Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОРОДНО-ПРОСТОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Г. Л. Бровко

(Москва)

Практика расчетов показывает, что использование теории малых упругопластических деформаций дает вполне удовлетворительные результаты для материалов и нагрузок более широкого класса, чем предусмотрено условиями теоремы о простом нагружении [1]. Получены необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации для широкого класса сжимаемых упругопластических тел с зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций, ограниченной только условиями эллиптичности краевой задачи о равновесии. При этом вид внешних нагрузок при простой деформации может существенно отличаться от пропорционального их изменения и, вообще говоря, зависит от механических характеристик материала. Эти результаты дают основание для применения теории малых упругопластических деформаций к более широкому классу материалов и нагрузок.

1. Квазитермические поля. Лемма о линейной суперпозиции. Рассмотрим сплошную среду, механические свойства которой в изотермических условиях определяются соотношением между девиаторами напряжений и деформаций

$$s_{ij} = \Phi_{ij}(э_{kl}) \tag{1.1}$$

вид которого не зависит от величины гидростатического напряжения, и соотношением для шаровых тензоров

$$\sigma = 3K\varepsilon \tag{1.2}$$

Здесь K — объемный модуль упругости, а функционал Φ_{ij} таков, что все $s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда все $э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij} = 0$.

Такими механическими свойствами обладает достаточно широкий класс твердых тел.

Пусть указанная среда заполняет собой односвязную область Ω трехмерного пространства, ограниченную поверхностью S. Рассмотрим смешанную краевую задачу квазистатики, когда для тела Ω на отрезке времени $t \in [0, T]$ задан процесс нагружения объемными силами $F_i(\mathbf{x}, t)$, определенными в области $Q = \Omega \times [0, T]$, поверхностными силами $T_{\nu i}(\mathbf{x}, t)$, определенными на части $\Sigma_\sigma = S_\sigma \times [0, T]$ боковой границы $\Sigma = S \times [0, T]$ области Q, и перемещениями $\psi_i(\mathbf{x}, t)$ на части $\Sigma_u = S_u \times [0, T]$ границы Σ ($S_u + S_\sigma = S$, $\Sigma_u + \Sigma_\sigma = \Sigma$). Задача состоит в отыскании функций перемещений $u_i(\mathbf{x}, t)$, деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ и напряжений σ_{ij} (x, t), удовлетворяющих соотношениям (1.1), (1.2) в области $Q' = Q + \Sigma$, уравнениям равновесия (здесь и ниже суммирование ведется по повторяющимся латинским индексам и не ведется по греческим)

$$\sigma_{ij,\,j} + F_i = 0 \quad \text{в } Q \tag{1.3}$$

соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij} = {}^1\!/_2\,(u_{i,\,j} + u_{j,\,i}) \quad \text{в } Q' \tag{1.4}$$

а также граничным условиям

$$\sigma_{ij} l_j = T_{\nu i} \quad \text{на } \Sigma_\sigma \tag{1.5}$$

$$u_i = \psi_i \quad \text{на } \Sigma_u \tag{1.6}$$

где $l_i = l_i$ (x) — направляющие косинусы внешней нормали к S.

Предположим, что задача (1.1) — (1.6) разрешима единственным образом.

Найдем класс процессов нагружения, при которых во всех точках тела в любой момент процесса тензоры деформаций и напряжений являются шаровыми.

Лемма 1.1. Для того чтобы решение краевой задачи (1.1) — (1.6) представляло собой произвольный процесс чисто объемного деформирования тела, необходимо и достаточно, чтобы внешние нагрузки имели вид

$$\begin{aligned} &F_i^* = F_i^*(t) \quad \text{в } Q' \\ &T_{\nu i}^*(\mathrm{x}, t) = -[F_j^*(t)\, x_j + D(t)]\, l_i \quad \text{на } \Sigma_\sigma \\ &\psi_i^*(\mathrm{x}, t) = (3K)^{-1}\{{}^1\!/_2\, F_i^*(t)\,(x_j x_j) - x_i\,[F_i(t)\, x_j + \\ &+ D(t)]\} + a_i \quad \text{на } \Sigma_u \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $F_i^*(t)$, $D(t)$ — произвольные функции на $[0, T]$, $a_i = a_i(\mathrm{x}, t)$ — произвольный вектор перемещения тела как жесткого целого.

Докажем необходимость этих условий. Пусть $\varepsilon_{ij}(\mathrm{x}, t) = \varepsilon(\mathrm{x}, t)\,\delta_{ij}$. Тогда из уравнений совместности деформаций

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\alpha\alpha,\,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\,\alpha\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha\beta,\,\alpha\beta} \\ &\varepsilon_{\alpha\alpha,\,\beta\gamma} = (-\varepsilon_{\beta\gamma,\,\alpha} + \varepsilon_{\gamma\alpha,\,\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta,\,\gamma})_{,\alpha} \\ &(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha) \end{aligned} \tag{1.8}$$

следует $\varepsilon_{,\alpha\beta} = 0$ (α, $\beta = 1, 2, 3$), т. е.

$$\varepsilon_{ij}(\mathrm{x}, t) = [C_k(t)\, x_k + C_0(t)]\,\delta_{ij} \quad \text{в } Q' \tag{1.9}$$

где $C_k(t)$ и $C_0(t)$ — произвольные функции на $[0, T]$.

Из свойств функционала (1.1) следует, что тензор напряжений также является шаровым $\sigma_{ij}(\mathrm{x}, t) = \sigma(\mathrm{x}, t)\delta_{ij}$, причем, согласно (1.2), (1.9), $\sigma(\mathrm{x}, t) = 3K\,[C_k(t) x_k + C_0(t)]$, т. е.

$$\sigma_{ij}(\mathrm{x}, t) = 3K\,[C_k(t) x_k + C_0(t)]\delta_{ij} \quad \text{в } Q' \tag{1.10}$$

Общее решение уравнений Коши (1.4) в этом случае имеет вид

$$u_i(\mathrm{x}, t) = -{}^1\!/_2 C_i(t)\,(x_j x_j) + x_i\,[C_j(t) x_j + C_0(t)] + b_i \quad \text{в } Q' \tag{1.11}$$

Здесь $b_i = b_i$ (x, t) — произвольный вектор перемещения тела как жесткого целого.

Для того чтобы функции (1.9) — (1.11) удовлетворяли уравнениям равновесия (1.3) и граничным условиям (1.5), (1.6), необходимо

$$
\begin{aligned}
(1.12)\qquad & F_i = -3KC_i\,(t) \quad \text{в } Q' \\
& T_{\nu i} = 3K\,[C_j\,(t)x_j + C_0\,(t)]l_i \quad \text{на } \Sigma_\sigma \\
& \psi_i = -{}^1/_2C_i\,(t)\,(x_jx_j) + x_i\,[C_j\,(t)x_j + C_0\,(t)] + b_i \quad \text{на } \Sigma_u
\end{aligned}
$$

откуда, полагая $F_i^*\,(t) = -3KC_i\,(t)$, $D\,(t) = -3KC_0\,(t)$ и $a_i\,(\mathrm{x}, t) = b_i\,(\mathrm{x}, t)$, устанавливаем необходимость условий (1.7).

Для доказательства достаточности условий следует лишь отметить, что функции

$$
\begin{aligned}
(1.13)\qquad & u_i^*\,(\mathrm{x}, t) = (3K)^{-1}\,\{{}^1/_2F_i^*(t)\,(x_jx_j) - x_i\,[F_j^*\,(t)x_j + D(t)]\} + a_i \\
& \varepsilon_{ij}^*\,(\mathrm{x}, t) = -(3K)^{-1}\,[F_k^*\,(t)x_k + D\,(t)]\delta_{ij} \\
& \sigma_{ij}^*\,(\mathrm{x}, t) = -[F_k^*\,(t)x_k + D\,(t)]\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

в Q' представляют собой решение задачи (1.1) — (1.6) при нагрузках (1.7), которое по предположению единственно.

Таким образом, описываемый процесс чисто объемного неоднородного деформирования тела из материала со свойствами (1.1), (1.2) характеризуется четырьмя независимыми скалярными функциями $C_i\,(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) и соответствует произвольному изменению во времени однородного поля объемных сил $\mathbf{F}(t)$ при неоднородных нагрузках на поверхности, определенных согласно (1.12). Интегральные условия равновесия тела, выраженные в функциях (1.12), удовлетворяются тождественно и не накладывают ограничений (связей) на функции $C_i\,(t)$.

Лемма 1.1 допускает следующую интерпретацию: если однородное тело с механическими свойствами (1.1), (1.2) равновесно плавает в однородной тяжелой жидкости в однородном поле массовых сил, то оно испытывает лишь объемные деформации и напряжения.

Назовем применительно к задачам типа (1.1) — (1.6) поле внешних нагрузок F_i^*, $T_{\nu i}^*$, ψ_i^*, определяемое равенствами (1.7), квазитермическим, а соответствующее этому полю решение (1.13) — квазитермическим решением.

Лемма 1.2 о линейной суперпозиции. Пусть при заданных F_i, $T_{\nu i}$, ψ_i краевая задача (1.1) — (1.6) имеет решение u_i, ε_{ij}, σ_{ij}. Тогда при наложении произвольного квазитермического поля нагрузок (1.7) решение получается путем линейной суперпозиции соответствующего квазитермического решения (1.13), т. е. при нагрузках $F_i + F_i^*$, $T_{\nu i} + T_{\nu i}^*$, $\psi_i + \psi_i^*$ решение задачи (1.1) — (1.6) есть $u_i + u_i^*$, $\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^*$, $\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^*$.

Доказательство следует из леммы 1.1, линейности соотношений (1.2) — (1.6) и независимости нелинейных соотношений (1.1) от объемных деформаций и напряжений.

Видно, что множество квазитермических процессов $\{F_i^*, T_{\nu i}^*, \psi_i^*, u_i^*, \varepsilon_{ij}^*, \sigma_{ij}^*\}$ составляет линейное пространство, а все множество процессов $\{F_i, T_{\nu i}, \psi_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$, подчиняющихся соотношениям (1.1) — (1.6), факторизуется леммой 1.2 по подпространству квазитермических процессов. Под процессом здесь следует понимать вектор-функцию $\{F_i, T_{\nu i}, \psi_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$, определенную в $Q \times \Sigma_\sigma \times \Sigma_u \times Q' \times Q' \times Q'$ и составленную из компонент поля внешних нагрузок и соответствующего этому полю решения.

Заметим, наконец, что сумма любого тензора, удовлетворяющего уравнениям совместности деформаций (1.8), и произвольного квазитермического тензора деформаций (1.9) также удовлетворяет уравнениям (1.8).

2. Однородно-простая деформация. Кинематика и представление процесса. Процесс деформирования тела называется простым [1] (девиаторно простым), если поле направляющего тензора деформаций остается неизменным в течение всего процесса, т. е.

$$\text{(2.1)}\qquad \text{э}_{ij}(\mathrm{x}, t) = A\text{э}_{ij}{}^\circ(\mathrm{x}) \quad \text{в } Q'$$

Здесь $\text{э}_{ij}{}^\circ(\mathrm{x})$ — некоторый заданный в Ω' девиатор, $A = A(\mathrm{x}, t)$ — некоторая функция координат и времени. Соотношение (2.1) может быть записано в виде

$$\text{(2.2)}\qquad p_{ij} = p_{ij}(\mathrm{x}), \quad \text{э}_u(\mathrm{x}, t) = A\text{э}_u{}^\circ(\mathrm{x})$$

Здесь p_{ij} — неизменный во времени направляющий тензор деформаций, $\text{э}_u = ({}^2/{}_3\text{э}_{ij}\text{э}_{ij})^{1/2}$ — интенсивность деформаций процесса, $\text{э}_u{}^\circ$ — интенсивность девиатора $\text{э}_{ij}{}^\circ$.

Процесс деформирования тела назовем однородно-простым, если $A \equiv A(t)$. Ниже рассматриваются только такие процессы простой деформации.

В качестве порождающего девиатора $\text{э}_{ij}{}^\circ(x)$ процесса простой деформации в (2.1) может быть взято значение девиатора процесса в любой фиксированный момент времени, не равное тождественно нулю, или любое пропорциональное этому значение. К этому сводится и всякий другой способ выбора порождающего девиатора. В частности, для произвольного процесса однородно-простой деформации справедливо предложение: для любого линейного оператора L по времени, не зависящего от x, и любых t_0 и t_1 из $[0, T]$ ($A(t_1) \neq 0$) найдется такое число $C = C(L, t_0, t_1)$, что

$$\text{(2.3)}\qquad L[\text{э}_{ij}(\mathrm{x}, t)]_{t=t_0} = C\text{э}_{ij}(\mathrm{x}, t_1)$$

Под временем здесь и далее следует понимать любой параметр различения последовательности событий, т. е. любую возрастающую скалярную функцию физического времени $\lambda(t)$.

Действительно, из (2.1) получаем

$$\begin{aligned} L[\text{э}_{ij}(\mathrm{x}, t)]_{t=t_0} &= L[A(t)\text{э}_{ij}{}^\circ(\mathrm{x})]_{t=t_0} = L[A(t)]_{t=t_0} \times \\ &\times \text{э}_{ij}{}^\circ(\mathrm{x}) = L[A(t)]_{t=t_0}A^{-1}(t_1)\text{э}_{ij}(\mathrm{x}, t_1) = \\ &= C\text{э}_{ij}(\mathrm{x}, t_1), \quad C = L[A(t)]_{t=t_0}A^{-1}(t_1) \end{aligned}$$

Таким образом, если в соотношении (2.3) $C \neq 0$, то в качестве порождающего девиатора процесса (2.1) может быть взят

$$\text{(2.4)}\qquad \text{э}_{ij}{}^\circ(\mathrm{x}) = L[\text{э}_{ij}(\mathrm{x}, t)]_{t=t_0}$$

Легко видеть, что для каждого отдельного процесса (2.1) с изменением выбора $э_{ij}^{\circ}$ (x) функция A (t) изменяется пропорционально самой себе.

Рассмотрим кинематику процессов однородно-простой деформации сжимаемых сред, заполняющих произвольную односвязную область трехмерного пространства. С учетом (2.1) представим тензор деформаций $\varepsilon_{ij} \equiv$ $\equiv э_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}$ в виде

$$\varepsilon_{ij}(\mathrm{x}, t) = A(t)\varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathrm{x}) + \varepsilon^*(x, t)\delta_{ij} \tag{2.5}$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathrm{x}) \equiv э_{ij}^{\circ}(\mathrm{x}) + \varepsilon^{\circ}(\mathrm{x})\delta_{ij}$ — тензор, девиаторная часть которого совпадает с порождающим девиатором $э_{ij}^{\circ}$ (x) процесса, т. е. ε_{ij}° определяется соответственно (2.4) с точностью до произвольного шарового тензора соотношением

$$\varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathrm{x}) = L\,[\varepsilon_{ij}(\mathrm{x}, t)]_{t=t_0} \tag{2.6}$$

Величина $\varepsilon^*(\mathrm{x}, t) \equiv \varepsilon(\mathrm{x}, t) - A(t)\varepsilon^{\circ}(\mathrm{x})$ описывает отклонение средней деформации процесса ε от пропорционально изменяющейся $A\varepsilon^{\circ}$.

В дальнейшем будем предполагать, что в течение всего процесса тензор деформаций ε_{ij} (x, t) удовлетворяет уравнениям совместности (1.8). Тогда в силу линейности оператора L в (2.6) и линейности уравнений (1.8) тензор ε_{ij}° (x) также удовлетворяет (1.8). С учетом этого из (2.5) и (1.8) получаем $\varepsilon^*_{,\alpha\beta} = 0$ в Q' (α, $\beta = 1, 2, 3$), откуда аналогично (1.9) заключаем, что тензор ε^* (x, t)δ_{ij} определяет процесс чисто объемного (квазитермического) деформирования тела и вместе с соответствующим этому процессу вектором перемещений u_i^* (x, t) выражается формулами (1.9), (1.11) соответственно. В случае, если совместный тензор ε_{ij}° (x) выбран соответственно (2.4) в общем виде, т. е. в виде суммы (2.6) и произвольного совместного шарового тензора вида (1.9), приходим к такому же результату.

Следовательно, при однородно-простой деформации шаровой тензор деформаций изменяется пропорционально девиатору (функции A (t)) с точностью до квазитермического тензора деформаций

$$\varepsilon(\mathrm{x}, t)\delta_{ij} = A(t)\varepsilon^{\circ}(\mathrm{x})\delta_{ij} + \varepsilon^*(\mathrm{x}, t)\delta_{ij}$$

Соответствующее (2.5) выражение для вектора перемещений процесса однородно-простой деформации имеет вид

$$u_i(\mathrm{x}, t) = A(t)u_i^{\circ}(\mathrm{x}) + u_i^*(\mathrm{x}, t) \tag{2.7}$$

Здесь вектор u_i° (x) представляет собой решение уравнений Коши $\varepsilon_{ij}^{\circ} = {}^1/_2\,(u_{i,j}^{\circ} + u_{j,i}^{\circ})$ и в случае (2.6) определяется с точностью до произвольного перемещения тела как жесткого целого соотношением

$$u_i^{\circ}(\mathrm{x}) = L\,[u_i(\mathrm{x}, t)]_{t=t_0} \tag{2.8}$$

Все произвольные жесткие перемещения тела, возникающие при разрешении уравнений Коши, включены в выражение для u_i^* (x, t). Очевидно, что первые слагаемые в правых частях (2.5), (2.7) определяют процесс тензорно-простого деформирования.

Лемма 2.1. Кинематически процесс однородно-простой (девиаторно простой) деформации односвязных сжимаемых тел представляет собой линейную суперпозицию двух независимых процессов: 1) процесса тензорно-простого деформирования, 2) процесса чисто объемного (квазитермического) деформирования тела.

В соответствии с этим множество кинематических представлений (2.5), (2.7) всех процессов девиаторно-простой деформации факторизуется по линейному подпространству кинематических представлений (1.9), (1.11) произвольных процессов квазитермического деформирования.

Применительно к задачам типа (1.1) — (1.6) этот результат можно на основании леммы 1.2 распространить на напряженное состояние тела, а также на процесс нагружения при девиаторно-простой деформации.

Следствие 2.1. Всякий процесс девиаторно-простой деформации может быть представлен в виде суммы

$$\{F_i,\ T_{\nu i},\ \psi_i,\ u_i,\ \varepsilon_{ij},\ \sigma_{ij}\} = \{F_i^t + F_i^*,\ T_{\nu i}^t + T_{\nu i}^*,\ \psi_i^t + \psi_i^*,\ u_i^t + u_i^*,\ \varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ij}^*,\ \sigma_{ij}^t + \sigma_{ij}^*\}$$

Здесь индексом ^{t} обозначены функции, описывающие процесс тензорно-простой деформации, а индексом * — квазитермический процесс. Таким образом, при факторизации множества процессов типа (1.1) — (1.6) по подпространству квазитермических процессов процессы девиаторно-простой и тензорно-простой деформации, имеющие одинаковые девиаторы деформаций, попадают в один класс эквивалентности. Поэтому вопрос об условиях однородно-простой деформации сводится к определению условий тензорно-простой деформации, описываемой соотношениями

$$\varepsilon_{ij}(\mathrm{x}, t) = A(t)\varepsilon_{ij}^\circ(\mathrm{x}), \quad u_i(\mathrm{x}, t) = A(t)u_i^\circ(\mathrm{x}) \tag{2.9}$$

полученными из (2.5), (2.7) отбрасыванием квазитермических членов.

3. Начально- и инфинитезимально-упругие материалы. Теорема об однородно-простой деформации. Перейдем к исследованию условий однородно-простой деформации в твердых телах. Ограничиваясь подклассом тензорно-линейных теорий пластичности, описываемых соотношениями (1.1), (1.2), и учитывая совпадение тензорно-линейных теорий с теорией малых упругопластических деформаций в случае, если деформация является простой [1], будем искать формулировку этих условий в терминах теории малых упругопластических деформаций.

Краевая задача квазистатики теории малых упругопластических деформаций при активном деформировании описывается аналогично задаче (1.1) — (1.6) соотношениями [1, 2]

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,i} + F_i = 0 \quad \text{в } Q \\
&s_{ij} = (2\sigma_u/3\text{э}_u)\text{э}_{ij}, \quad \sigma_u = 3G\text{э}_u\,[1 - \omega(\text{э}_u)], \\
&\sigma = 3K\varepsilon, \quad \varepsilon_{ij} = {}^1/_2(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{в } Q' \\
&\sigma_{ij}l_j = T_{\nu i} \quad \text{на } \Sigma\sigma \\
&u_i = \psi_i \quad \text{на } \Sigma_u
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь обозначения имеют тот же смысл, что и в задаче (1.1) — (1.6); G — начальный модуль сдвига материала, предполагающийся положительным, т. е.

$$3G = \lim_{\vartheta_u \to 0} \frac{\sigma_u}{\vartheta_u} > 0 \tag{3.2}$$

Функция $\omega(\vartheta_u)$ характеризует сдвиговые пластические свойства материала [1]. Для большинства известных материалов функция $\omega(\vartheta_u)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \omega(\vartheta_u) \leqslant \omega(\vartheta_u) + \vartheta_u \omega'(\vartheta_u) \leqslant \lambda < 1 \tag{3.3}$$

обеспечивающим существование и единственность решения задачи (3.1) [3, 4]. Кроме того, из (3.2) получаем $\lim\limits_{\vartheta_u \to 0} \omega(\vartheta_u) = 0$ и, доопределяя $\omega(\vartheta_u)$ в нуле по непрерывности, имеем

$$\omega(0) = 0 \tag{3.4}$$

В случае, если у материала есть конечный участок $0 \leqslant \vartheta_u \leqslant \vartheta_s$ линейно-упругой зависимости $\sigma_u = 3G\vartheta_u$, имеем

$$\omega(\vartheta_u) \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leqslant \vartheta_u \leqslant \vartheta_s \tag{3.5}$$

Такие материалы будем называть начально-упругими.

В противном случае из требования непрерывности в нуле первой производной

$$\lim_{\vartheta_u \to 0} \frac{d\sigma_u}{d\vartheta_u} \equiv \lim_{\vartheta_u \to 0} 3G[1 - \omega - \vartheta_u \omega'] = \left.\frac{d\sigma_u}{d\vartheta_u}\right|_{\vartheta_u = 0} \equiv \lim_{\vartheta_u \to 0} \frac{\sigma_u}{\vartheta_u} = 3G$$

получаем с учетом (3.4) асимптотическую характеристику

$$\lim_{\vartheta_u \to 0} \vartheta_u \omega'(\vartheta_u) = 0 \tag{3.6}$$

Из асимптотической характеристики второй производной функции $\sigma_u(\vartheta_u)$ в окрестности нуля

$$\lim_{\vartheta_u \to 0} \frac{d^2\sigma_u}{d\vartheta_a^2} \vartheta_u \equiv \lim_{\vartheta_u \to 0} 3G[-2\vartheta_u \omega' - \vartheta_u^2 \omega''] = 0$$

с учетом (3.6) получаем

$$\lim_{\vartheta_u \to 0} \vartheta_u^2 \omega''(\vartheta_u) = 0 \tag{3.7}$$

и т. д. Как видно, асимптотика поведения в окрестности нуля функции $\sigma_u(\vartheta_u)$ определяет асимптотику поведения функции $\omega(\vartheta_u)$. В общем случае, если

$$\lim_{\vartheta_u \to 0} \frac{d^k \sigma_u}{d\vartheta_u^k} \vartheta_u^{k-1} = 0 \quad \text{при } k = 2, 3, \ldots, n \tag{3.8}$$

то

$$\lim_{\vartheta_u \to 0} \vartheta_u^k \omega^{(k)}(\vartheta_u) = 0 \quad \text{при } k = 2, 3, \ldots, n \tag{3.9}$$

Материалы, для которых выполнены соотношения (3.2), (3.4), (3.6) — (3.9), назовем инфинитезимально-упругими порядка n.

Легко видеть, что любой начально-упругий материал является инфинитезимально-упругим порядка ∞. В данном случае будем предполагать выполненными условия (3.2) — (3.4), (3.6), (3.7) и для краткости такой материал будем называть инфинитезимально-упругим.

Поставим задачу отыскания процесса изменения вида внешних нагрузок, при которых в теле происходит процесс активной однородно-простой деформации.

Заметим, что в выражении (2.4) для порождающего девиатора $э_{ij}^\circ$ (x) процесса в качестве L можно взять оператор дифференцирования любого порядка по времени [3, 4]. Выбрав $L = d/dt$, $t_0 = 0$, из (2.4), (2.6), (2.8) получаем

$$(3.10) \qquad э_{ij}^\circ (\mathrm{x}) \equiv v_{ij}'^\circ (\mathrm{x}), \ \ \varepsilon_{ij}^\circ (\mathrm{x}), \equiv v_{ij}^\circ (\mathrm{x}), \ \ u_i^\circ (\mathrm{x}) \equiv v_i^\circ (\mathrm{x})$$

Здесь v_i° (x) — вектор начальных скоростей $v_{ij}^\circ = {}^1/_2(v_{i,j}^\circ + v_{j,i}^\circ)$ и $v_{ij}'^\circ$— тензор и девиатор начальных скоростей деформаций соответственно.

Тогда соотношения (2.1), (2.2), (2.5), (2.7), описывающие кинематику процесса однородно-простой деформации, принимают соответственно вид

$$(3.11) \qquad э_{ij} (\mathrm{x}, t) = A (t) v_{ij}'^\circ (\mathrm{x})$$

$$p_{ij} = p_{ij} (\mathrm{x}), \ \ э_u (\mathrm{x}, t) = A (t) v_u^\circ (\mathrm{x}), \ \ v_u^\circ = ({}^2/_3 v_{ij}'^\circ v_{ij}'^\circ)^{1/2}$$

$$(3.12) \qquad \varepsilon_{ij} (\mathrm{x}, t) = A (t) v_{ij}^\circ (\mathrm{x}) + \varepsilon^* (\mathrm{x}, t) \delta_{ij}$$

$$u_i (\mathrm{x}, t) = A (t) v_i^\circ (\mathrm{x}) + u_i^* (\mathrm{x}, t)$$

Предполагая отсутствие начальных сдвиговых деформаций ($э_{ij}$ (x, 0) $\equiv 0$), с учетом активности процесса из (3.11) получаем следующие свойства функции A (t):

$$(3.13) \qquad A (0) = 0, \ \ A^{\cdot} (0) = 1, \ \ A^{\cdot} (t) \geqslant 0 \ \text{при} \ t \in [0, T]$$

На основании следствия 2.1 ограничимся процессом тензорно-простой деформации (2.9)

$$(3.14) \qquad \varepsilon_{ij} (\mathrm{x}, t) = A (t) v_{ij}^\circ (\mathrm{x}), \ \ u_i (\mathrm{x}, t) = A (t) v_i^\circ (\mathrm{x})$$

Предполагая, что начальные напряжения и деформации в теле отсутствуют, а начальные значения внешних нагрузок нулевые, найдем необходимые и достаточные условия процесса (3.13), (3.14).

Пусть решение задачи (3.1) представляет собой процесс (3.13), (3.14). Тогда начальные скорости v_i°, скорости деформации v_{ij}°, а следовательно, и направляющий тензор p_{ij} процесса однозначно определены начальными значениями скоростей внешних нагрузок $F_i^{\cdot\circ}$ (x) $\equiv F_i^{\cdot}$ (x, 0), $T_{\nu i}^{\cdot\circ}$ (x) $\equiv T_{\nu i}^{\cdot}$ (x, 0), $\psi_i^{\cdot\circ}$ (x) $\equiv \psi^{\cdot}_i$ (x, 0). Действительно, из (3.1) с учетом (3.4), (3.6), (3.7), (3.11), (3.13), (3.14) получим

$$(3.15) \qquad (3K + G) v_{,i}^\circ + G \nabla^2 v_i^\circ + F_i^{\cdot\circ} = 0 \quad \text{в} \ \Omega$$

$$2G v_{ij}'^\circ l_i + 3K v^\circ l_i = T_{\nu i}^{\cdot\circ} \ \ \text{на} \ S_\sigma, \qquad v_i^\circ = \psi_i^{\cdot\circ} \ \ \text{на} \ S_u$$

Задача (3.15) имеет вид смешанной краевой задачи о статическом равновесии линейно-упругого тела с модулями K и G.

Решение v_i° (x) этой задачи существует и единственно [5] и однозначно определяет величины v_{ij}° (x), p_{ij} (x), т. е. «начало» процесса (3.14). Следовательно, начальные скорости внешних нагрузок вместе с функцией A (t), удовлетворяющей условиям (3.13), полностью задают процесс тензорно-простой деформации (3.14), а вместе с ним и соответствующий процесс нагружения, т. е. функции F_i (x, t), $T_{\nu i}$ (x, t), ψ_i (x, t). Из (3.1), (3.11) и (3.14) с использованием (3.15) получаем конкретный вид процесса нагружения

$$F_i(\mathrm{x}, t) = A(t)F_i^{\cdot\circ}(x) - A(t)[\omega(\vartheta_u) + \vartheta_u\omega'(\vartheta_u)] \times \times [F_i^{\cdot\circ}(\mathrm{x}) + 3Kv_{,i}^\circ(\mathrm{x})] - 2G\vartheta_u^2\omega'(\vartheta_u)p_{ij,j}(\mathrm{x}) \quad \text{в } Q \tag{3.16}$$

$$T_{\nu i}(\mathrm{x}, t) = A(t)T_{\nu i}^{\cdot\circ}(\mathrm{x}) - A(t)\omega(\vartheta_u)[T_{\nu i}^{\cdot\circ}(\mathrm{x}) - - 3Kv^\circ(\mathrm{x})l_i] \text{ на } \Sigma_\sigma,$$

$$\psi_i(\mathrm{x}, t) = A(t)\psi_i^{\cdot\circ}(\mathrm{x}) \text{ на } \Sigma_u$$

Правые части (3.16) однозначно определены функцией A (t) и начальными скоростями внешних нагрузок.

Соотношения (3.16) с учетом (3.15), (3.11) представляют собой необходимые, а в силу единственности решения задачи (3.1) и достаточные условия процесса тензорно-простой деформации (3.13), (3.14).

Возвращаясь к задаче об условиях девиаторно-простой активной деформации, т. е. переходя от (3.14) к (3.12), согласно следствию 2.1, произведем наложение произвольного квазитермического поля нагрузок F_i^*, $T_{\nu i}^*$, ψ_i^* на поле нагрузок (3.16).

Теорема об однородно-простой деформации. Для того чтобы в однородном изотропном инфинитезимально (начально)-упругом сжимаемом односвязном теле под воздействием внешних нагрузок F_i, $T_{\nu i}$, ψ_i происходил процесс однородно-простой активной деформации (3.11) — (3.13), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$F_i(\mathrm{x}, t) = F_i^t(\mathrm{x}, t) + F_i^*(t) \quad \text{в } Q \tag{3.17}$$

$$T_{\nu i}(\mathrm{x}, t) = T^t_{\nu i}(\mathrm{x}, t) + T_{\nu i}^*(\mathrm{x}, t) \quad \text{на } \Sigma_\sigma$$

$$\psi_i(\mathrm{x}, t) = \psi_i^t(\mathrm{x}, t) + \psi_i^*(\mathrm{x}, t) \quad \text{на } \Sigma_u$$

Здесь F_i^t, $T_{\nu i}^t$, ψ_i^t определены соотношениями (3.16) с учетом (3.15), F_i^*, $T_{\nu i}^*$, ψ_i^* — произвольное квазитермическое поле нагрузок (1.7).

4. Исследование условий однородно-простой деформации. Аналогично формулируется теорема об однородно-простой деформации для несжимаемых тел, когда связь $\sigma \sim \varepsilon$ заменена условием

$$\varepsilon \equiv 0 \quad \text{в } Q' \tag{4.1}$$

Тензор деформаций является в этом случае девиатором $\varepsilon_{ij} \equiv \vartheta_{ij}$, и понятия девиаторно-простой и тензорно-простой деформации совпадают. Квазитермическое поле нагрузок, обеспечивающее отсутствие (сдвиговых) деформаций, определяется соотношениями

$$F_i^* = -U_{,i}(\mathrm{x}, t) \quad \text{в } Q' \quad T_{\nu i}^* = [U(\mathrm{x}, t) + D(t)]\, l_i \quad \text{на } \Sigma_\sigma \tag{4.2}$$

$$\psi_i^* = a_i(\mathrm{x}, t) \quad \text{на } \Sigma_u$$

Здесь $U(\mathbf{x}, t)$ и $D(t)$ — произвольные функции, $a_i(\mathbf{x}, t)$ — произвольный вектор перемещения тела как жесткого целого. Соответствующее квазитермическое решение имеет вид

$$\sigma_{ij}^* = [U(\mathbf{x}, t) + D(t)]\,\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^* \equiv 0, \quad u_i^* = a_i(\mathbf{x}, t) \tag{4.3}$$

Начальная краевая задача, аналогичная (3.15), имеет вид

$$\sigma_{,i}^{\cdot\circ} + G\nabla^2 v_i^\circ + F_i^{\cdot\circ} = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad v_{i,i}^\circ = 0 \quad \text{в } \Omega' \tag{4.4}$$

$$\sigma^{\cdot\circ} l_i + 2Gv_{ij}^\circ l_j = T_{\nu i}^{\cdot\circ} \quad \text{на } S_\sigma, \qquad v_i^\circ = \psi_i^{\cdot\circ} \text{ на } S_u$$

Нагрузки вида

$$F_i(\mathbf{x}, t) = A(t)\,F_i^{\cdot\circ}(\mathbf{x}) - A(t)\,[\omega(\vartheta_u) + \vartheta_u\omega'(\vartheta_u)] \times \tag{4.5}$$
$$\times\,[F_i^{\cdot\circ}(\mathbf{x}) + \sigma_{,i}^{\cdot\circ}(\mathbf{x})] - 2G\vartheta_u^2\omega'(\vartheta_u)\,p_{ij,j}(\mathbf{x}) \quad \text{в } Q$$
$$T_{\nu i}(\mathbf{x}, t) = A(t)\,T_{\nu i}^{\cdot\circ}(\mathbf{x}) - A(t)\,\omega(\vartheta_u)\,[T_{\nu i}^{\cdot\circ}(\mathbf{x}) - \sigma^{\cdot\circ}(\mathbf{x})\,l_i] \quad \text{на } \Sigma_\sigma$$
$$\psi_i(\mathbf{x}, t) = A(t)\,\psi_i^{\cdot\circ}(\mathbf{x}) \quad \text{на } \Sigma_u$$

однозначно определяются функцией $A(t)$, удовлетворяющей условиям (3.13), и своими начальными скоростями $F_i^{\cdot\circ}(\mathbf{x})$, $T_{\nu i}^{\cdot\circ}(\mathbf{x})$, $\psi_i^{\cdot\circ}(\mathbf{x})$ с учетом (4.4) и обеспечивают в теле процесс однородно-простой деформации, сопровождаемый пропорциональным возрастанием среднего напряжения

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = A(t)\,v_{ij}^\circ(\mathbf{x}), \qquad u_i(\mathbf{x}, t) = A(t)\,v_i^\circ(\mathbf{x}), \qquad \sigma(\mathbf{x}, t) = A(t)\sigma^{\cdot 0}(\mathbf{x}) \tag{4.6}$$

Произвольный процесс однородно-простой деформации получается линейным наложением квазитермического процесса (4.2), (4.3) на процесс (4.5), (4.6), откуда и следуют необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации несжимаемых тел, выраженные формулами (3.17), где под F_i^t, $T_{\nu i}^t$, ψ_i^t следует понимать функции (4.5) с учетом (4.4), а под F_i^*, $T_{\nu i}^*$, ψ_i^* — функции (4.2).

Как в случае сжимаемых, так и в случае несжимаемых тел классы процессов нагружения, определяемые теоремами об однородно-простой деформации, связаны с характеристиками упрочнения материала и, вообще говоря, существенно отличаются от пропорционального изменения внешних нагрузок. Добавочный произвол в изменение внешних нагрузок вносится наложением квазитермических полей. С точностью до этого произвола в частных случаях линейно-упругого материала или материала, определенного в теореме о простом нагружении, пропорциональное нагружение является не только достаточным, но и необходимым условием однородно-простой деформации тела.

Влияние квазитермических полей на поведение внешних нагрузок может оказаться существенным. Например, из требования непрерывного возрастания сдвиговых деформаций от нулевых значений получаем непрерывное во времени развитие нагрузок F_i^t, $T_{\nu i}^t$, ψ_i^t от нулевых начальных значений; в то же время квазитермическое поле F_i^*, $T_{\nu i}^*$, ψ_i^* в начальный момент не обязательно равно нулю и в течение процесса, вообще говоря, не обязательно непрерывно по времени.

Таким образом, полученные результаты служат обоснованием применения теории малых упругопластических деформаций для более широкого класса упругопластических тел и нагрузок, чем предусмотрено в теореме о простом нагружении А. А. Ильюшина.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. С. Ленскому за постановку задачи и руководство работой.

Поступила 13 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Ленский В. С.* Введение в теорию пластичности, т. 2. Изд-во МГУ, 1969.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. *Ленский В. С.* Введение в теорию пластичности, т. 1. Изд-во МГУ, 1968.
5. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М., «Мир», 1974.