Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3 : 534.231.1

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Буренин, А. Д. Чернышов

(Воронеж)

В рамках адиабатической, квадратичной теории упругости изучаются ударные волны, распространяющиеся в изотропной деформированной упругой среде. Выписана система уравнений в разрывах, описывающая процесс распространения ударной волны, из решения которой определены скорости возможных ударных волн. Из условий разрешимости данной системы получены условия существования возможных ударных волн в зависимости от свойств среды и деформированного состояния перед поверхностью разрывов. Некоторые результаты обобщаются на случай произвольной зависимости упругого потенциала от инвариантов тензора деформаций. Изучаются ограничения на существование ударных волн, накладываемые вторым законом термодинамики.

Исследованию свойств ударных волн, распространяющихся в нелинейной упругой среде, посвящена обширная литература (см., например, [1–6]). Наиболее изученными являются ударные волны в несжимаемой упругой среде [1]. При рассмотрении ударных волн в сжимаемой среде удавалось получать результаты лишь при ограничениях, накладываемых либо на зависимость упругого потенциала от инвариантов тензора деформаций [2–4], либо на деформированное состояние перед ударной волной [4–6], либо ограничиваясь рассмотрением лишь некоторых видов волн [3,5,6]. В данной работе не вводится других ограничений, кроме того, что учитываются лишь старшие нелинейные члены (квадратичная теория упругости) и проводится полное исследование свойств ударных волн при произвольном деформированном состоянии перед поверхностью разрывов.

1. Изотропную упругую среду определим упругим потенциалом $W = W(I_1, I_2, I_3)$, где I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора деформаций Альманси. Компоненты тензора деформаций Альманси e_{ij} в прямоугольной декартовой системе координат через компоненты вектора перемещений u_i представимы в виде

$$e_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \quad I_1 = e_{jj}, \quad I_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad I_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki} \tag{1.1}$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} определяются формулами

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj} - 2e_{kj}) \tag{1.2}$$

$$\rho/\rho_0 = (1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - {}^4/_3 I_1^3 + 4I_1I_2 - {}^8/_3 I_3)^{1/2}$$

В (1.2) δ_{kj} — символ Кронекера; отношение текущей плотности среды ρ к плотности среды в свободном состоянии ρ_0 выражено через компоненты тензора деформаций уравнением неразрывности.

Свяжем с ударной волной, распространяющейся в упругой среде, подвижную систему координат x_i ($i = 1, 2, 3$), направив ось x_1 по нормали к поверхности разрывов. Компоненты вектора скорости v_i в подвижной системе координат вычисляются согласно формуле

$$v_i = \delta u_i/\delta t + (v_1 - G)u_{i,1} + v_\alpha u_{i,\alpha} \quad (\alpha = 2,\ 3) \tag{1.3}$$

Здесь G — скорость распространения ударной волны, $\delta/\delta t$ — дельта-производная по времени [7]. Производя в (1.3) операцию разрывов и учитывая, что дельта-производная по времени от непрерывной функции непрерывна, получим

$$[v_i] = u_{i,j}{}^+ [v_j] + (v_1{}^- - G)\tau_i, \quad [u_{i,j}] = \tau_i\delta_{1j}, \quad [f] = f^+ - f^- \tag{1.4}$$

Знаки плюс и минус у величин означают, что они вычислены перед ударной волной и сразу за ней соответственно. В дальнейшем знаки плюс у компонент тензора градиента перемещений $u_{i,j}$ будем опускать, так как всюду будут присутствовать, если это специально не оговорено, только компоненты данного тензора, вычисленные перед поверхностью разрывов. Разрешая (1.4) относительно $[v_j]$, найдем

$$\begin{aligned} [v_1] &= \frac{v_1{}^- - G}{\theta}\{(p_2p_3 - u_{2,3}u_{3,2})\tau_1 + (u_{1,3}u_{3,2} + p_3u_{1,2})\tau_2 + \\ &+ (u_{1,2}u_{2,3} + p_2u_{1,3})\tau_3\} \\ [v_2] &= \frac{v_1{}^- - G}{\theta}\{(p_1p_3 - u_{1,3}u_{3,1})\tau_2 + (u_{2,3}u_{3,1} + p_3u_{2,1})\tau_1 + \\ &+ (u_{2,1}u_{1,3} + p_1u_{2,3})\tau_3\} \quad (2,3) \\ p_1 &= 1 - u_{1,1}, \quad p_2 = 1 - u_{2,2} \quad (2,3), \quad \theta = p_1p_2p_3 - \\ &- u_{1,2}u_{2,3}u_{3,1} - u_{2,1}u_{3,2}u_{1,3} - p_1u_{2,3}u_{3,2} - p_2u_{1,3}u_{3,1} - \\ &- p_3u_{1,2}u_{2,1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь и далее символ (2, 3) означает, что соответствующее невыписанное соотношение получается перестановкой индексов *2* и *3*.

Динамические условия совместности разрывов (условия сохранения импульса при переходе через ударную волну) в данном случае можно записать в виде

$$V[v_i]/(v_1{}^- - G) = [\sigma_{i1}], \quad V = \rho^-(v_1{}^- - G)^2 \tag{1.6}$$

Если считать в (1.6) величину $[v_i]$ вычисленной из (1.5), $[\sigma_{i1}]$ вычисленной, согласно (1.1) и (1.2), где $W = W(I_1, I_2, I_3)$ — известная функция, то при заданном деформированном состоянии перед поверхностью разрывов соотношения (1.6) — система трех уравнений относительно четырех неизвестных V, τ_i. Параметр V, введенный в (1.6), характеризует скорость распространения ударной волны. Система (1.6) может быть исследована, если положить один из разрывов τ_i известным.

Ограничимся в (1.6) лишь членами второго порядка включительно по компонентам тензора градиента перемещений. Для этого в разложении функции $W = W(I_1, I_2, I_3)$ в ряд Маклорена достаточно оставить только следующие члены:

$$W = {}^1/_2\lambda I_1{}^2 + \mu I_2 + lI_1I_2 + mI_1{}^3 + nI_3 \tag{1.7}$$

Упругий потенциал (1.7) иногда называют потенциалом Мурнагана, λ, μ — параметры Ламе, l, m, n называют обычно упругими модулями третьего порядка или коэффициентами Мурнагана. Подставляя (1.7) в (1.2) и ограничиваясь членами второго порядка малости по $u_{i,j}$, найдем

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + (3m - \lambda)u_{k,k}{}^2\delta_{ij} + l v_{si}v_{ts}\delta_{ij} + \\ + 2(l - \lambda - \mu)\, u_{k,k}v_{ij} + (3n - 4\mu)v_{ik}v_{kj}, \quad v_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.8}$$

Если записать (1.8) в разрывах и подставить результат вместе с (1.5) в (1.6), получим следующую систему трех уравнений относительно четырех неизвестных V, τ_i:

$$(V - T_1)\tau_1 + (b_1V - k_1)\tau_2 + (c_1V - s_1)\tau_3 + \alpha\tau_1^2 + \\ + \varkappa(\tau_2^2 + \tau_3^2) = 0 \tag{1.9}$$

$$(V - T_2)\tau_2 + (b_2V - k_2)\tau_1 + (c_2V - s_2)\tau_3 + \gamma\tau_1\tau_2 = 0 \qquad (2, 3)$$

Здесь

$$T_1 = p_1(\lambda + 2\mu) + \beta(u_{2,2} + u_{3,3}) + 2\alpha u_{1,1}, \quad T_2 = p_2\mu + \\ + \gamma(u_{1,1} + u_{2,2}) + (l - \lambda - \mu)\, u_{3,3} \quad (2,3), \quad \alpha = 3l + 3m + \\ + 3n - {}^7/_2\lambda - 7\mu, \quad \beta = 2l + 6m - 4\lambda - 2\mu, \quad \gamma = l + {}^3/_2 n - \\ - \lambda - 2\mu, \quad k_1 = (\gamma - 2\mu)\, u_{2,1} + (\gamma + \lambda)\, u_{1,2}$$

$$k_2 = (\gamma - \mu)\, u_{1,2} + \gamma u_{2,1} \quad (2,3), \quad s_1 = (\gamma - 2\mu)\, u_{3,1} + (\gamma + \\ + \lambda)\, u_{1,3}$$

$$s_2 = ({}^3/_4 n - \mu)u_{2,3} + ({}^3/_4 n - 2\mu)\, u_{3,2} \quad (2,3), \quad b_1 = u_{1,2}, \ b_2 = \\ = u_{2,1} \quad (2,3), \quad c_1 = u_{1,3}, \quad c_2 = u_{2,3} \quad (2,3), \quad \varkappa = {}^1/_2(\gamma - 2\mu)$$

Изучим возможность существования в упругой среде продольных и поперечных ударных волн.

Положив в исходной системе уравнений (1.9) $\tau_2 = \tau_3 = 0$, получим

$$V = T_1 - \alpha\tau_1, \quad b_2(T_1 - \alpha\tau_1) = k_2 \qquad (2,3) \tag{1.10}$$

В упругой среде возможна продольная ударная волна, скорость которой вычисляется первым равенством (1.10), если деформированное состояние перед ударной волной удовлетворяет последним условиям (1.10). Заметим, что эти условия тождественно удовлетворяются, если перед поверхностью разрывов деформированное состояние таково, что

$$u_{1,2} = u_{2,1} = 0 \quad (2,3) \tag{1.11}$$

Равенства (1.11) можно рассматривать как достаточные условия существования в среде продольных ударных волн.

Поперечные ударные волны $\tau_1 = 0$ распространяются в упругой среде, если выполнены соотношения

$$(b_1V - k_1)\,\tau_2 + (c_1V - s_1)\,\tau_3 + \varkappa(\tau_2^2 + \tau_3^2) = 0 \tag{1.12}$$

$$(V - T_2)\tau_2 + (c_2V - s_2)\,\tau_3 = 0 \qquad (2,3)$$

Скорость поперечных ударных волн должна быть вычислена приравниванием нулю определителя однородной системы последних уравнений (1.12). Первое равенство (1.12) выражает условие существования поперечных ударных волн. Необходимо отметить, что поперечные ударные волны невозможны в среде, деформированной таким образом, что выполняются равенства (1.11). Пусть (1.11) не выполнены, но $u_{2,3} = u_{3,2} = 0$, тогда из последних уравнений (1.12) получаем

$$V_2 = T_2 \quad (2,3) \tag{1.13}$$

Рассматриваемый случай качественно не отличается от линейного. Возможны поперечные ударные волны, на которых $\tau_2 \neq 0$, а $\tau_1 = \tau_3 = 0$ или, наоборот, $\tau_3 \neq 0$, $\tau_2 = \tau_1 = 0$. Нелинейность сказывается лишь количественно в значениях для скоростей распространения этих ударных волн. Если же $u_{2,3} \neq 0$ или $u_{3,2} \neq 0$, то становится возможной поперечная ударная волна, на которой τ_2 и τ_3 не равны нулю одновременно. Скорость последней волны определяется соотношением

$$V_{1,2} = \frac{Q \pm \{Q^2 - 4(1 - c_2c_3)(T_2T_3 - s_2s_3)\}^{1/2}}{2(1 - c_2c_3)}, \quad Q = T_2 + T_3 + c_2s_3 + c_3s_2 \tag{1.14}$$

При уменьшении влияния нелинейностей скорость продольной ударной волны стремится к значению $G = \{(\lambda + 2\mu)/\rho_0\}^{1/2}$ для скорости продольной ударной волны в линейной теории. Скорости всех возможных поперечных ударных волн, вычисленные в соответствии с равенствами (1.13) и (1.14), при уменьшении влияния нелинейностей стремятся к значению $G = \{\mu / \rho_0\}^{1/2}$ для скорости поперечной ударной волны в линейном случае.

Равенства (1.11) — достаточные условия существования продольных ударных волн. С другой стороны, если выполнены соотношения (1.11), то в упругой среде невозможны поперечные ударные волны. Отметим, что данный результат переносится и на случай произвольной зависимости упругого потенциала от инвариантов тензора деформаций.

Вычисляя компоненты тензора напряжений из (1.2), заметим, что зависимость σ_{11} от $u_{i,j}$ $(i \neq j)$ является четной, т. е. σ_{11} не зависит от знака $u_{i,j}$ $(i \neq j)$. Следовательно в выражении для $[\sigma_{11}]$ в (1.6) коэффициенты при τ_2^{2n-1} и τ_3^{2n-1} будут содержать множители $u_{j,1}$ или $u_{1,j}$ $(j \neq 1)$. Однако возможно присутствие членов с τ_2^{2n} и τ_3^{2n}, коэффициенты при которых могут не зависеть от деформированного состояния перед поверхностью разрывов. Следовательно, первое равенство из (1.6) не обратится в тождество на поперечной волне. Таким образом, поперечные ударные волны не существуют в упругой среде, если только выполнены соотношения (1.11) перед поверхностью разрывов. Последнее существенно обобщает известный результат [5], заключающийся в том, что поперечные ударные волны невозможны в недеформированной упругой среде. Аналогично предыдущему можно показать, что (1.11) — достаточные условия существования продольных ударных волн в изотропном упругом пространстве в случае произвольной зависимости упругого потенциала от инвариантов тензора деформаций Альманси.

2. Будем считать в дальнейшем τ_1 известным и отличным от нуля. Тогда, вычисляя из последних уравнений (1.9) τ_2 и τ_3 и подставляя полученные значения в первое равенство (1.9), получим следующее уравнение пятой степени относительно V:

(2.1) $$(V - T_1 + \alpha\tau_1) R_1^2 (V) + \varkappa\tau_1 \{R_2^2 (V) + R_3^2 (V)\} - (b_1 V - k_1) R_1 (V) R_3 (V) - (c_1 V - s_1) R_1 (V) R_2 (V) = 0$$

$$R_1 (V) = (V - T_2 + \gamma\tau_1)(V - T_3 + \gamma\tau_1) - (c_2 V - s_2)(c_3 V - s_3)$$

$$R_2 (V) = (b_3 V - k_3)(V - T_2 + \gamma\tau_1) + (c_3 V - s_3)(b_2 V - k_2) \quad (2,3)$$

Решение уравнения (2.1) будем искать приближенно, считая $u_{1,j}$ и $u_{j,1}$ $(j \neq 1)$ малыми величинами. Пренебрегая в (2.1) квадратами этих величин, получаем

(2.2) $$(V - T_1 + \alpha\tau_1) R_1^2 (V) = 0$$

Из (2.2) следует

(2.3) $$V_1^\circ = T_1 - \alpha\tau_1$$

Подстановка (2.3) в (1.9) приводит в том же приближении к равенствам $\tau_2 = \tau_3 = 0$. Следовательно, нулевое приближение для первого корня уравнения (2.1) отвечает изученной ранее продольной ударной волне, распространяющейся в среде в случае, если она деформирована таким образом, что выполнены условия (1.11.)

Пусть перед поверхностью разрывов $u_{i,j} = 0$ $(i \neq j)$, тогда из (2.2) получаем

(2.4) $$V_2^\circ = T_2 - \gamma\tau_1 \quad (2,3)$$

Если же соотношения (1.11) выполнены, но $u_{2,3}$, $u_{3,2}$ или обе эти составляющие тензора градиента перемещений отличны от нуля, то из (2.2) получаем

(2.5) $$V_{2,3}^\circ = [2(1 - c_2 c_3)]^{-1} \{F \pm [F^2 - 4(1 - c_2 c_3)(T_2 T_3 - \gamma T_2 \tau_1 - \gamma T_3 \tau_1 + \gamma^2 \tau_1^2 - s_2 s_3)]^{1/2}\}$$

$$F = T_2 + T_3 - 2\gamma\tau_1 + c_2 s_3 + c_3 s_2$$

Таким образом, в случае, когда деформированное состояние перед поверхностью разрывов таково, что $u_{i,j} = 0$ $(i \neq j)$, в упругой среде возможны ударные волны, на которых либо $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$, а $\tau_3 = 0$, либо $\tau_1 \neq 0$, $\tau_3 \neq 0$, а $\tau_2 = 0$. В случае, когда условия (1.11) выполнены, а хотя бы одна из компонент $u_{2,3}$ и $u_{3,2}$ тензора градиента перемещений отлична от нуля, в упругой среде возможна ударная волна, скорость которой определяется равенством (2.5). На этой ударной волне отличны от нуля все компоненты волнового вектора $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$, $\tau_3 \neq 0$. При уменьшении влияния нелинейностей скорости последних ударных волн, определяемые равенствами (2.4) и (2.5), стремятся к значению $\{\mu / \rho_0\}^{1/2}$ для скорости поперечной ударной волны в линейной теории, поэтому в дальнейшем эти ударные волны будем называть квазипоперечными.

При подстановке соотношений (2.4) и (2.5) в систему уравнений (1.9) получаем, что квазипоперечные ударные волны изучаемого вида возможны в среде лишь в случае, если выполнены соотношения

(2.6) $$\tau_2^2 = (V_1^\circ - V_2^\circ)\tau_1 / \varkappa, \quad \tau_2^2 + \tau_3^2 = (V_1^\circ - V_2^\circ)\tau_1 / \varkappa \quad (2,3)$$

Из (2.6) следует, что необходимым условием существования квазипоперечных ударных волн в упругой среде, деформированное состояние которой удовлетворяет равенствам (1.11), будет требование

$$(V_1^\circ - V_2^\circ)\, \tau_1 / \varkappa \geqslant 0 \quad (2,3) \tag{2.7}$$

Пусть l, m, n отрицательны. Это справедливо для материалов, близких к несжимаемым (каучукоподобным), так как $I_1 \leqslant 0$ для несжимаемых материалов, а следовательно, $l < 0$, $m < 0$, $n < 0$. (Эксперименты [8] показывают, что l, m, n отрицательны и для металлов.) В этом случае требование (2.7) принимает простую форму

$$\tau_1 < 0 \tag{2.8}$$

Отметим, что условие (2.8) вытекает и для положительных l, m, n, если их порядок меньше порядка λ и μ. Неравенство (2.8) служит условием существования квазипоперечных ударных волн в случае равенства нулю упругих модулей третьего порядка. В терминах плоских ударных волн (2.8) означает, что квазипоперечные ударные волны будут в то же время и волнами расширения. Порядок τ_1 на квазипоперечной волне является вторым порядком малости по сравнению с τ_2 или с τ_3.

Перейдем к отысканию последующих приближений для корней уравнения (2.1). Заметим, что первое приближение $V_1^{(1)}$ для первого корня равно нулю, так как V_1 зависит лишь от четных степеней $u_{i,j}$ $(i \neq j)$. Полагая $V_1 = V_1^\circ + V_1^{(2)}$, где $V_1^{(2)}$ — линейная комбинация $u_{i,j}^2$ $(i \neq j)$, и подставляя в (2.1), найдем

$$\begin{aligned} &V_1 = V_1^\circ + \varkappa\tau_1\xi^{-2}(\xi_2^2 + \xi_3^2) + \xi^{-1}(a_1\xi_2 + f_1\xi_3) \\ &a_i = b_iV_1^\circ - k_i, \quad f_i = c_1V_1^\circ - s_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3 \\ &\xi = (V_1^\circ - V_2^\circ)(V_1^\circ - V_3^\circ) + f_2f_3, \quad \xi_2 = a_3(V_1^\circ - V_2^\circ) + \\ &+ a_2f_3 \quad (2,3) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ударную волну, скорость которой определяется равенством (2.9), назовем квазипродольной, так как при уменьшении влияния нелинейностей скорость ее стремится к значению скорости продольной ударной волны в линейной теории упругости.

Полагая $V_2 = V_2^\circ + V_2^{(1)}$ (2,3) и подставляя в (2.1), получим

$$V_2 = V_2^\circ + \left\{\frac{\varkappa\tau_1}{V_1^\circ - V_2^\circ}\right\}^{1/2} \left\{\left(\frac{a_3f_3}{V_2^\circ - V_3^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\xi_3}{V_2^\circ - V_3^\circ}\right)^2\right\}^{1/2} \quad (2,3) \tag{2.10}$$

Заметим, что неравенство (2.7), а следовательно, и (2.8) как условия существования квазипоперечных ударных волн носят более широкий смысл, нежели это было отмечено. Из (2.10) следует, что (2.7) — условие существования квазипоперечных ударных волн, когда условия (1.11) не выполнены, т. е. при произвольном деформированном состоянии перед поверхностью разрывов.

3. Ударная волна в адиабатической упругой среде является необратимым процессом. Из второго закона термодинамики при переходе через поверхность разрывов вытекает термодинамическое условие совместности разрывов, которое запишем в виде [9]

$$\begin{aligned} &\frac{A}{2}[v_jv_j] + C_j[v_j] - \frac{A}{\rho_0}[W] \geqslant 0 \\ &A = \rho^+(v_1^+ - G), \quad C_j = \sigma_{i1}^+ - Av_i^+ \end{aligned} \tag{3.1}$$

Напомним, что следствием второго закона термодинамики для ударной волны в совершенном газе служит известная теорема Цемплена о том, что возможны только ударные волны сжатия. В рассматриваемом случае удобно использовать условие (3.1), переписанное в следующей форме:

$$-\frac{V[v_j][v_j]}{2(v_1^- - G)} + \sigma_{j1}^+[v_j] - \frac{A}{\rho_0}[W] \geqslant 0 \tag{3.2}$$

Подстановка в (3.2) соотношений (1.2), (1.5), (1.7), записанных в разрывах, и (1.8), вычисленного перед ударной волной, приводит для квазипродольной ударной волны, когда V определяется формулой (2.9), к неравенству

$$(l + m + n - {}^3/_2\lambda - 3\mu)\,\tau_1^3 \leqslant 0 \tag{3.3}$$

При получении (3.3) удерживались члены не выше кубических по компонентам тензора градиента перемещений. Неравенство (3.3) — аналог теоремы Цемплена для квазипродольных ударных волн в упругой среде. При этом полагается, что более высокими порядками компонент $u_{i,j}$, нежели третий, можно пренебречь. Для отрицательных l, m, n, что, как отмечалось, обычно соответствует конкретным материалам, получаем из (3.3)

$$\tau_1 \leqslant 0$$

т. е. в таких средах возможны только квазипродольные ударные волны сжатия.

В случае квазипоперечных ударных волн неравенство (3.2) с точностью до кубов $u_{i,j}$ обращается в тождество, т. е. диссипация энергии на квазипоперечных ударных волнах имеет порядок выше третьего. В этом случае в соотношении (1.7) должны быть учтены члены с $u_{i,j}^4$. Однако если в конкретной задаче выбран потенциал в форме (1.7), то следует считать, что квазипоперечных ударных волн малой интенсивности в среде не существует. Последнее вытекает из (3.2) после подстановки в него соотношений (2.10), (1.5), (1.2) и (1.8), (1.7), записанных в разрывах.

Поступила 28 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boa-Teh Chy.* Transverse chock waves in incompressible elastic solids. J. Mech. and Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 1.
2. *Чернышов А. Д.* О распространении ударных волн в упругом пространстве при конечных деформациях. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. *Филатов Г. Ф.* О распространении поперечных и продольных ударных волн в упругой среде. ПМТФ, 1972, № 3.
4. *Буренин А. А., Нгуен Хыу Тхань, Чернышов А. Д.* О распространении ударных волн в упругой среде при плоской конечной деформации. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
5. *Bland D. R.* Non-linear dynamic elasticity. Waltham, Massachusetts — Toronto — London, Blaisdell Publishing Co., 1969. (Рус. перев.: М., «Мир», 1972.)
6. *Филатов Г. Ф.* О распространении ударных волн в нелинейной теории упругости. Сб. научн. тр. Воронежск. ун-та, 1971, вып. 2.
7. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
8. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
9. *Чернышов А. Д.* Об условиях распространения ударных волн в средах с упругими и пластическими свойствами. В сб.: Проблемные вопросы механики горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1972.