delta}, \quad \tau_1 = \nu_a \exp[-\nu_a(H-h)], \quad \tau_2 = \exp[-\nu_b(H-h)]$$

Все V_{mn} представляются алгебраическими выражениями, остающимися, во всяком случае, ограниченными при $s \to \infty$ (в частности, $V_{00} = 1$) и обращающимися в нуль, если хотя бы один из индексов m или n принимает отрицательное значение. Интенсивность отражающихся от границ слоя волн быстро затухает. Поэтому наибольший интерес представляет изучение первичных преломленных в слой и отраженных от границы $z = 0$ волн. Придавая m и n нулевые значения, приходим к следующим формулам, описывающим трансформанты смещений в слое от первичных преломленных в слой волн:

$$u(k, s; z) = a_{00}^+ \exp[-\nu_p(h - z)] + b_{00}^+ \exp[-\nu_s(h - z)] \tag{5}$$
$$w(k, s; z) = c_{00}^+ \exp[-\nu_p(h - z)] + d_{00}^+ \exp[-\nu_s(h - z)]$$
$$a_{00}^+ = \Omega T_- \{\nu_a B \exp[-\nu_a(H - h)] +$$
$$+ \nu_b kiC \exp[-\nu_b(H - h)]$$
$$b_{00}^+ = \Omega T_- \nu_s \left\{\nu_a D \exp[-\nu_a(H-h)] + \frac{\nu_b}{ik} A \exp[-\nu_b(H-h)]\right.$$
$$c_{00}^+ = \frac{\nu_p}{ik} a_{00}^+, \quad d_{00}^+ = -\frac{ik}{\nu_s} b_{00}^+$$

Метод обращения трансформант проиллюстрируем на одном из слагаемых вертикальной составляющей поля смещений (5), обозначив его через w_{sa}. Прежде всего применим обратное преобразование Фурье

$$w_{sa}(s; x, z) = \frac{2P\Theta^2}{\pi s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2\nu_a(k^2 - \nu_p\nu_b)(\Theta^2 - 1)}{\Delta_0} \exp\{f(k, s; x, z)\}\, dk \tag{6}$$
$$f(k, s; x, z) = -\nu_a(H - h) - \nu_s(h - z) + ikx$$

К вычислению интеграла (6) и ему подобных применяется асимптотический метод, эффективный при исследовании воздействий на среду, резко меняющихся со временем. С целью выделения большого параметра, по обратным степеням которого раскладывается решение, произведем замену переменной

$$k = bv_s s\xi = av_p s\xi \tag{7}$$

Используя замену (7), все интегралы типа (6), описывающие составляющие смещений, можно представить в каноническом виде

$$I(s; x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s; x, z, \xi) \exp\{-s\Theta f(x, z, \xi)\}\, d\xi \tag{8}$$

Амплитудная и фазовая функции в (8) имеют на комплексной ξ-плоскости особенности, взаимное расположение которых зависит от соотношения между скоростями распространения волн в упругом полупространстве и вязкоупругом слое. В дальнейшем предполагается, что

$$a > b > 1 / v_p > 1 / v_s$$

Корни уравнений $T_- = 0$, $\Delta_0 = 0$ и все точки ветвления подынтегральной функции располагаются на мнимой оси. От точек ветвления проводим разрезы параллельно действительной оси $\operatorname{Re} \xi$ на бесконечность. Деформируя контур интегрирования, сводим интеграл (8) к сумме вычетов и интегралу по контуру, обходящему разрезы. Оставляя вопрос вычисления вычетов (дающих статическую и релеевскую части поля смещений), рассмотрим метод вычисления интегралов по контуру, обходящему разрезы и описывающих распространение продольных и поперечных волн. При достаточно кратковременных воздействиях возникающее в среде давление сконцентрировано в основном в окрестности фронтов распространяющихся волн. Предположение $s \gg 1$ в формулах (4), (5), (8) позволяет изучать смещения в окрестности фронтов волн и применять к вычислению интегралов типа (8) асимптотические методы. Воспользуемся методом стационарной фазы. Стационарная точка определяется из условия $f'(x, z, \xi) = 0$ (с учетом равенства $x = (H - h) \operatorname{tg} \alpha_2 + (h - z) \operatorname{tg} \beta_1$)

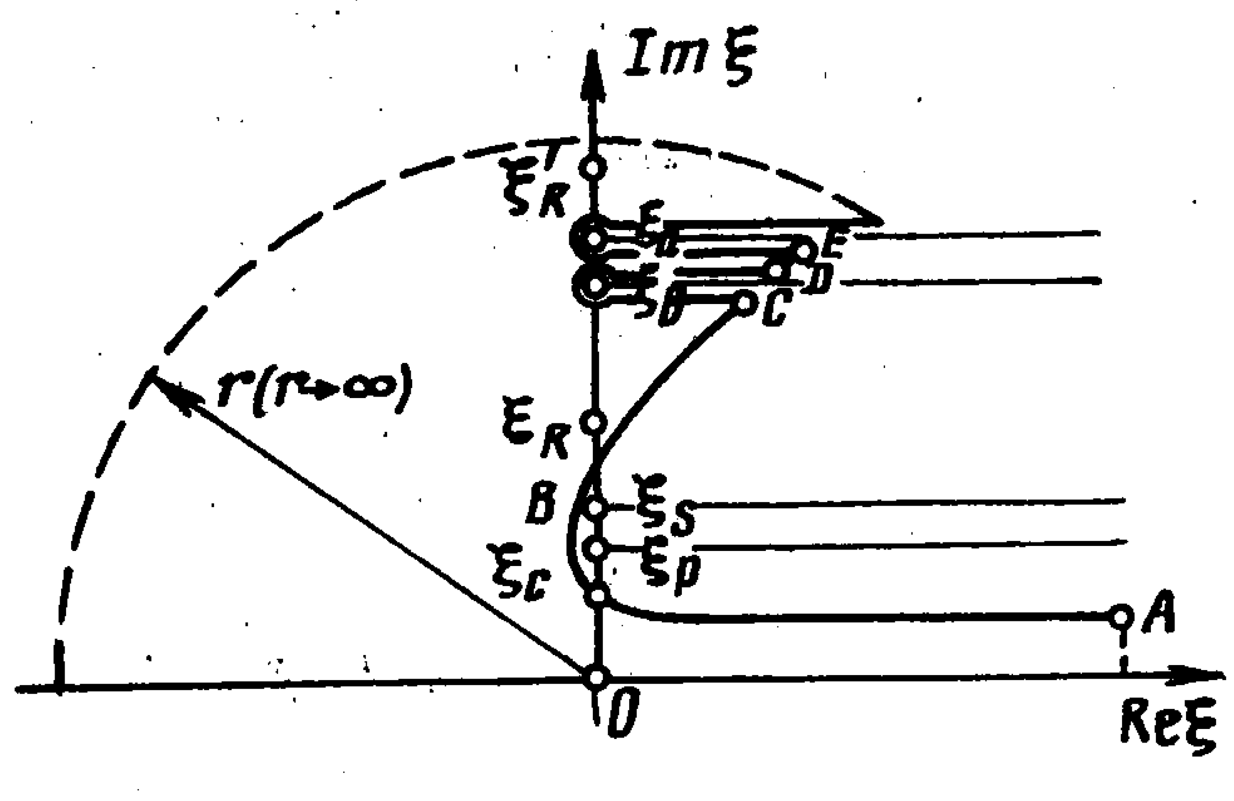
$$\xi_c = \frac{i \sin \beta_1}{b} = \frac{i \sin \alpha_2}{a \Theta}$$

и располагается на мнимой оси ниже нижней точки ветвления. При вычислении остальных составляющих смещений предполагалось выполненным равенство

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} = \nu$$

где α_2, β_2 — углы падения продольной и поперечной волн из полупространства на границу раздела сред $z = h$ и α_1, β_1 — углы преломления в слой продольной и поперечной волн. Контур, обходящий разрезы, деформируется в стационарный контур *ABCDE* (фигура), определяемый уравнением

$$\operatorname{Im} [f(x, z, \xi)] = \operatorname{Im} [f(x, z, \xi_c)]$$



При выполнении условия $h / H \ll 1$ уравнение $f'(x, z, \xi) = 0$, кроме указанного ξ_c, имеет еще одно решение ξ_c'. Вторая стационарная точка ξ_c' располагается на мнимой оси вблизи ξ_c. Считаем условие $h / H \ll 1$ не выполненным и ограничимся случаем наличия лишь одной стационарной точки. Расположение всех упомянутых выше точек и стационарного контура указано на фигуре, причем (v_R, v_R' — скорости волн Релея соответственно в упругой и вязкоупругой средах)

$$\xi_R = \frac{i}{v_R}, \quad \xi_R' = \frac{i}{v_R'}, \quad \xi_b = \frac{i}{b}, \quad \xi_a = \frac{i}{a}, \quad \xi_s = \frac{i}{b\Theta}, \quad \xi_p = \frac{i}{a\Theta}$$

Чтобы точка ξ_a располагалась между ξ_b и ξ_s, необходимо соблюдение условия $\Theta^{-1} < \nu$.

Основной вклад в интеграл по стационарному контуру $ABCDE$ дает интегрирование по малой окрестности стационарной точки. В тех случаях, когда стационарный контур пересекает разрез, идущий от некоторой точки ξ_i к вкладу интеграла в стационарной точке ξ_c, следует добавить интеграл по малой окрестности точки ξ_i, в которой исходный интеграл типа (8) принимает резко выраженное максимальное значение. Пользуясь стандартной схемой метода [2] и удерживая главный член асимптотического разложения, получим

$$w_{sa}(x, z, s) = w_{sa}^{(1)}(x, z, \xi_c) + w_{sa}^{(2)}(x, z, \xi_a, \xi_b) \tag{9}$$

$$w_{sa}^{(1)}(x, z, \xi_c) = -P\sqrt{\frac{8b}{\pi}}\Phi(\xi_c)\frac{M+N\Theta}{\sqrt{G+R\Theta}}\frac{\Theta^2-1}{\Theta^2 s^2\sqrt{s\Theta}}\times$$

$$\times\exp\left\{-sf(x, z, \xi_c) - \frac{i\pi}{4}\right\} + O\left(\frac{1}{s^3}\right)$$

$$f(x, z, \xi_c) = \frac{(H-h)\sec\alpha_2}{a} + \frac{\Theta(h-z)\sec\beta_1}{b}, \quad N = \sin^2\beta_1$$

$$G = (h-z)\nu\cos^2\alpha_2\sec\beta_1, \quad R = (H-h)\cos^2\beta_1\sec\alpha_2$$

$$\Phi(\xi_c) = \cos^2\alpha_2\sin^2\beta_1\cos\beta_1\frac{\nu^{3/2}}{\Delta_0(\xi_c)}$$

$$M = [(1-\nu^2\sin^2\alpha_2)(\nu^2-\sin^2\beta_1)]^{1/2}$$

В трансформанте (9) и ей аналогичных для других составляющих смещений от параметра s преобразования Лапласа по времени зависят лишь Θ. Трансформанты обращаются либо точно, в случае простой зависимости Θ от времени (параметра s), либо приближенно путем разложения Θ в ряд по обратным степеням s.

Пусть, например, вязкоупругий слой заполняет среда больцмановского типа, тогда

$$L(\varepsilon) = \lambda\varepsilon - \int_0^t Q_1(t-\tau)\varepsilon(\tau)\,d\tau, \quad M(\varepsilon_{kl}) = \mu\varepsilon_{kl} - \int_0^t Q_2(t-\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)\,d\tau$$

причем ядра объемной и сдвиговой релаксаций выбираются в виде

$$Q_2(t) = \frac{\mu_0}{\tau_0}\exp\left\{-\frac{t}{\tau_0}\right\}, \quad Q_1(t) = \frac{\lambda}{\mu}Q_2(t)$$

В поле трансформант по времени будет справедливо равенство

$$\Theta = \frac{1}{1-\eta}, \quad \eta = \eta_0\frac{1}{s\tau_0+1}, \quad \eta_0 = \frac{\mu_0}{\mu} < 1, \quad \rho = \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}} = 1 \tag{10}$$

Экспоненциальный множитель в (9), содержащий Θ, представим с учетом (10) в виде

$$\exp\{-sf(x, z, \xi_c)\} = \exp\left\{-s\left[\frac{H-h}{a}\sec\alpha_2 + \frac{R-z}{b}\left(\sec\beta_1 + \frac{\eta_0}{2s\tau_0}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{1 + \frac{h-z}{8b\tau_0}\frac{3\eta_0^2-4\eta_0}{s\tau_0+1} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right\}$$

В разложениях в ряд других выражений (9), содержащих Θ, удерживаются члены ряда до порядка s^{-1} включительно. Применение обратного преобразования Лапласа

[3] дает окончательную формулу смещения вдоль оси Oz (приведем формулу лишь $w_{sa}^{(1)}$)

$$w_{sa}^{(1)}(x, z, \tau) = P\sqrt{\frac{8b\tau_0}{\pi}}\frac{M+N}{\sqrt{G+R}}\frac{K}{\Delta_0'}\exp\left\{-\eta_0\omega-\frac{i\pi}{4}\right\}H(\tau-T)\times$$

$$\times\left\{2(\tau-T)^{3/2}\left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right]^{-1}\exp[-(\tau-T)]_1F_1\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},\tau-T\right)+\right.$$

$$+\left[\frac{\omega}{4}(3\eta_0-4)+\frac{N_1-G_1}{2}-\frac{E}{\Delta_0'}\right](\tau-T)^{5/2}\left[\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\right]^{-1}\times$$

$$\left.\times\exp[-(\tau-T)]_1F_1\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2},\tau-T\right)\right\}$$

$$\omega=\frac{h-z}{b\tau_0}\sec\beta_1,\quad \tau=\frac{t}{\tau_0},\quad T=\frac{(H-h)\sec\alpha_2}{a\tau_0}+\frac{(h-z)\sec\beta_1}{b\tau_0}$$

$$N_1=\frac{N}{M+N},\quad G_1=\frac{G+2R}{2(G+R)},\quad K=\eta_0\nu^{3/2}\cos^2\alpha_2\sin^2\beta_1\cos\beta_1$$

$$E=M(1+4N\cos\beta_1\cos\alpha_2)-2\nu N\cos^2\frac{\alpha_2}{2}\sqrt{1-\nu^2\sin^2\alpha_2}-$$

$$-\cos\beta_1\left(\frac{\nu}{2}\cos\alpha_2+4N\sqrt{|\nu^2-\sin^2\beta_1|}\right)$$

$$\Delta_0'=(\cos\beta_1+\sqrt{1-\nu^2\sin^2\alpha_2})(\nu\cos\alpha_2+\sqrt{|\nu^2-\sin^2\beta_1|})$$

Здесь $H(\tau)$ — функция Хевисайда, $_1F_1(\alpha,\beta,\tau)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Учет членов разложения в ряд до порядка s^{-1} включительно позволяет вводить безразмерные параметры

$$\frac{H}{b\tau_0}=H_0,\quad \frac{h}{b\tau_0}=h_0,\quad \frac{z}{b\tau_0}=z_0,\quad \frac{t}{\tau_0}=\tau,\quad \frac{\mu_0}{\mu}=\eta_0,\quad \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}}=\rho$$

Свойства вязкоупругой среды и тип динамического воздействия существенно влияют на параметры гипергеометрической функции, которая в частных случаях вырождается в элементарные, бесселевы и другие функции.

Полученные по приведенной методике формулы описывают поведение вязкоупругой среды вблизи фронтов распространяющихся волн.

Поступила 27 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрашень Г. И.* Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями. Уч. зап. ЛГУ, 1952, вып. 26, № 162.
2. *Focke J.* Asymptotische Entwicklungin mittels der Methode der stationären Phase. Berichte Verhandl. Sächsich. Akad. Wiss., Math. und naturewiss. Kl., 1954, Bd 101, H. 3.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.