Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ И МАТРИЦ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

И. М. Долгова, Ю. А. Мельников

(Днепропетровск)

Излагается возможный способ построения функций и матриц Грина смешанных граничных задач для областей, ограниченных координатными линиями в прямоугольной декартовой и полярной системах координат (полоса, полуполоса, прямоугольник, круг, кольцо, круговой и кольцевой секторы). Получено несколько замкнутых представлений таких функций и матриц для уравнения Лапласа и системы Ляме плоской задачи теории упругости.

1. Пусть отыскивается решение $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y)$ плоской задачи теории упругости, записанной в смещениях

$$
\begin{aligned}
&L(\partial^2 / \partial x^2, \partial^2 / \partial y^2, \lambda, \mu)\, \mathbf{U}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \\
&B_1(\partial / \partial x, \ \partial / \partial y)\, \mathbf{U}(x, 0) = B_2(\partial / \partial x, \ \partial / \partial y)\, \mathbf{U}(x, b) = 0 \\
&B_3(\partial / \partial x, \ \partial / \partial y)\, \mathbf{U}(0, y) = B_4(\partial / \partial x, \ \partial / \partial y)\, \mathbf{U}(a, y) = 0
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

в прямоугольнике Ω $(0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant b)$.

Здесь $\mathbf{U}(x, y)$ и $\mathbf{F}(x, y)$ — векторы смещений точек прямоугольника Ω и объемных сил соответственно; λ и μ — постоянные Ляме, характеризующие упругие свойства материала, заполняющего область Ω. Элементы матрицы-оператора $L = (L_{ij})_{2;2}$ определяются соотношениями

$$
L_{11} \equiv (\lambda + \mu)\partial^2 / \partial x^2 + \Delta, \ \ L_{12} = L_{21} \equiv (\lambda + \mu)\, \partial^2 / \partial x \ \partial y
$$
$$
L_{22} \equiv (\lambda + \mu)\partial^2 / \partial y^2 + \Delta
$$

Операторы B_i $(i = 1, \ldots, 4)$ описывают условия взаимодействия рассматриваемого прямоугольника с окружающей средой.

Допустим, что решение задачи (1.1) и вектор $\mathbf{F}(x, y)$ представимы разложениями

$$
\mathbf{U}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(y)\, \mathbf{U}_n(x), \quad \mathbf{F}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(y)\, \mathbf{F}_n(x) \tag{1.2}
$$
$$
Q_n(y) = \begin{Vmatrix} \cos \nu y & 0 \\ 0 & \sin \nu y \end{Vmatrix}, \quad \nu = n\pi b^{-1}
$$

Заметим, что такое представление должно обеспечивать удовлетворение первых двух граничных условий задачи (1.1), что имеет место, например, в представляющем практический интерес случае симметрии напряженно-деформированного состояния относительно сторон $y = 0$ и $y = b$ прямоугольника Ω, когда

$$B_1 = B_2 \equiv \begin{Vmatrix} 0 & I \\ \mu\,\partial/\partial y & \mu\,\partial/\partial x \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

Из (1.1) и (1.2) в этом случае получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

(1.4) $\quad L_n(\partial^2/\partial x^2, \lambda, \mu)\,\mathbf{U}_n(x) = \mathbf{F}_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ с краевыми условиями

$$B_{3n}(\partial/\partial x)\,\mathbf{U}_n(0) = B_{4n}(\partial/\partial x)\,\mathbf{U}_n(a) = 0 \tag{1.5}$$

Элементы L_{ij}^n матрицы L_n определяются выражениями

$$L_{11}^n \equiv (\lambda + 2\mu)\,\partial^2/\partial x^2 - \nu^2\mu, \quad L_{12}^n = -L_{21}^n \equiv (\lambda + \mu)\,\nu\partial/\partial x$$
$$L_{22}^n \equiv \mu\,\partial^2/\partial x^2 - (\lambda + 2\mu)\,\nu^2$$

Векторы

$$\mathbf{U}_{n1}(x) = \begin{Vmatrix} \exp \nu x \\ -\exp \nu x \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{U}_{n3}(x) = \begin{Vmatrix} -(\lambda + \mu)\,\nu x \exp \nu x \\ [(\lambda + \mu)\,\nu x + (\lambda + 3\mu)] \exp \nu x \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{U}_{n2}(x) = \begin{Vmatrix} \exp(-\nu x) \\ \exp(-\nu x) \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{U}_{n4}(x) = \begin{Vmatrix} (\lambda + \mu)\,\nu x \exp(-\nu x) \\ [(\lambda + \mu)\nu x - (\lambda + 3\mu)] \exp(-\nu x) \end{Vmatrix}$$

представляют собой фундаментальную систему решений однородной системы, соответствующей (1.4) при $n = 1, 2, 3, \ldots$ (случай $n = 0$ тривиален, однако должен быть рассмотрен отдельно).

Следуя процедуре метода Лагранжа вариации произвольных постоянных, получим общее решение системы (1.4) в виде

$$\mathbf{U}_n(x) = \int_0^x S_n(x, \xi)\,\mathbf{F}_n(\xi)\,d\xi + P_n(x)\,\mathbf{D}_n \tag{1.7}$$

Элементы $S_{ij}^n(x, \xi)$ матрицы $S_n(x, \xi)$ при этом определяются соотношениями

$$S_{11}^n(x, \xi) = a(x - \xi) - b(x - \xi), \quad S_{12}^n(x, \xi) = -mc(x - \xi)$$
$$S_{21}^n(x, \xi) = c(x - \xi), \quad S_{22}^n(x, \xi) = m[a(x - \xi) + b(x - \xi)]$$
$$a(u) = {}^1/_2\nu^{-1}(\lambda + 3\mu)\,\mathrm{sh}\,\nu u, \quad b(u) = {}^1/_2(\lambda + \mu)\,u\,\mathrm{ch}\,\nu u$$
$$c(u) = {}^1/_2(\lambda + \mu)\,u\,\mathrm{sh}\,\nu u, \quad m = \mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$$

а $P_n(x) = (\mathbf{U}_{nj}(x))$ — матрица размерности 2×4, столбцами которой являются векторы (1.6).

Матрица-столбец произвольных постоянных D_n после удовлетворения выражением (1.7) краевым условиям (1.5) определяется интегралом

$$\mathbf{D}_n = \int_0^a W_n(\xi)\,\mathbf{F}_n(\xi)\,d\xi$$

подставив который в (1.7), получим

$$\mathbf{U}_n(x) = \int_0^a g_n(x, \xi)\,\mathbf{F}_n(\xi)\,d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.8}$$

Ядро представления (1.8)

$$g_n(x, \xi) = \begin{cases} S_n(x, \xi) + P_n(x) \; W_n(\xi) & \text{при } x \geqslant \xi \\ P_n(x) \; W_n(\xi) & \text{при } x \leqslant \xi \end{cases}$$

является матрицей Грина краевой задачи (1.4), (1.5). Как уже отмечалось, $g_0(x, \xi)$ также может быть получена по описанной схеме, если исходить из фундаментальной системы решений, соответствующей случаю $n = 0$.

Применив теперь для $\mathbf{F}_n(\xi)$ формулу обращения Фурье — Эйлера, из (1.8) и первого из соотношений (1.2) получим

$$\mathbf{U}(x, y) = \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\varepsilon_n}{b} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(y) g_n(x, \xi) Q_n(\eta) \right] \mathbf{F}(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 2 & \text{при } n > 0 \end{cases}$$

В силу единственности решения задачи (1.1) и известного (см., например, [1]) следствия из второй формулы Грина ядро интеграла (1.9)

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{\varepsilon_n}{b} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(y) g_n(x, \xi) Q_n(\eta) \tag{1.10}$$

является искомой матрицей Грина этой задачи.

В некоторых случаях представления типа (1.10) удается просуммировать. Так, например, если сформулировать задачу (1.1) в полуполосе $(-\infty < x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$, матрицу B_3 определить в виде

$$B_3(\partial / \partial x, \partial / \partial y) \equiv \begin{Vmatrix} I & 0 \\ \mu \partial / \partial y & \mu \partial / \partial x \end{Vmatrix} \tag{1.11}$$

и потребовать ограниченности от вектора $\mathbf{U}(x, y)$ при $x \to -\infty$, то компоненты $g_{ij}{}^n(x, \xi)$ ядра представления (1.8) при $x \leqslant \xi$ определятся выражениями

$$g_{11}{}^n(x, \xi) = p(x - \xi) - q(x - \xi) - p(x - \xi) + q(x + \xi)$$

$$g_{12}{}^n(x, \xi) = m[p(x - \xi) + p(x + \xi)], \quad g_{21}{}^n(x - \xi) =$$
$$= p(x + \xi) - p(x - \xi)$$

$$g_{22}{}^n(x, \xi) = -m[p(x - \xi) + q(x - \xi) + p(x + \xi) +$$
$$+ q(x + \xi)]$$

$$p(u) = {}^1/_4 (\lambda + \mu) u e^{\nu u}, \quad q(u) = (4\nu)^{-1} (\lambda + 3\mu) e^{\nu u}$$

Для случая $n = 0$ при $x \leqslant \varepsilon$ имеем

$$g_{11}{}^\circ = m\mu\xi, \quad g_{12}{}^\circ = g_{21}{}^\circ = g_{22}{}^\circ = 0$$

Производя суммирование в (1.10) и принимая во внимание известные соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\gamma = (1 - t\cos\gamma)(1 - 2t\cos\gamma + t^2)^{-1} \tag{1.12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^{-1} \cos n\gamma = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2t\cos\gamma + t^2)$$

$$t^2 < 1, 0 < \gamma < 2\pi$$

получим явный вид элемента $G_{11}(x, y; \xi, \eta)$ искомой матрицы Грина

$$G_{11}(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2} m\mu \operatorname{Re} \zeta - \frac{1}{8\pi}(\lambda + 3\mu) b \ln \frac{E(z+\zeta)}{E(z-\zeta)} \frac{E(z+\bar{\zeta})}{E(z-\bar{\zeta})} +$$
$$+ \frac{1}{8}(\lambda + \mu)\{\operatorname{Re}(z-\zeta)[Q(z-\zeta) + Q(z-\bar{\zeta})] -$$
$$- \operatorname{Re}(z+\zeta)[Q(z+\zeta) + Q(z+\bar{\zeta})]\}, \quad E(u) = |1 - \omega(u)|,$$
$$Q(u) = P(u) E^{-2}(u)$$
$$\omega(u) = \exp[\pi b^{-1} u], \quad P(u) = \operatorname{Re}[1 - \omega(u)]$$
$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

Для других элементов матрицы Грина имеем

$$G_{12}(x, y; \xi, \eta) = {}^1/_8\, \mu (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \{\operatorname{Re}(z-\zeta)[T(z-\zeta) + T(z-\bar{\zeta})] + \operatorname{Re}(z+\zeta)[T(z+\zeta) + T(z+\bar{\zeta})]\}$$

$$G_{21}(x, y; \xi, \eta) = {}^1/_8 (\lambda + \mu)\{\operatorname{Re}(z-\zeta)[T(z-\zeta) - T(z-\bar{\zeta})] + \operatorname{Re}(z+\zeta)[T(z+\zeta) - T(z+\bar{\zeta})]\}$$

$$G_{22}(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{8\pi}(\lambda + 3\mu) m b \ln \frac{E(z+\zeta)\, E(z-\bar{\zeta})}{E(z-\zeta)\, E(z+\bar{\zeta})} -$$
$$- \frac{1}{8}(\lambda + \mu) m \{\operatorname{Re}(z-\zeta)[Q(z-\zeta) - Q(z-\bar{\zeta})] -$$
$$- \operatorname{Re}(z+\zeta)[Q(z+\zeta) - Q(z+\bar{\zeta})]\}$$
$$T(u) = S(u) E^{-2}(u), \quad S(u) = \operatorname{Im} \omega(u)$$

Построенная конструкция удовлетворяет всем определяющим свойствам матрицы Грина.

2. Приводим некоторые результаты применения описанного способа к построению функций Грина оператора Лапласа для различных граничных, в том числе и смешанных задач. Так, например, в случае задачи Дирихле для полуполосы ($x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$) искомая функция Грина представляется разложением

$$g(x, y; \xi, \eta) = 2b^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, \xi) \sin \nu y \sin \nu \eta, \quad \nu = n\pi b^{-1}$$
$$g_n(x, \xi) = {}^1/_2 \nu^{-1} [\exp(-\nu(x + \xi)) - \exp(\nu(x - \xi))], \quad x \leqslant \xi$$

суммируя которое с учетом обозначений, введенных в п. 1, имеем

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{E(z-\bar{\zeta})\, E(z+\bar{\zeta})}{E(z-\zeta)\, E(z+\zeta)} \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) совпадает с известным [2], но полученным другим способом представлением функции Грина для полуполосы.

В случае смешанной задачи

$$\partial v / \partial x|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0;\, b} = 0$$

для полуполосы по аналогии с предыдущим получаем

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{E(z-\bar{\zeta})\, E(z+\zeta)}{E(z-\zeta)\, E(z+\bar{\zeta})} \tag{2.2}$$

Рассматривая полуполосы с условиями

$$(\partial v / \partial x + \beta v)_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0;\, b} = 0$$

приходим к результату

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{E(z-\bar{\zeta}) E(z+\zeta)}{E(z-\zeta) E(z+\bar{\zeta})} - \tag{2.3}$$

$$- 2\beta b^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [\nu(\beta - \nu)]^{-1} \exp[-\nu(x+\xi)] \sin \nu y \sin \nu\eta, \quad \nu = n\pi b^{-1}$$

из которого, как частный случай при $\beta = 0$ вытекает представление (2.2).

Следуя описанной в п. 1 схеме, для задачи Дирихле в прямоугольнике $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ получаем следующее выражение функции Грина:

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{E(z-\bar{\zeta}) E(z+\bar{\zeta})}{E(z-\zeta) E(z+\zeta)} - \tag{2.4}$$

$$- 2b^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sh} \nu x \operatorname{sh} \frac{\nu\xi}{\nu e^{\nu a}} \operatorname{sh} \nu a \right] \sin \nu y \sin \nu\eta$$

Не представляет существенных трудностей также рассмотрение смешанных граничных задач для прямоугольника. Так, например, в случае

$$v|_{x=0} = v|_{y=0;\, b} = (\partial v / \partial x + \beta v)_{x=a} = 0$$

получаем

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{E(z-\bar{\zeta}) E(z+\bar{\zeta})}{E(z-\zeta) E(z+\zeta)} - \tag{2.5}$$

$$- 2b^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\beta - \nu) \operatorname{sh} \nu x \operatorname{sh} \frac{\nu\xi}{\nu} \exp \nu a \, (\beta \operatorname{sh} a + \nu \operatorname{ch} \nu a) \right] \sin \nu y \sin \nu\eta$$

Легко убедиться, что функции, задаваемые формулами (2.1) — (2.5), удовлетворяют всем определяющим свойствам функций Грина.

3. В заключение приведем некоторые результаты построения функций Грина смешанных граничных задач уравнения Лапласа для областей, границы которых очерчены координатными линиями в полярной системе координат. Так, для задачи Дирихле в круговом секторе $(0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$ имеем функцию Грина в виде:

$$g(r, \varphi; \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z^\sigma - \bar{\zeta}^\sigma| \, |(R^2 z)^\sigma - (r^2 \zeta)^\sigma|}{|z^\sigma - \zeta^\sigma| \, |(R^2 z)^\sigma - (r^2 \bar{\zeta})^\sigma|} \tag{3.1}$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \zeta = \rho(\cos \psi + i \sin \psi), \quad \sigma = \pi / \alpha$$

Задача

$$v|_{\varphi=0} = \partial v / \partial \varphi|_{\varphi=\alpha} = 0$$

для сектора $(0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$ приводит к следующему результату:

$$g(r, \varphi; \rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z^{\sigma/2} + \zeta^{\sigma/2}| \, |z^{\sigma/2} - \bar{\zeta}^{\sigma/2}|}{|z^{\sigma/2} - \zeta^{\sigma/2}| \, |z^{\sigma/2} + \bar{\zeta}^{\sigma/2}|} \tag{3.2}$$

из которого как частный случай при $\alpha = \pi$ следует выражение функции Грина смешанной граничной задачи для полуплоскости.

В случае бесконечного кольцевого сектора $(r \geqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$ при граничных условиях

$$v|_{\varphi=0} = v|_{\varphi=\alpha} = \partial v / \partial r|_{r=R} = 0$$

приходим к следующему представлению функции Грина:

$$g(r,\varphi;\rho,\psi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^\sigma-\bar{\zeta}^\sigma|\,|(R^2z)^\sigma-(r^2\bar{\zeta})^\sigma|}{|z^\sigma-\zeta^\sigma|\,|(R^2z)^\sigma-(r^2\zeta)^\sigma|}\tag{3.3}$$

Функция Грина оператора Лапласа для бесконечного кольцевого сектора при граничных условиях

$$v\,|_{\varphi=0}=v\,|_{r=R}=\partial v/\partial\varphi\,|_{\varphi=\alpha}=0$$

имеет вид

$$g(r,\varphi;\rho,\psi)=\frac{1}{2\pi}\ln\left\{\frac{|z^{\sigma/2}+\zeta^{\sigma/2}|\,|z^{\sigma/2}-\bar{\zeta}^{\sigma/2}|}{|z^{\sigma/2}+\bar{\zeta}^{\sigma/2}|\,|z^{\sigma/2}-\zeta^{\sigma/2}|}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{|(\rho^2z)^{\sigma/2}+(R^2\bar{\zeta})^{\sigma/2}|\,|(\rho^2z)^{\sigma/2}-(R^2\zeta)^{\sigma/2}|}{|(\rho^2z)^{\sigma/2}+(R^2\zeta)^{\sigma/2}|\,|(\rho^2z)^{\sigma/2}-(R^2\bar{\zeta})^{\sigma/2}|}\right\}\tag{3.4}$$

Граничные условия

$$v\,|_{\varphi=0;\,\alpha}=(\partial v/\partial r+\beta v)_{r=R}=0$$

для бесконечного кольцевого сектора приводят к следующему результату:

$$g(r,\varphi;\rho,\psi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^\sigma-\bar{\zeta}^\sigma|\,|(R^2z)^\sigma-(r^2\bar{\zeta})^\sigma|}{|z^\sigma-\zeta^\sigma|\,|(R^2z)^\sigma-(r^2\zeta)^\sigma|}-$$

$$-2\beta R\alpha^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}[R^{2\nu}/\nu r^\nu\rho^\nu(\beta R-\nu)]\sin\nu\varphi\sin\nu\psi,\qquad \nu=n\pi\alpha^{-1}\tag{3.5}$$

В случае граничной задачи

$$v\,|_{\varphi=0;\,\alpha}=v\,|_{r=R_1}=\partial v/\partial r\,|_{r=R_2}=0$$

для кольцевого сектора ($R_1\leqslant r\leqslant R_2$, $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$) найдем функцию Грина в виде

$$g(r,\varphi;\rho,\psi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^\sigma-\bar{\zeta}\sigma|\,|(R_1^2z)^\sigma-(r^2\zeta)^\sigma|}{|z^\sigma-\zeta^\sigma|\,|(R_1^2z)^\sigma-(r^2\bar{\zeta})^\sigma|}+$$

$$+\alpha^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\rho^{2\nu}-R_1^{2\nu})(r^{2\nu}-R_1^{2\nu})}{\nu r\rho(R_1^{2\nu}+R_2^{2\nu})}\sin\nu\varphi\sin\nu\psi\tag{3.6}$$

Функции (3.1) — (3.6) удовлетворяют всем свойствам, определяющим функцию Грина.

Перечень краевых задач, функции и матрицы Грина для которых могут быть построены описанным способом, не ограничивается рассмотренными здесь случаями. Использованные в данной работе задачи можно рассматривать как иллюстрированные примеры, демонстрирующие действенность применявшегося метода.

Поступила 18 XI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М., «Наука», 1974.
2. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. М., «Высшая школа», 1964.