

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ  
В ПОТОКАХ СПОНТАННО КОНДЕНСИРУЮЩЕГОСЯ ПАРА**

**Ф. А. Слободкина, Л. И. Селезнев**

(Москва)

Устойчивость скачков уплотнения при течении идеального газа в каналах переменного сечения в одномерном приближении и в линейной постановке исследовалась в работах [1, 5]. Было установлено существенное влияние на устойчивость скачка формы канала в том сечении, где расположен скачок в стационарном течении, а также характера граничного условия в выходном сечении канала.

Газодинамические течения с дополнительными воздействиями, например вдувом газа в канал через боковые стенки, течения в присутствии электромагнитного поля [2, 3] или с учетом химических реакций и т. п., обладают дополнительными свойствами, сказывающимися на устойчивости течения и, в частности, на устойчивости течения со скачком.

В данной работе исследуется устойчивость скачков уплотнения в потоках спонтанно конденсирующегося пара в рамках представлений, разработанных в [2]. Рассматривается устойчивость скачка уплотнения, расположенного вблизи выходного сечения, при постоянном давлении на срезе канала и перед особой точкой. Цель исследования состоит в определении влияния спонтанной конденсации на устойчивость скачка. В связи с этим вид граничного условия в выходном сечении канала не варьировался, так как это влияние достаточно наглядно продемонстрировано в [3-5]. Показано, что наличие особой точки за скачком уплотнения может привести к развитию колебательных явлений.

1. Рассмотрим в квазиодномерном приближении адиабатное нестационарное течение спонтанно конденсирующегося пара в канале переменного сечения.

Система уравнений основных законов сохранения и фазовых превращений имеет вид [6]

$$(1.1) \quad A^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + B^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = F^i \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{Bmatrix} u_3 & 0 & \gamma u_1 \\ 0 & u_3 & u_2 \\ u_2^{-1} & 0 & u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & u_4 \\ 0 & 0 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \parallel u_3 \delta_{lk} \parallel$$

$$F^1 = -(\gamma - 1)(bu_6 E + hu_5) - \gamma u_1 u_3 (\ln A)'$$

$$F^2 = -(bu_6 + u_2 u_3 (\ln A)'), \quad F^3 = 0, \quad F^4 = J - u_4 u_3 (\ln A)'$$

$$F^5 = Jr_* + au_4 - u_5 u_3 (\ln A)', \quad F^6 = Jr_* + 2au_5 - u_6 u_3 (\ln A)'$$

Здесь  $u$  — вектор-столбец с элементами  $(p, \rho, v, \omega_0, \omega_1, \omega_2)$ ,  $A$  — единичная матрица,  $B$  — матрица блочной структуры,  $l, k = 4, 5, 6$ ,  $p, \rho, v$  — давление, плотность и скорость пара,  $\omega_0$  — норма функции распределения частиц конденсата по размерам,  $\omega_1 = \omega_0 \langle r \rangle$ ,  $\omega_2 = \omega_0 \langle r^2 \rangle$ ,  $\langle r \rangle$  — средний радиус частиц конденсата,  $\langle r^2 \rangle$  — средний квадрат радиуса частиц конденсата,  $A$  — площадь поперечного сечения канала,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей,  $E$  — термодинамический потенциал частиц, испытывающих фазовое превращение,  $J$  — скорость образования ядер конденсации,  $r_*$  — радиус ядер конденсации,  $b$  — функция  $p$  и  $\rho$ , определяемая конкретным законом фазовых превращений на поверхности частиц конденсата,  $h$  — функция  $p$  и  $\rho$ , определяемая законом теплообмена между фазами,  $a = b / (4\pi r_k)$ ,  $\rho_k$  — плотность конденсированной фазы ( $\rho_k = \text{const}$ ),  $t$  — время,  $x$  — пространственная координата; по повторяющемуся индексу предполагается суммирование. Штрихом обозначена полная производная по  $x$ .

Предположим, что стационарное течение, исследуемое на устойчивость, содержит как дозвуковые, так и сверхзвуковые участки. Переход от сверхзвуковой скорости к дозвуковой может происходить непрерывно через особую точку или в ударной волне. Пусть рассматриваемое стационарное течение содержит ударную волну. Связь величин перед волной и за ней задается соотношениями

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u_i^- (\delta - u_3^-) &= u_i^+ (\delta - u_3^+) \quad (i = 2, 4, 5, 6) \\ u_2^- u_3^- (\delta - u_3^-) - u_1^- &= u_2^+ u_3^+ (\delta - u_3^+) - u_1^+ \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{u_1^-}{u_2^-} + \frac{(\delta - u_3^-)^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{u_1^+}{u_2^+} + \frac{(\delta - u_3^+)^2}{2} \end{aligned}$$

Индексы минус и плюс относятся к параметрам среды перед и за ударной волной соответственно,  $\delta$  — скорость ударной волны.

Будем исследовать на устойчивость дозвуковой участок течения между ударной волной и некоторым характерным сечением ( $x = x_b$ ), например сечением на выходе из канала или сечением, где происходит переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой, т. е. особой точкой. Граничные условия в этом характерном сечении могут быть заданы в общем виде

$$(1.3) \quad \Psi \left( u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x}, \dots \right) = 0 \quad (x = x_b)$$

Предположим, что дозвуковая часть стационарного решения возмущена. Считая нестационарные добавки параметров течения (возмущения) малыми и определяя их зависимость от времени множителем  $\exp \lambda t$  в соответствии с [7], линеаризуем систему уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) и (1.3). Обозначим решение стационарных уравнений через  $U = \text{col} (P, R, V, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2)$ , а возмущения через  $u = \text{col} (p, \rho, v, \omega_0, \omega_1, \omega_2)$  (так же, как и нестационарное решение, поскольку дальше оно не используется), получим следующую систему уравнений:

$$(1.4) \quad B^{ij} \frac{du_j}{dx} + (A^{ij} \lambda - G^{ij}) u_j = 0$$

Матрица  $B$  в уравнениях (1.4) получается из матрицы  $B$  уравнений (1.1) заменой элементов  $u$  на соответствующие элементы  $U$ , а матрица  $G$  может быть представлена в виде четырех блоков, размером  $3 \times 3$  каждый

$$G = \begin{vmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{vmatrix}, \quad G_1 = \begin{vmatrix} \gamma U_3^* & 0 & (U_3 \ln U_1)^\gamma \\ 0 & U_3^* & U_2^* \\ 0 & U_3 U_3' U_2' & U_3' \end{vmatrix}$$

$$G_3 = \begin{vmatrix} -J_p & -J_\rho & U_4^* \\ -(r_* J)_p & -(r_* J)_\rho & U_5^* \\ -(r_*^2 J)_p & -(r_*^2 J)_\rho & U_6^* \end{vmatrix}, \quad G_4 = \begin{vmatrix} U_3^* & 0 & 0 \\ -a & U_3^* & 0 \\ 0 & -2a & U_3^* \end{vmatrix}$$

Здесь  $U_n^* = U_n \{(\ln AU_n)'\}$ ,  $n = 3, 4, 5, 6$ . В блоке  $G_2$  отличны от нуля только три элемента  $G^{15} = (\gamma - 1)h$ ,  $G^{16} = (\gamma - 1)hE$ ,  $G^{26} = b$ . Нижними индексами  $p$  и  $\rho$  обозначены соответствующие частные производные.

Линеаризированные условия на скачке имеют вид

$$(1.5) \quad E^{ij} u_i^+ = DC^j + \xi H^j$$

Здесь  $E$  — матрица, состоящая также из четырех блоков

$$E = \begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ E_2 & E_3 \end{vmatrix}, \quad E_1 = \begin{vmatrix} 0 & U_3^+ & U_2^+ \\ 1 & (U_3^+)^2 & 2U_2^+ U_3^+ \\ \gamma & \gamma U_1^+ & U_3^+ \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)U_2^+} & -\frac{\gamma U_1^+}{(\gamma-1)(U_2^+)^2} & U_3^+ \end{vmatrix}$$

В блоке  $E_2$  отличен от нуля последний столбец, элементы которого равны  $U_4^+$ ,  $U_5^+$ ,  $U_6^+$ , а блок  $E_3 = \| U_3^+ \delta_{lk} \|$ ,  $l, k = 4, 5, 6$ .

Векторы  $C$  и  $H$  имеют вид

$$C = \text{col} ([U_2], 0, [U_3], [U_4], [U_5], [U_6])$$

$$H = \text{col} ([bU_6], U_2^+ U_3^+ [U_3] (\ln A)' + U_3^+ U_6^+ [b], [gU_6 + hU_5] [J], [aU_4 + Jr_*], [2aU_5 + Jr_*^2])$$

Здесь квадратными скобками обозначена разность величин за и перед ударной волной, т. е.  $[U_j] = U_j^+ - U_j^-$ ;  $T, S$  — температура и энтропия пара,  $g = bTS$ ,  $\xi$  — параметр, пропорциональный смещению ударной волны,  $D$  — величина, определяемая равенством  $\delta = D \exp \lambda t$ . При выводе соотношений (1.5) использованы уравнения стационарного течения спонтанно конденсирующегося пара, а также учитывалось, что скачок подвижен.

Линеаризованное условие в сечении  $x = x_b$  получим в виде

$$(1.6) \quad \Psi_{u_i} u_i = 0 \quad (x = x_b)$$

Решение системы (1.4) линейно зависит от шести постоянных, уравнения для которых получаются при подстановке найденного общего решения системы (1.4) в граничные условия (1.5) и (1.6), к которым необходимо добавить очевидное равенство

$$(1.7) \quad D = \xi \lambda$$

В ряде случаев для решения вопроса об устойчивости ударной волны достаточно определить из алгебраических уравнений (1.5) и (1.6) зависимость скорости ее смещения от  $\lambda$ , что позволяет по (1.7) определить и само  $\lambda$ .

2. Предположим, что граничное условие (1.3) выполняется настолько близко к скачку, что решение не успевает существенно измениться на таком расстоянии. Рассмотрим для простоты случай поддерживаемого постоянного давления на выходе. Тогда условие (1.6) примет вид

$$(2.1) \quad u_1^+ = 0 \quad (x = x_b)$$

В этом случае получим следующее выражение для  $\lambda$ :

$$(2.2) \quad \lambda = \sum_{i=1}^4 \frac{Y_i}{Y}, \quad Y_1 = [V](1 + (\gamma - 1)(M^+)^2)(\ln A)'$$

$$Y_2 = -[b] \Omega_2^+ / R^+, \quad Y_3 = -[\Omega_2] (2 + (\gamma - 1)(M^+)^2) b^- / R^+$$

$$Y_4 = (\gamma - 1) [g\Omega_2 + h\Omega_1] (M^+)^2 / V^+$$

$$Y = ((M^+)^2 + 2 / (\gamma - 1)) (1 - R^- / R^+) - (M^+)^2 \times$$

$$\times (1 - V^- / V^+), \quad M^2 = V^2 R / \gamma \Pi$$

Знаменатель этого выражения всегда положителен, поэтому знак  $\lambda$  зависит от знака числителя, первое слагаемое которого определяется геометрией канала, а остальные обусловлены фазовыми превращениями и теплообменом между фазами.

Первое слагаемое отрицательно в расширяющейся части канала и положительно в сужающейся. При отсутствии фазовых превращений и теплообмена это соответствует известному факту устойчивости скачка в расширяющейся части канала и неустойчивости в сужающейся при заданном давлении на выходе [1-5].

Второе слагаемое отрицательно, следовательно, способствует устойчивости скачка. Знаки остальных слагаемых определяются закономерностями фазовых превращений и теплообмена между фазами и в общем случае однозначно определены быть не могут.

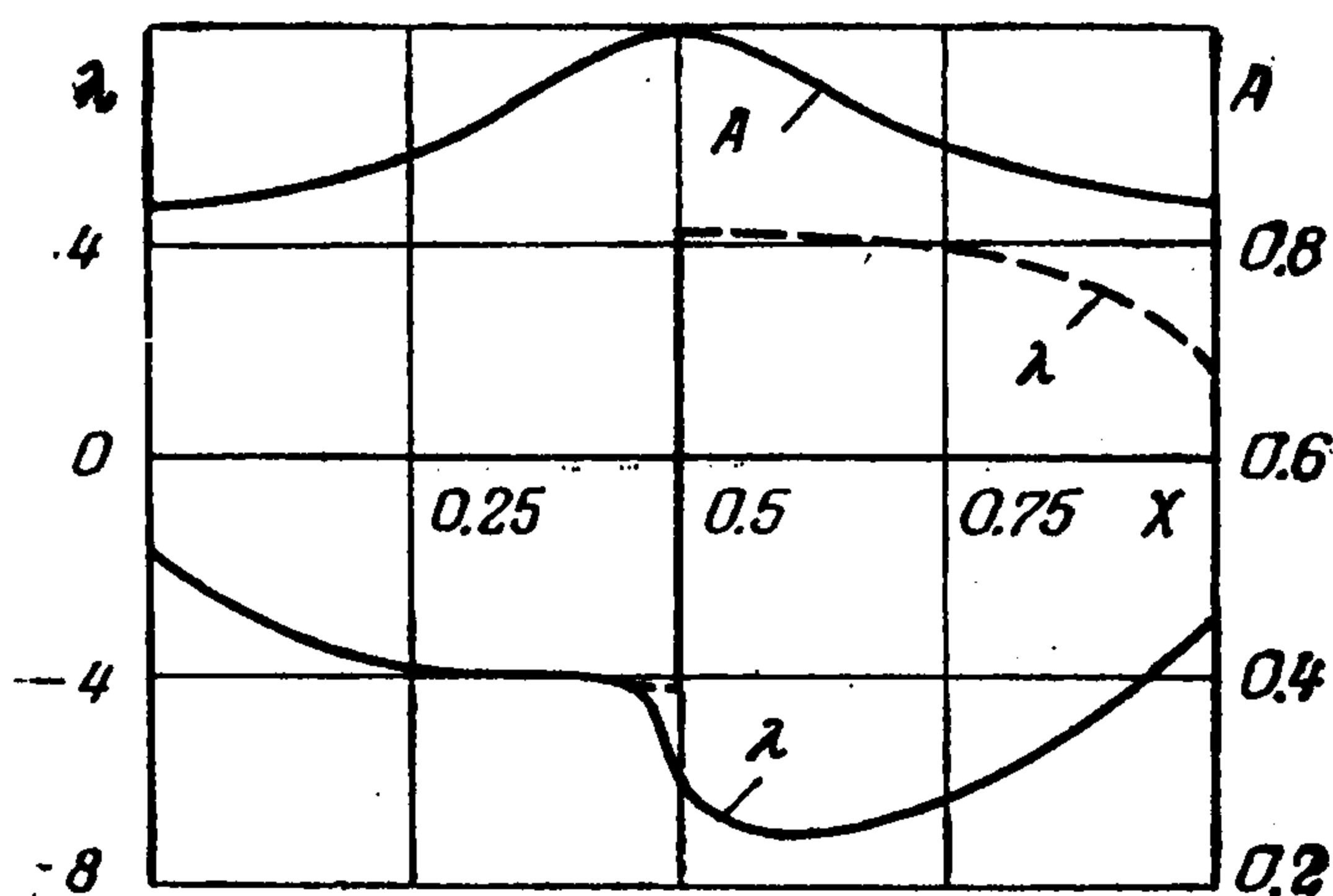
В качестве примера рассчитано стационарное течение водяного пара со спонтанной конденсацией, описываемое уравнениями (1.1) в предположении, что газ термически и калорически совершен, при следующих дополнительных соотношениях и значениях постоянных:  $b = 2\sqrt{2\pi\Pi R} (1 - \sqrt{T/(T + \Delta T)})$  — закон Кнудсена;  $h = 2\pi\lambda_*\Delta T$ , где  $\lambda_* = 53.8 \cdot 10^{-3} \text{ дж} / \text{м}^2 \text{ град сек}$  — коэффициент теплопроводности водяного пара [8];  $J = (\Pi / kT)^2 \rho_k^{-1} \times (2\sigma t / \pi)^{1/2} \exp[-2\pi r_*^2 \sigma / (3kT)]$ ,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ дж} / \text{град}$  — постоянная Больцмана,  $\rho_k = 779.6 \text{ кг/м}^3$ ,  $m \approx 3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$  — масса молекулы пара,  $\sigma = \sigma(\Pi)$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $r_* = 2\sigma(T + \Delta T) / (\zeta \rho_k \Delta T)$ , где  $\zeta = \zeta(\Pi)$  — теплота фазового превращения;  $\gamma = 1.3$  для водяного пара. Выражения для  $J$  и  $r_*$  заимствованы из [9], а функции  $\sigma(\Pi)$  и  $\zeta(\Pi)$  получены аппроксимацией данных, приведенных в [10]. Течение во входном сечении сверхзвуковое с числом Маха  $M(0) = 1.02$ .

На фиг. 1 представлены результаты с использованием формулы (2.2), описывающие поведения  $\Lambda = \text{sign } \lambda | \ln | \lambda ||$  по длине канала. Вверху на фиг. 1 изображена форма канала  $A(X)$  ( $X = x/l$ , где  $l$  — максимальная длина канала).

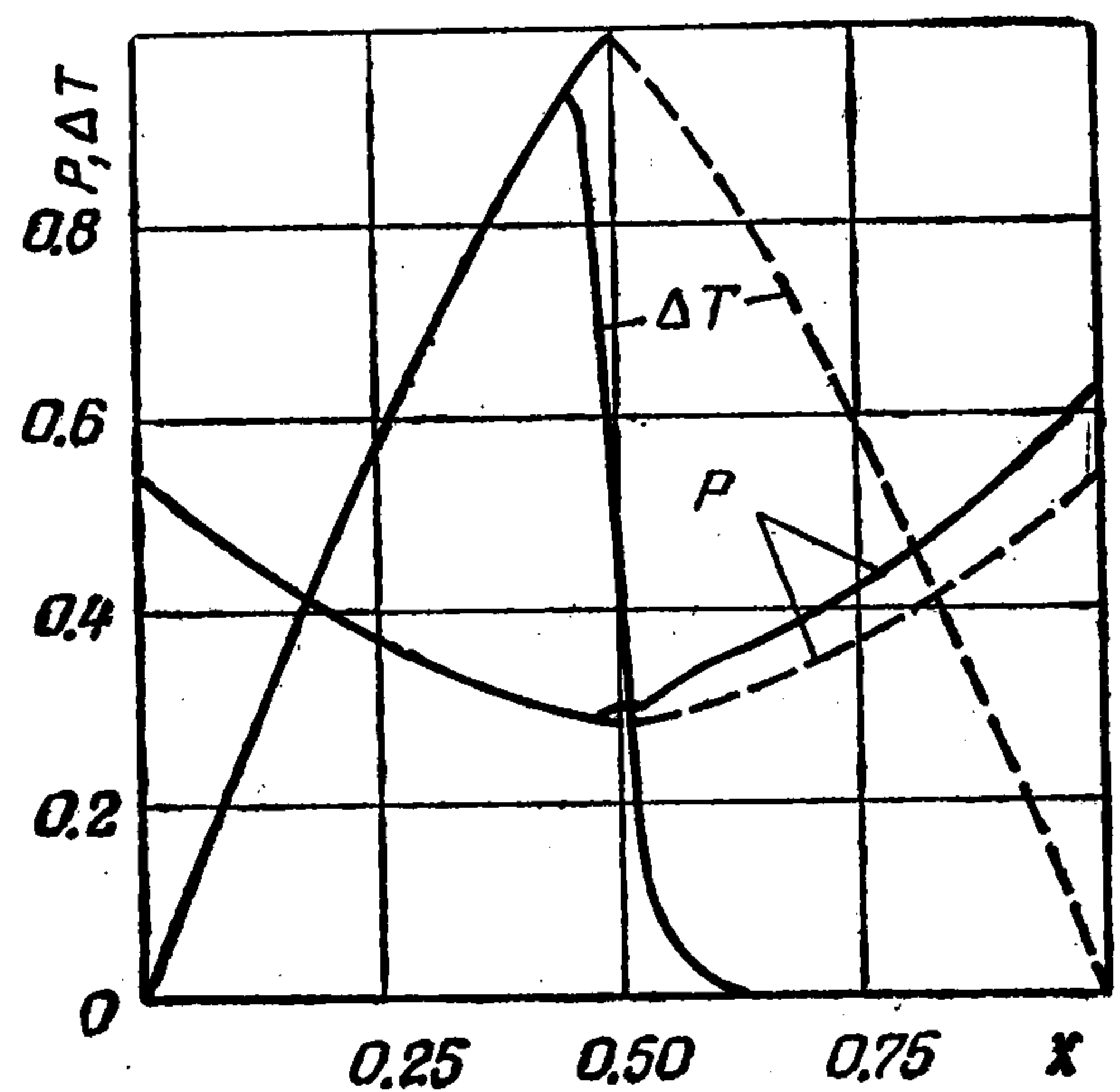
На фиг. 2 представлено поведение давления  $P$  (величина размерного давления отнесена к давлению торможения на входе в канал) и переохлаждения  $\Delta T$  (отнесенного к максимальному значению) при течении водяного пара в канале заданной формы  $A(X)$ . Для сравнения рассчитывались два случая: без фазовых превращений (результаты приведены на фиг. 1, 2 пунктирными линиями) и со спонтанной конденсацией (результаты даны сплошными линиями).

При отсутствии фазовых превращений, как и следовало ожидать,  $\lambda < 0$  в расширяющейся части и  $\lambda > 0$  в сужающейся части канала. Однако фазовые превращения и теплообмен между фазами, существенно изменяющие параметры течения в сужающейся части канала, как видно из фиг. 2, вносят изменения и в поведение  $\lambda$ , способствуя в данном случае устойчивости скачка. Как следует из расчетов, приведенных на фиг. 1,  $\lambda < 0$  всюду в потоке со спонтанной конденсацией (сплошная линия).

Стационарные течения со спонтанной конденсацией в каналах переменного сечения подробно исследованы в [6], поэтому детально поведение параметров такого течения здесь не рассматривается.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Представляет интерес случай, когда условие (1.3) выставляется в сечении, где происходит переход через скорость звука, обусловленный фазовыми превращениями [11]. Если особая точка расположена достаточно близко от скачка уплотнения, то решение системы (1.4) можно получить в явном виде.

Условие в сечении, где происходит переход через скорость звука, получим из требования регулярности решения системы (1.4) в особой точке.

Для этого приведем систему уравнений (1.4) к нормальному виду

$$(3.1) \quad u_i' = -(\lambda A^{mj} - G^{mj}) u_m B_{ji} / |B^{ij}|$$

Здесь  $B_{ji}$  — алгебраическое дополнение элемента  $B^{ij}$  в разложении определителя  $|B^{ij}| = V^2 \Pi (M^2 - 1) / R$ . Для существования непрерывного решения, проходящего через особую точку, необходимо обращение в нуль одновременно числителя и знаменателя уравнения (3.1), что дает

$$(3.2) \quad (\lambda A^{mj} - G^{mj}) u_m B_{ji} = 0, \quad M = 1 \quad (x = x_b)$$

Условие (3.2) можно считать справедливым при малых значениях  $\lambda$  [5].

Предположим сначала линейную зависимость параметров на участке  $\Delta x$  между ударной волной и особой точкой

$$(3.3) \quad u_i(x_b) = u_i^+ + (du_i / dx)^+ \Delta x$$

Согласно (3.1), имеем

$$(3.4) \quad u_i(x_b) = u_i^+ - (\lambda A^{mj} - G^{mj}) u_m^+ b_{ji}^+ \Delta x, \quad b_{ji}^+ = B_{ji}^+ / |B^{ij+}|$$

Тогда из (1.5), (3.4) и (3.2) получим уравнение для  $\lambda$  в виде

$$\begin{aligned} & \{\lambda^3 [A^{kj} A^{ms} C^n b_{sk}^+ e_{nm} \Delta x] + \lambda^2 [A^{kj} A^{ms} H^n b_{sk}^+ e_{nm} \Delta x + \\ & + (G^{kj} A^{ms} + A^{kj} G^{+ms}) C^n b_{sk}^+ e_{nm} - A^{kj} C^r e_{rk} - \\ & - \lambda [(G^{kj} C^r + A^{kj} H^r) e_{rk} + (G^{kj} G^{+ms} C^n + G^{kj} A^{ms} H^r + \\ & + A^{ks} G^{ms} H^n) b_{sk}^+ e_{nm} \Delta x] - \\ & - [G^{kj} H^r e_{rk} + G^{kj} G^{+ms} H^n b_{sk}^+ e_{nm} \Delta x]\} B_{ji} = 0 \quad (x = x_b) \\ & e_{ij} = E_{ij} / |E^{ji}| \end{aligned}$$

Здесь  $E_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $E^{ji}$  в разложении определителя  $|E^{ij}|$ .

Это кубическое уравнение относительно  $\lambda$  может иметь в зависимости от значения коэффициентов как действительные, так и комплексные корни. Комплексные корни с положительной действительной частью соответствуют неустойчивому режиму, отрицательная действительная часть этих корней свидетельствует о том, что затухание возмущений носит периодический характер; чисто мнимые значения  $\lambda$  указывают на возможный периодический характер режима течения [11].

Поступила 12 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Слободкина Ф. А. Об устойчивости скачка уплотнения в магнитогазодинамических течениях в каналах, ПМТФ, 1970, № 1.
3. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогазодинамических течений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
4. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тиллева Н. И. Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
5. Слободкина Ф. А. К устойчивости дозвуковых газодинамических течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
6. Циклаури Г. В., Данилин В. С., Селезнев Л. И. Адиабатные двухфазные течения. М., Атомиздат, 1973.
7. Брушлинский К. В. О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, т. 23, № 6.
8. Кутателадзе С. С., Боришанский В. М. Справочник по теплопередаче. М. «Энергия», 1970.
9. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1945.
10. Вукалович М. П. Термодинамические свойства воды и водяного пара. Москва—Берлин, Машгиз, 1958.
11. Баршдорф Д., Филиппов Г. А. Анализ некоторых особых режимов работы сопел Лаваля с местным подводом тепла. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 3.