

К ВОПРОСУ О КОНТИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ СУСПЕНЗИЙ

С. А. Регирер

(Москва)

Методами неравновесной термодинамики построена модель двухфазной среды (несжимаемой жидкости с частицами) с учетом микровращения и микродеформаций в каждой фазе и хаотического флуктуационного движения частиц, которое характеризуется эффективной температурой флуктуаций. Результирующие уравнения описывают эффекты усиления диффузии взвешенных частиц и примесей, содержащихся в жидкой фазе, вследствие флуктуаций. Зависимость коэффициентов переноса от флуктуационной температуры в предельном случае сводится к зависимости от интенсивности скоростей сдвига.

Принципиальные трудности в реализации микрореологического подхода к динамике концентрированных суспензий заставляют обращаться к общим методам механики сплошной среды [1-5]. Однако построение определяющих уравнений в рамках этих методов приводит к чрезмерной общности, как только отказываются от ограничений, налагаемых линейной неравновесной термодинамикой, а такой отказ кажется иногда необходимым для учета в модели реально существующих явлений.

Ниже показывается, что ряд важных нелинейных эффектов можно отразить в модели суспензии, не прибегая к существенно нелинейным модификациям в формализме описания необратимых явлений, за счет перехода к многоскоростному континууму и введения внутренних степеней свободы.

1. Рассмотрим смесь, представляющую собой несжимаемую ньютоновскую жидкость, несущую взвешенные частицы из несжимаемого материала, объемная концентрация которых, вообще говоря, не мала. Будем предполагать, что движение материальных объемов, содержащих большое число частиц, регулярно (движение смеси в целом ламинарно), однако движение каждой индивидуальной частицы подвержено случайным флуктуациям, влекущим за собой флуктуации скорости окружающей жидкости. В покоящейся смеси существуют только броуновские флуктуации; в неоднородном потоке флуктуации многократно усиливаются в результате взаимодействия («столкновений») частиц. Возникающая при этом псевдотурбулентность приводит к изменению свойств переноса, в частности к усилению диффузии взвешенных частиц и примесей, диспергированных в жидкой фазе.

Полная энергия фазы α (где $\alpha = 1$ — взвешенные частицы, $\alpha = 2$ — несущая жидкость) в расчете на единицу ее массы представляется формулой

$$(1.1) \quad E^\alpha = \frac{1}{2} u_i^\alpha u_i^\alpha + U^\alpha$$

Здесь u_i^α — среднемассовая скорость, U^α — внутренняя энергия фазы α ; в U^α включается энергия как теплового движения молекул, так и флуктуаций.

Каждая молекула участвует, очевидно, в этих двух хаотических движениях, причем естественно рассматривать тепловое движение на фоне флуктуаций. Если считать указанные движения статистически независимыми, то для ряда величин, в том числе для внутренней энергии, энтропии, потока тепла, тензора напряжений и т. д., можно ввести аддитивно составляющие, соответствующие тепловому и флуктуационному движению и обозначаемые ниже индексами T, F

$$U^\alpha = U_T^\alpha + U_F^\alpha, \quad S^\alpha = S_T^\alpha + S_F^\alpha, \quad q_i^\alpha = q_{Ti}^\alpha + q_{Fi}^\alpha, \quad \dots$$

Основное используемое далее предположение состоит в том, что между составляющими U^α и S^α имеется связь вида

$$(1.2) \quad \begin{aligned} U^1 &= U_T^1(S_T^1) + U_F^1(\rho^1, S_F^1) \\ U^2 &= U_T^2(S_T^2, c/C^2) + U_F^2(\rho^2, S_F^2) \end{aligned}$$

Здесь $\rho^\alpha = \rho C^\alpha$ — средние плотности фаз, C^α — массовые концентрации ($C^1 \equiv C, C^2 \equiv 1 - C$), c — массовая концентрация примеси в жидкой фазе (в расчете на единицу массы смеси), $\rho = \text{const}$ — плотность смеси. Истинные плотности фаз полагаются далее одинаковыми и равными ρ .

Для смеси в целом

$$(1.3) \quad E = \Sigma C^\alpha E^\alpha, \quad S = \Sigma C^\alpha S^\alpha, \quad u_i = \Sigma C^\alpha u_i^\alpha; \quad V_i^\alpha = u_i^\alpha - u_i$$

Символ Σ здесь и ниже означает суммирование по α (по фазам).

Тождества Гиббса, постулируемые в виде

$$(1.4) \quad \begin{aligned} dU_T^1 &= T_T^1 dS_T^1, \quad dU_T^2 = T_T^2 dS_T^2 + \mu d(c/C^2) \\ dU_F^\alpha &= T_F^\alpha dS_F^\alpha + p_F^\alpha (\rho^\alpha)^{-2} d\rho^\alpha \end{aligned}$$

вводят для каждой из фаз «тепловые» температуры T_T^α , «флуктуационные» температуры T_F^α , флуктуационные давления p_F^α , а также химический потенциал примеси μ . В общем случае $T_T^1 \neq T_T^2, T_F^1 \neq T_F^2$, однако этим различием будем ради простоты пренебрегать, полагая $T_T^\alpha = T_T, T_F^\alpha = T_F$.

В (1.2), (1.4) функции U_T^α введены по аналогии с заданием внутренней энергии для однородных несжимаемых сред, тогда как функции U_F^α сходны с внутренней энергией для сжимаемого газа [1].

В состоянии термодинамического равновесия $U^\alpha = U^\alpha(S^\alpha, \rho^\alpha, c)$, так что якобиан $D(U^\alpha, S^\alpha) / D(S_T^\alpha, S_F^\alpha)$ обращается в нуль и $T_F = T_T$ (существуют только броуновские флуктуации).

Заметим, что простейшее из возможных (см. ниже, п. 5) описание флуктуаций при помощи введения энергии U_F или эффективной температуры T_F предлагалось и ранее (см., например, [4,6,7]); однако полная схема рассуждений, свойственных неравновесной термодинамике, не была реализована с учетом этих величин.

На основе соотношений (1.2)—(1.4) и законов сохранения далее будет получено уравнение баланса энтропии, а из него — определяющие уравнения. Анализ последних ставит своей целью продемонстрировать некоторые полезные обобщения, получаемые в рамках традиционного феноменологического подхода, при большей детализации описания, когда одновременно учитываются двухфазность и флуктуации.

2. Кинематику смеси будем характеризовать среднemasсовыми скоростями фаз u_i^α и тензорами w_{ij}^α , симметричные части которых $w_{(ij)}^\alpha$ отражают скорости микродеформаций, а антисимметричные части $w_{[ij]}^\alpha$ — угловые скорости микровращений. Здесь и всюду далее используется декартова прямоугольная система координат.

Законы сохранения массы фаз, массы примеси, импульса и момента импульса имеют вид (∂_t, ∂_l — символы дифференцирования по t, x_l)

$$(2.1) \quad \partial_t \rho^\alpha + \partial_l (\rho^\alpha u_l^\alpha) = 0$$

$$(2.2) \quad \rho (\partial_t c + u_l \partial_l c) = - \partial_l j_l$$

$$(2.3) \quad \partial_t (\rho^\alpha u_k^\alpha) + \partial_l (\rho^\alpha u_l^\alpha u_k^\alpha) = - \partial_l p_{lk}^\alpha + R_k^\alpha + \rho^\alpha f_k^\alpha$$

$$(2.4) \quad \partial_t (\rho^\alpha l_{ik}^\alpha) + \partial_l (\rho^\alpha u_l^\alpha l_{ik}^\alpha) = - \partial_l G_{l[ik]}^\alpha + x_i (R_k^\alpha + \rho^\alpha f_k^\alpha) - \\ - x_k (R_i^\alpha + \rho^\alpha f_i^\alpha) + \rho^\alpha \Phi_{[ik]}^\alpha + M_{[ik]}^\alpha \quad (l_{ik}^\alpha = x_i u_k^\alpha - x_k u_i^\alpha)$$

Здесь j_l — диффузионный поток примеси, p_{lk}^α — парциальные тензоры напряжений, $f_k^\alpha, \Phi_{ik}^\alpha$ — внешние массовые силы и моменты, $R_k^\alpha, M_{ik}^\alpha$ — объемные силы и моменты межфазового взаимодействия.

Положив

$$G_{l[ik]}^\alpha = - 2\mu_{l[ik]}^\alpha + x_i p_{lk}^\alpha - x_k p_{li}^\alpha$$

получим из (2.3), (2.4)

$$- p_{[ik]}^\alpha + \partial_l \mu_{l[ik]}^\alpha + 1/2 (\rho^\alpha \Phi_{[ik]}^\alpha + M_{[ik]}^\alpha) = 0$$

или же

$$(2.5) \quad - p_{ik}^\alpha + \partial_l \mu_{lik}^\alpha + 1/2 (\rho^\alpha \Phi_{ik}^\alpha + M_{ik}^\alpha) = m_{ik}^\alpha$$

где m_{ik}^α — симметричные тензоры «микронапряжений».

Способ введения дополнительных кинематических переменных для каждой фазы и формулировка уравнения (2.5) аналогичны принятым в работе [2]. Ради простоты в формулу (1.1) для энергий E^α и в выражения для l_{ik}^α не включены «микроинерционные» члены, что не влияет ни на вид получаемых далее определяющих соотношений, ни на окончательные выводы.

Обсуждение вопроса об условиях, обеспечивающих законность этого упрощения, как и о круге задач, для которого необходима принимаемая детализация кинематики, выходит за рамки данной работы. Заметим, однако, что многие следствия учета флуктуаций сохраняются и при односкоростном описании смеси, и при отказе от введения переменных w_{ik}^α .

Уравнение сохранения полной энергии примем в виде

$$(2.6) \quad \partial_t \rho^\alpha E^\alpha = - \partial_l (\rho^\alpha u_l^\alpha E^\alpha + q_l^\alpha + u_k^\alpha p_{lk}^\alpha - w_{ik}^\alpha \mu_{lik}^\alpha) + \\ + u_k^\alpha (\rho^\alpha f_k^\alpha + R_k^\alpha) + 1/2 w_{ik}^\alpha (\rho^\alpha \Phi_{ik}^\alpha + M_{ik}^\alpha) + W^\alpha = 0$$

Здесь q_l^α — потоки тепла, W^α — межфазный поток энергии. Чтобы суммарные (для смеси) уравнения не содержали характеристик взаимо-

действия фаз, положим

$$(2.7) \quad \Sigma R_k^\alpha = 0, \quad \Sigma M_{ik}^\alpha = 0, \quad \Sigma (W^\alpha + 1/2 M_{ik}^\alpha w_{ik}^\alpha + R_k^\alpha u_k^\alpha) = 0$$

Обычным образом из (2.6) получаются уравнения притока тепла

$$\begin{aligned} \rho^\alpha (\partial_t + u_l^\alpha \partial_l) U^\alpha &= -\partial_l q_l^\alpha - p_{(lk)}^\alpha e_{lk}^\alpha - \\ &- p_{[lk]}^\alpha B_{lk}^\alpha + \kappa_{lk}^\alpha w_{lk}^\alpha + \mu_{lik}^\alpha \partial_l w_{ik}^\alpha + W^\alpha \\ e_{lk}^\alpha &= 1/2 (\partial_l u_k^\alpha + \partial_k u_l^\alpha), \quad \Omega_{lk}^\alpha = 1/2 (\partial_l u_k^\alpha - \partial_k u_l^\alpha) \\ B_{lk}^\alpha &= \Omega_{lk}^\alpha - w_{[lk]}^\alpha, \quad \kappa_{lk}^\alpha = p_{(lk)}^\alpha + m_{lk}^\alpha \end{aligned}$$

Учитывая замечание (п. 1) об аддитивности тепловых и флуктуационных составляющих, вместо этого уравнения можем записать

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \rho^\alpha (\partial_t + u_l^\alpha \partial_l) U_T^\alpha &= -\partial_l q_{Tl}^\alpha - p_{T(lk)}^\alpha e_{lk}^\alpha - p_{T[lk]}^\alpha B_{lk}^\alpha + \\ &+ \kappa_{Tlk}^\alpha w_{lk}^\alpha + \mu_{Tlik}^\alpha \partial_l w_{ik}^\alpha + W_T^\alpha + \theta^\alpha \\ \rho^\alpha (\partial_t + u_l^\alpha \partial_l) U_F^\alpha &= -\partial_l q_{Fl}^\alpha - p_{F(lk)}^\alpha e_{lk}^\alpha - \\ &- p_{F[lk]}^\alpha B_{lk}^\alpha + \kappa_{Flik}^\alpha w_{lk}^\alpha + \mu_{Flik}^\alpha \partial_l w_{ik}^\alpha + W_F^\alpha - \theta^\alpha \\ (q_l^\alpha &= q_{Tl}^\alpha + q_{Fl}^\alpha, \quad p_{lk}^\alpha = p_{Tlk}^\alpha + p_{Flik}^\alpha, \dots) \end{aligned}$$

Величина θ^α отражает обмен энергией между «степенями свободы» (т. е. тепловым и флуктуационным движениями) в фазе α .

3. Используя (1.2) — (1.4), (2.1), из (2.8) получаем уравнение баланса энтропии в форме

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \rho \partial_t S + \partial_l G_l &= R \\ G_l &= \Sigma (\rho^\alpha S^\alpha u_l^\alpha + q_{Tl}^\alpha T_T^{-1} + q_{Fl}^\alpha T_F^{-1}) - \mu j_l' \\ j_l' &= j_l - \rho c V_l^2 \quad (V_l^2 = u_l^2 - u_l) \end{aligned}$$

Диссипативная функция R (см. ниже формулы (3.4), (3.5)) представляет собой билинейную форму, образованную обобщенными термодинамическими потоками и силами. В качестве последних, в частности, входят величины e_{ij}^α , w_{ij}^α , которые связаны условиями несжимаемости смеси и отдельных фаз

$$(3.2) \quad e_{ii} = 0, \quad w_{ii}^\alpha = 0$$

Первое из этих соотношений с учетом (1.3) можно записать в виде

$$(3.3) \quad \Sigma C^\alpha e_{ii}^\alpha + (u_i^1 - u_i^2) \partial_i C = 0 \quad (C = C^1)$$

Соответственно трем условиям (3.2) выражения для термодинамических потоков должны быть определены с точностью до трех неопределенных скалярных параметров. Умножая последние два соотношения (3.2) и (3.3) соответственно на скаляры b^α и A и добавляя эти равные нулю произведения в R , после перегруппировки членов получим

$$(3.4) \quad R = \sum_{s=1}^{14} Y^s X^s$$

В качестве термодинамических сил X^s и потоков Y^s здесь фигурируют следующие величины:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} X^1 &= T_F - T_T, & Y^1 &= T_T^{-1} T_F^{-1} \theta \\ X_i^2 &= \partial_i T_T, & Y_i^2 &= -T_T^{-2} (q_{Ti} - \mu j_i') \\ X_i^3 &= \partial_i T_F, & Y_i^3 &= -T_F^{-2} q_{Fi} \\ X_i^4 &= \partial_i \mu, & Y_i^4 &= -T_T^{-1} j_i' \\ X_i^5 &= u_i^1 - u_i^2, & Y_i^5 &= -T_T^{-1} R_{Ti} - T_F^{-1} R_{Fi} + A \partial_i C \\ X_{ik}^6 &= e_{ik}^1, & Y_{ik}^6 &= -T_T^{-1} p_{T[ik]}^1 - T_F^{-1} (p_{F[ik]} - p_F^1 \delta_{ik}) + AC^1 \delta_{ik} \\ X_{ik}^8 &= B_{ik}^1, & Y_{ik}^8 &= -T_T^{-1} p_{T[ik]}^1 - T_F^{-1} p_{F[ik]}^1 \\ X_{ik}^{10} &= w_{ik}^1, & Y_{ik}^{10} &= T_T^{-1} \kappa_{Tik}^1 + T_F^{-1} \kappa_{Fik}^1 + b^1 \delta_{ik} \\ X_{ik}^{12} &= w_{ik}^1 - w_{ik}^2, & 2Y_{ik}^{12} &= -T_T^{-1} M_{Tik} - T_F^{-1} M_{Fik} \\ X_{lik}^{13} &= \partial_l w_{ik}^1, & Y_{lik}^{13} &= T_T^{-1} \mu_{Tlik}^1 + T_F^{-1} \mu_{Flik}^1 \\ (q_{Ti} &= q_{Ti}^1 + q_{Ti}^2, & \theta &= \theta^1 + \theta^2, \dots, \\ R_i &= R_i^1 = -R_i^2, & M_{ik} &= M_{ik}^1 = -M_{ik}^2) \end{aligned}$$

Тензоры $X^7, Y^7, X^9, Y^9, X^{11}, Y^{11}, X^{14}, Y^{14}$ получаются путем замены верхнего индекса 1 на 2 соответственно в выражениях для $X^6, Y^6, X^8, Y^8, X^{10}, Y^{10}, X^{13}, Y^{13}$.

Как обычно, будем предполагать существование линейной связи между потоками и силами

$$Y^r = \sum_s A^{r,s} X^s$$

Если компоненты тензоров $Y^r, X^s, A^{r,s}$ обозначить соответственно через $Y_{i\dots p}^r, X_{j\dots q}^s, A_{i\dots p, j\dots q}^{r,s}$, то в силу принципа симметрии Онзагера — Казимира $A_{j\dots q, i\dots p}^{s,r} = \pm A_{i\dots p, j\dots q}^{r,s}$. Знаки \pm соответствуют случаям одинаковой и различной четности сил X^s, X^r по микроскопическим скоростям.

Тензоры $A^{r,s}$ (до шестого ранга включительно) зависят от метрического тензора g и, возможно, от других величин, не входящих в число сил или потоков. К таким дополнительным аргументам относятся $C, c, d_k = \partial_k C, T_T, T_F$. Допустимо в один из тензоров вводить аргумент T_T , а в другие — T_F , но не оба параметра одновременно (это было бы равносильно включению в качестве аргумента наряду с параметром состояния T_T или T_F еще и разности $T_F - T_T$, являющейся термодинамической силой).

Общий вид тензоров, зависящих от указанного набора аргументов, устанавливается на основе теории тензорных функций [1].

Некоторые потоки в (3.5) имеют вид $Y^r = T_T^{-1} Y_{T^r} + T_F^{-1} Y_{F^r} + Y_0^r$, тогда как в конечном итоге нужно найти величину $y^r = Y_{T^r} + Y_{F^r}$. Положим

$$(3.6) \quad \begin{aligned} T_T^{-1} Y_{T^r} &= \sum_s A_T^{r,s} X^s - Z^r - Y_{0T}^r, & T_F^{-1} Y_{F^r} &= \sum_s A_F^{r,s} X^s + Z^r - Y_{0F}^r \\ A^{r,s} &= A_T^{r,s} + A_F^{r,s}, & Y_0^r &= Y_{0T}^r + Y_{0F}^r \end{aligned}$$

где $A_T^{r,s}, A_F^{r,s}$ зависят от тех же аргументов, что и $A^{r,s}$, а Z^r может зависеть

еще и от X^s (Z^r не дает вклада в диссипацию). Отсюда

$$(3.7) \quad y^r = \sum_s a^{r,s} X^s + Z^r (T_F - T_T) - y_0^r, \\ a^{r,s} = T_T A_T^{r,s} + T_F A_F^{r,s}, \quad y_0^r = T_T Y_{0T}^r + T_F Y_{0F}^r$$

Тензор $a^{r,s}$ сохраняет свойственную $A^{r,s}$ симметрию в том случае, если она соблюдена при разбиении $A^{r,s}$ на составляющие. Нетрудно видеть, что нарушающие симметрию части $A_T^{r,s}$, $A_F^{r,s}$ различаются только знаком и поэтому в y^r их можно считать включенными в Z^r .

4. Определяющие соотношения и окончательные уравнения движения в общем случае труднообозримы. Ограничимся поэтому далее лишь некоторыми их отличительными свойствами, причем будем считать смесь изотропной в том смысле, что тензоры $a^{r,s}$ не зависят от $\partial_k C$. Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрестных эффектов в определяющих соотношениях и полагать всюду тензоры Z^r равными нулю.

Согласно сказанному в конце п. 3, тензоры напряжений p_{lk}^α и силу взаимодействия R_k можно представить в виде

$$(4.1) \quad p_{(lk)}^1 = [p_F^1 + aC^1 - a_0^{6,6} e_{ii}^1 - a_0^{6,7} e_{ii}^2 - (T_F - T_T) a^{6,1}] \delta_{lk} - \\ - a^{6,6} e_{lk}^1 - a^{6,7} e_{lk}^2 - a^{6,10} w_{(lk)}^1 - a^{6,11} w_{(lk)}^2 \\ p_{(lk)}^2 = [p_F^2 + aC^2 - a_0^{7,6} e_{ii}^1 - a_0^{7,7} e_{ii}^2 - (T_F - T_T) a^{7,1}] \delta_{lk} - \\ - a_0^{7,6} e_{lk}^1 - a^{7,7} e_{lk}^2 - a^{7,10} w_{(lk)}^1 - a^{7,11} w_{(lk)}^2 \\ p_{[lk]}^1 = -a^{8,8} B_{lk}^1 - a^{8,9} B_{lk}^2, \quad p_{[lk]}^2 = -a^{9,8} B_{lk}^1 - a^{9,9} B_{lk}^2 \\ R_k = -a^{5,5} (u_k^1 - u_k^2) + a \partial_k C - a^{5,2} \partial_k T_T - a^{5,3} \partial_k T_F \\ (a = A_T T_T + A_F T_F, \quad A = A_T + A_F)$$

Проанализируем специальный случай, когда различие между скоростями u_k , u_k^1 , u_k^2 мало, и им можно пренебречь всюду, кроме выражения для R_k . Тогда уравнения импульсов для смеси и взвешенной фазы принимают соответственно вид ($d_t = d / dt$)

$$(4.2) \quad \rho d_t u_k = -\partial_k [p - a^1 (T_F - T_T)] + (\eta_1 + \eta_4) \partial_l \partial_l u_k + \\ + e_{lk} \partial_l \eta_1 + \Omega_{lk} \partial_l \eta_4 + \partial_l W_{lk} + \rho f_k$$

$$W_{lk} = a^{10} w_{(lk)}^1 + a^{11} w_{(lk)}^2 - \eta_4^1 w_{[lk]}^1 - \eta_4^2 w_{[lk]}^2$$

$$(4.3) \quad \rho C d_t u_k = -\partial_k [p^1 - a^{6,1} (T_F - T_T)] + (\eta_1^1 + \eta_4^1) \partial_l \partial_l u_k + \\ + e_{lk} \partial_l \eta_1^1 + \Omega_{lk} \partial_l \eta_4^1 + \partial_l W_{lk}^1 + \rho C f_k^1 + R_k$$

$$W_{lk}^1 = a^{6,10} w_{(lk)}^1 + a^{6,11} w_{(lk)}^2 - a^{8,8} w_{[lk]}^1 - a^{8,9} w_{[lk]}^2$$

Для реологических коэффициентов здесь приняты обозначения

$$\eta_1^1 = a^{6,6} + a^{6,7}, \quad \eta_1^2 = a^{7,6} + a^{7,7}, \quad \eta_1 = \eta_1^1 + \eta_1^2 \\ \eta_4^1 = a^{8,8} + a^{8,9}, \quad \eta_4^2 = a^{9,8} + a^{9,9}, \quad \eta_4 = \eta_4^1 + \eta_4^2 \\ a^1 = a^{6,1} + a^{7,1}, \quad a^{10} = a^{6,10} + a^{7,10}, \quad a^{11} = a^{6,11} + a^{7,11}$$

Давление p определено формулой

$$p = a + p_F^1 + p_F^2 \\ (p^1 = p_F^1 + aC^1 = pC^1 - p_F^2 C^1 + p_F^1 C^2)$$

Уравнение (4.3) служит для отыскания диффузионного потока взвешенных частиц

$$(4.4) \quad J_k \equiv \rho C (u_k^1 - u_k) = \rho C (1 - C) (u_k^1 - u_k^2)$$

а уравнение (4.2) позволяет исключить лапласиан $\partial_i \partial_i u_k$ из J_k . После несложных выкладок получаем

$$(4.5) \quad J_k = \alpha \rho C (1 - C) \{ (\lambda - C) \partial_k p - (1 - C) \partial_k p_{F^1} + C \partial_k p_{F^2} - \\ - a^{5,2} \partial_k T_T - a^{5,3} \partial_k T_F + \rho [(\lambda - C) d_t u_k - (\lambda f_k - C f_k^1)] - \\ - (T_F - T_T) (\lambda \partial_k a^1 - \partial_k a^{6,1}) - (\lambda a^1 - a^{6,1}) \partial_k (T_F - T_T) - \\ - e_{ik} (\lambda \partial_i \eta_1 - \partial_i \eta_1^1) - \Omega_{ik} (\lambda \partial_i \eta_4 - \partial_i \eta_4^1) - \\ - \lambda \partial_i W_{ik} + \partial_i W_{ik}^1 \}, \quad \alpha = (a^{5,5})^{-1}, \quad \lambda = (\eta_1^1 + \eta_4^1) (\eta_1 + \eta_4)^{-1}$$

Согласно (1.2), (1.4), p_{F^1} , p_{F^2} — функции C и T_F ; допустимо предположить, что реологические коэффициенты зависят от тех же величин и T_T . Тогда из (4.5) следует

$$(4.6) \quad J_k = \rho \{ k \partial_k p - D_{ik} \partial_i C - \zeta_{Tik} \partial_i T_T - \zeta_{Fik} \partial_i T_F \} - \\ - \beta^1 \partial_i w_{(ik)}^1 - \beta^2 \partial_i w_{(ik)}^2 - \gamma^1 \partial_i w_{[ik]}^1 - \gamma^2 \partial_i w_{[ik]}^2 + \\ + \chi [(\lambda - C) d_t u_k - (\lambda f_k - C f_k^1)]$$

Элементарные формулы, выражающие ζ_{Tik} , β^α , γ^α , χ через ранее введенные коэффициенты, представляют малый интерес и потому здесь опущены. Для D_{ik} , k , ζ_{Fik} верны равенства

$$(4.7) \quad D_{ik} = D \delta_{ik} + \alpha C (1 - C) \left\{ e_{ik} \left(\lambda \frac{\partial \eta_1}{\partial C} - \frac{\partial \eta_1^1}{\partial C} \right) + \right. \\ \left. + \Omega_{ik} \left(\lambda \frac{\partial \eta_4}{\partial C} - \frac{\partial \eta_4^1}{\partial C} \right) + \beta_*^1 w_{(ik)}^1 + \beta_*^2 w_{(ik)}^2 + \gamma_*^1 w_{[ik]}^1 + \gamma_*^2 w_{[ik]}^2 \right\}$$

$$D = \alpha C (1 - C) \left[(1 - C) \frac{\partial p_{F^1}}{\partial C} - C \frac{\partial p_{F^2}}{\partial C} + (T_F - T_T) \times \right. \\ \left. \times \left(\lambda \frac{\partial a^1}{\partial C} - \frac{\partial a^{6,1}}{\partial C} \right) \right]$$

$$(4.8) \quad k = \alpha C (1 - C) (\lambda - C)$$

$$(4.9) \quad \zeta_{Fik} = \zeta_F \delta_{ik} + \alpha C (1 - C) \left\{ e_{ik} \left(\lambda \frac{\partial \eta_1}{\partial T_F} - \frac{\partial \eta_1^1}{\partial T_F} \right) + \right. \\ \left. + \Omega_{ik} \left(\lambda \frac{\partial \eta_4}{\partial T_F} - \frac{\partial \eta_4^1}{\partial T_F} \right) + \beta_{**}^1 w_{(ik)}^1 + \dots \right\}$$

$$\zeta_F = \alpha C (1 - C) \left[(1 - C) \frac{\partial p_{F^1}}{\partial T_F} - C \frac{\partial p_{F^2}}{\partial T_F} + a^{5,3} + \right. \\ \left. + (\lambda a^1 - a^{6,1}) + (T_F - T_T) \left(\lambda \frac{\partial a^1}{\partial T_F} - \frac{\partial a^{6,1}}{\partial T_F} \right) \right]$$

Анализ формул (4.6) — (4.8) позволяет сделать следующие качественные выводы относительно характера диффузии взвешенных частиц.

1°. Имеет место флуктуационный механизм усиления броуновской диффузии. Если допустить, что флуктуирующие частицы ведут себя подобно газу, т. е. $p_{F^1} \sim C T_F$, и что $p_{F^1} + p_{F^2} \sim T_F$, то $D \sim D_b (T_F / T_T)$, где D_b — броуновский коэффициент диффузии при температуре T_T . Пользуясь соображениями размерности и полагая, например, $T_F \sim \eta^\circ e^{\eta^3}$, где

η°, e° — характерные значения вязкости и скорости деформации, l — размер взвешенной частицы, получим линейную связь D, p_F с e , что соответствует опытным данным [8-10].

2°. Имеют место аналоги явлений бародиффузии и термодиффузии с коэффициентами k, ζ_F .

3°. Диффузионный поток может вызываться градиентами скоростей микровращения и микродеформации в той мере, в какой эти скорости дают вклад в тензоры силовых напряжений.

4°. Зависимость коэффициентов переноса от концентрации частиц и интенсивности флуктуаций приводит к эффективной неизотропности диффузионного потока [11].

Для диффузионного потока примеси получается, в тех же предположениях, что и выше, формула

$$(4.10) \quad j_l = \rho c V_l^2 - T_T (a^{4,2} \partial_l T_T + a^{4,3} \partial_l T_F + a^{4,4} \partial_l \mu)$$

Замечая, что

$$V_l^2 = u_l^2 - u_l = -J_l / \rho (1 - C), \quad \mu = \mu(T_T, c / (1 - C))$$

найдем из (4.10)

$$j_l = -\frac{c}{1-C} J_l - T_T \left[\left(a^{4,2} + \frac{\partial \mu}{\partial T_T} \right) \partial_l T_T + a^{4,3} \partial_l T_F + a^{4,4} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \partial_l c + \frac{\partial \mu}{\partial C} \partial_l C \right) \right]$$

Обращаясь к (4.6), получим

$$(4.11) \quad j_l = -\rho D_s \partial_l c + \frac{\rho c}{1-C} (D_{kl} - D_s \delta_{kl}) \partial_k C + \\ + \left(\frac{\rho c}{1-C} \zeta_{Fkl} - T_T a^{4,3} \delta_{kl} \right) \partial_k T_F + \dots, \quad D_s = T_T a^{4,4} \frac{\partial \mu}{\partial c}$$

Таким образом, присутствие крупных частиц может существенно влиять на диффузию примеси. Во-первых, эффективный коэффициент диффузии зависит от T_F и C (например, $D_s \rightarrow 0$ при $C \rightarrow 1$, если частицы непроницаемы для примеси); во-вторых, имеет место перенос примеси вместе с несущей жидкостью в направлении, обратном диффузионному потоку взвешенных частиц J_l ; в-третьих, возможно прямое (при $J_l = 0$) влияние флуктуаций на перенос примеси благодаря градиенту T_F (см., например, [12-17]).

Заметим, что связь J_k, j_k с $\partial_k C, \partial_k c$, которая дается формулами (4.6), (4.11), не удовлетворяет условиям симметрии, т. е. не приводится к виду

$$(4.12) \quad J_k = a_{11} \partial_k C + a_{12} \partial_k c + \dots, \quad j_k = a_{21} \partial_k C + a_{22} \partial_k c + \dots$$

где a_{12} и a_{21} связаны между собой. Более того, наличие примеси вообще не сказывается (если коэффициенты переноса не зависят от c) на потоке J_k , что соответствует физической картине. Эти два следствия не могли бы быть получены из представлений о смеси как однофазной жидкости, так как в этом случае градиенты $\partial_k C$ и $\partial_k c$ являлись бы термодинамическими силами, J_k, j_k — сопряженными с ними потоками. В рассматриваемой же модели $\partial_k C$ играет роль параметра состояния.

Обратимся далее к формуле, определяющей обмен энергией между степенями свободы

$$\Theta = T_T T_F [a^{1,1}(T_F - T_T) + a^{1,6}e_{ii}^1 + a^{1,7}e_{ii}^2] \approx \\ \approx T_T T_F a^{1,1}(T_F - T_T)$$

Просуммируем вторые уравнения (2.8) по α при тех же, что и выше, предположениях относительно скоростей; тогда

$$(4.13) \quad \rho d_t U_F = -\partial_l q_{Fl} + \Phi_F - \Theta$$

Здесь Φ_F — порождение флуктуационной энергии за счет диссипативных процессов: $\Phi_F = -p_{F(lk)}e_{lk} - p_{F[lk]}B_{lk} + \dots$

В общем случае уравнение (4.13) служит для определения T_F . Особый интерес представляет частный случай уравнения (4.13), описывающий квазистационарный режим, когда $\Phi_F \approx \Theta$. Это соотношение дает возможность непосредственно связать T_F с инвариантами тензоров, описывающих кинематику среды.

Например, если в Φ_F пренебрегается вкладом от микровращений и микродеформаций, то $T_T T_F (T_F - T_T) a^{11} = \eta_F e_{lk} e_{lk}$. Отсюда T_F определяется как функция T_T , C и $I_2 = e_{lk} e_{lk}$. Поскольку коэффициенты переноса могут зависеть от T_F , то результирующие уравнения будут фактически описывать вязкую среду с нелинейными свойствами, обусловленными наличием флуктуаций.

Диффузионные потоки в такой среде, и в частности миграция взвешенных частиц поперек направления основного движения, могут вызываться неоднородностью скоростей сдвига, поскольку J_k , j_k зависят от $\partial_k T_F$.

5. Приведенные выше рассуждения допускают ряд обобщений, не требующих повторения основных выкладок и не изменяющих основные качественные свойства модели. Так, учет собственного момента импульса частиц сводится к включению в энергию E^α и в уравнения (2.5) дополнительных слагаемых, вид которых заранее известен [2]. Видно также, что опущенные перекрестные эффекты, в частности зависимости R_k от градиентов w_{ij}^α , μ и j_k от $u_k^1 - u_k^2$, не изменяют общей структуры формул (4.6), (4.11) и не внесут симметрии в (4.12).

Возможны различные модификации определяющих уравнений за счет нелинейных членов, не дающих вклада в диссипацию [1] (некоторые из них уже фигурировали в (3.6), (3.7)). Например, для силы трения вместо (4.1) допустимо положить

$$R_k = -a^{5,5}(u_k^1 - u_k^2) + \dots + N_{[ik]}(u_i^1 - u_i^2)$$

где $N_{[ik]}$ — произвольный антисимметричный тензор.

Наиболее жестким предположением для развитого подхода является подсказанное работой [6] введение «поступательной» флуктуационной температуры как единственной по существу характеристики интенсивности флуктуаций. На самом деле могут иметь место флуктуации вращения и деформаций частиц, характеризующиеся своими эффективными температурами, а также анизотропия флуктуаций. Эти факторы, как и влияние специальных свойств смеси (сжимаемость фаз, упругость частиц, ориентация частиц в потоке, изменение объема частиц), могут быть учтены в феноменологическом подходе при надлежащем изменении формул для внутренней энергии. ¹

¹ Именно так была получена модель суспензии, учитывающая процессы агрегации частиц. См.: Шадрин Н. Х. Агрегация эритроцитов и реологические свойства крови. В кн.: IV Всес. съезд по теор. и прикл. механике. Аннот. докл. Киев, «Наукова думка», 1976.

Очевидно, что более простые модели с учетом флуктуаций получатся, если с самого начала исключить из рассмотрения дополнительные кинематические переменные или же не анализировать движение фаз по отдельности. В последнем случае, однако, закон диффузии взвешенных частиц заведомо не будет описывать эффект бародиффузии в несжимаемой среде. Соответствующие этим упрощениям уравнения можно выписать на основе результатов п. 1—4.

Автор признателен В. Л. Бердичевскому, С. С. Григоряну, А. Г. Куликовскому, Г. А. Любимову и Н. Х. Шадринной за обсуждение затрагиваемых в статье вопросов.

Поступила 29 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
2. Eringen A. C. Simple microfluids. Internat. J. Engng Sci., 1964, vol. 2, No. 2, p. 205—217.
3. Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
4. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
5. Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами тепло- и массопереноса. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
6. Мясников В. П. О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
7. Буевич Ю. А. К статистической механике частиц, взвешенных в потоке газа. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
8. Bernstein E. F., Blackshear P. L., Keller K. H. Factors influencing erythrocyte destruction in artificial organs. Amer. J. Surgery, 1967, vol. 114, No. 1, p. 126—138.
9. Goldsmith H. L. The microrheology of human erythrocyte suspensions. В кн.: Theor. and Appl. Mech., Berlin, Springer, 1973. (Рус. перев.: В сб.: Механика, 1973, № 6.)
10. Bagnold R. A. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. Proc. Roy. Soc., 1954, vol. A225, No. 1160, p. 49—63.
11. Буевич Ю. А., Марков В. Г. Псевдотурбулентная диффузия частиц в однородных суспензиях. ПМТФ, 1970, № 1.
12. Petschek H. E., Weiss R. F. Hydrodynamic problems in blood coagulation. AIAA Paper No. 143.
13. Keller K. H. Effect of fluid shear on mass transport in flowing blood. Federat. Proc., 1971, vol. 30, No. 5, p. 1591—1599.
14. Colton C. K., Smith K. A., Merrill E. R., Friedman S. Diffusion of urea in flowing blood. AIChE Journal, 1971, vol. 17, No. 4, p. 800—808.
15. Grabowski E. F., Friedman L. I., Leonard E. F. Effects of shear rate on the diffusion and adhesion of blood platelets to a foreign surface. Ind. Eng. and Chem. Fundam., 1972, vol. 11, No. 2, p. 224—232.
16. Turitto V. T., Benis A. M., Leonard E. F. Platelet diffusion in flowing blood. Ind. Eng. and Chem. Fundam., 1972, vol. 11, No. 2, p. 216—223.
17. Hyman W. A. Augmented diffusion in flowing blood. Trans. ASME, Ser. B. J. Engng for Industry, 1975, vol. 97, No. 1, p. 58—60. |