Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 532.529

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА В СУСПЕНЗИЯХ С ВНУТРЕННИМИ ВРАЩЕНИЯМИ

А. О. Цебер

(Рига)

Указывается, что представление о внутренних вращениях в ферросуспензиях позволяет объяснить ряд гидродинамических явлений в магнитных жидкостях при наличии вращающихся магнитных полей и предсказать некоторые качественные особенности массопереноса и электропроводности суспензий с вращающимися частицами. Показано, что конвективный массоперенос вблизи вращающихся частиц приводит к относительному увеличению эффективного коэффициента диффузии в суспензии, пропорциональному квадрату числа Пекле, определенному по параметрам частиц. Отмечается возможность появления в суспензиях когерентно вращающихся частиц эффекта, аналогичного эффекту Риги — Ледюка теплопроводности в магнитном поле. Роль конвективного переноса в суспензиях когерентно вращающихся частиц иллюстрируется также рассмотрением электропроводности суспензии сферических частиц в слабо проводящей диэлектрической среде.

Гидродинамические явления в намагничивающихся и поляризующихся средах при наличии вращающихся полей и обусловленных ими внутренних вращениях изучались в работах [1–9]. В [1–4] показано, что вращения частиц во вращающемся поле, обусловленные конечностью времени релаксации намагниченности или поляризации, создают макроскопическое движение среды лишь при наличии моментных напряжений, вызываемых диффузией внутреннего углового момента. Экспериментально в [5] в отличие от [6] показано, что макроскопическое движение среды с вращающимися частицами возникает лишь при наличии пространственных неоднородностей. Движения намагничивающихся суспензий во вращающемся магнитном поле при наличии подвижных границ изучались теоретически [7,8] и экспериментально [5,9]. В работе [10] проводились оценки роли вращений частиц в увеличении эффективного коэффициента диффузии при движении крови.

1. В суспензиях с вращающимися частицами возможно значительное увеличение эффективных коэффициентов тепло- и массопереноса. Далее проводится расчет эффективного коэффициента диффузии в суспензии сферических частиц радиуса a, когерентно вращающихся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. При этом, в отличие от [10] конвективный перенос рассматривается с учетом пространственного распределения скорости вблизи вращающихся частиц. Поверхность частиц предполагается непроницаемой для диффундирующего вещества. Эффективный коэффициент диффузии находится в результате осреднения по ячейкам.

Пусть вдали от частицы реализуется распределение концентрации $c = c_0 + G_x x' + G_y y' + G_z z'$, уравнение конвективного массопереноса имеет вид

$$(1.1)\qquad (\mathbf{v}\nabla) c = D \triangle c, \quad \mathbf{v} = a^3 [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'] r'^{-3}$$

Решение уравнения (1.1) при краевых условиях

$$\left.\frac{\partial c}{\partial r'}\right|_{r'=a} = 0, \quad c\,|_{r'\to\infty} = c_0 + G_i x_i'$$

находится в виде

$$c = c_0 + R_1 \cos\vartheta G_z + \operatorname{Re}(R \sin\vartheta\, e^{i\varphi})\, G_x + \operatorname{Im}(R\sin\vartheta e^{i\varphi})\, G_y$$

Здесь ϑ, φ — углы сферической системы координат с полярной осью вдоль z'. Для функций R и R_1 после разделения переменных получаются уравнения (безразмерное расстояние от центра частицы $r = r'a^{-1}$, P — число Пекле)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \left(\frac{2}{r^2} + \frac{iP}{r^3}\right)R = 0, \quad P = \frac{a^2\omega}{D} \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_1}{dr}\right) - \frac{2R_1}{r^2} = 0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.2) путем введения новых переменных u, t согласно соотношениям $R = r^{-1/2}u$, $t = r^{-1/2}$ сводится к уравнению для модифицированных функций Бесселя

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{du}{dt} - \left(\frac{9}{t^2} + 4iP\right)u = 0$$

В результате решение уравнения (1.2) имеет вид

$$R = r^{-1/2}\,[A_1 I_3(\lambda r^{-1/2}) + A_2 K_3(\lambda r^{-1/2})], \quad \lambda = 2\sqrt{iP} \tag{1.4}$$

Здесь I_3, K_3 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, постоянные A_1, A_2 определяются краевыми условиями

$$A_1 = -A_2\frac{K_3(\lambda) + \lambda K_3'(\lambda)}{I_3(\lambda) + \lambda I_3'(\lambda)}, \quad A_2 = a(\lambda/2)^3$$

Соответствующее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$R_1 = a\,(r + {}^1/_2 r^{-2}) \tag{1.5}$$

В результате осреднения найденных решений получаются соотношения для осредненных величин, определяющих поведение суспензии в макроскопическом масштабе. В качестве объема осреднения выбирается сфера радиуса l, где $2l$ — среднее расстояние между частицами суспензии. Для среднего градиента концентрации по ячейке

$$\langle\nabla c\rangle = V^{-1}\int \nabla c\,dV = V^{-1}\oint c\mathbf{n}\,dS$$

пользуясь (1.4) и (1.5), с точностью до членов второго порядка малости по $P\varphi^{1/3}$ при $P \gg 1$, получаем $((al^{-1})^3 = \varphi$, φ — объемная доля частиц суспензии)

$$\langle\nabla c\rangle_{x,y} \approx G_{x,y}(1 - {}^1/_2 P^2\varphi^{2/3}) \mp G_{y,x}P\varphi^{1/3} \tag{1.6}$$

$$\langle\nabla c\rangle_z = G_z(1 + {}^1/_2\varphi)$$

При больших $P\varphi^{1/3}$ существенно взаимное влияние частиц, и снос граничных условий на бесконечность становится невозможным. Осреднение полного потока массы $\mathbf{J} = -D\nabla c + \mathbf{v}c$ осуществляется согласно соотношению

$$\langle J_k\rangle = V^{-1}\int J_k dV = V^{-1}\int \frac{\partial}{\partial x_i}(x_k J_i)\, dV$$

При учете соотношений (1.4), (1.5) и того, что на поверхности ячейки $J_n = -Da^{-1}\partial c/\partial r$, для осредненного потока $\mathbf{J}$ получаем

$$\langle J_{x,y}\rangle = -DG_{x,y}\,(1 + {}^1/_2 P^2\varphi^{2/3}) \tag{1.7}$$
$$\langle J_z\rangle = -DG_z\,(1 - \varphi)$$

При $\langle\nabla c\rangle_x = 0$ с учетом (1.6), (1.7) получаем

$$\langle J_x\rangle = -D\cdot{}^1/_2 P\varphi^{1/3}\,\langle\nabla c\rangle_y \tag{1.8}$$
$$\langle J_y\rangle = -D\,(1 + {}^3/_4 P^2\varphi^{2/3})\langle\nabla c\rangle_y$$
$$\langle J_z\rangle = -D\,(1 - {}^3/_2\,\varphi)\langle\nabla c\rangle_z$$

Как показывают соотношения (1.8), в суспензии когерентно вращающихся частиц имеет место эффект, аналогичный эффекту Риги — Ледюка теплопроводности в магнитном поле, который заключается в появлении потока в направлении, перпендикулярном направлениям макроскопического градиента концентрации и угловой скорости вращения частиц. Полученная форма зависимости эффективного коэффициента диффузии во втором соотношении (1.8) соответствует формуле, приведенной в [10]. В направлении оси вращения частиц, как это следует из третьего соотношения (1.8), эффективный коэффициент диффузии соответствует известному выражению для коэффициента диффузии в суспензии непроницаемых частиц [1].

Как известно, явление переноса в гетерогенной системе определяется потоком, осредненным по поверхности [11]. В данном случае

$$\int_\Sigma J_n dS = \Sigma n_k \langle J_k\rangle$$

где Σ — произвольное сечение сферической ячейки плоскостью, $\mathbf{n}$ — нормаль к данному сечению, $\langle\mathbf{J}\rangle$ — объемно осредненный согласно указанной выше процедуре поток.

2. Отмеченные особенности явлений переноса в суспензиях вращающихся частиц могут иметь место и в отношении переноса электрического заряда. Пусть имеется суспензия сферических частиц радиуса a в среде с диэлектрической проницаемостью и проводимостью ε_1, γ_1. Диэлектрическая проницаемость и проводимость твердой фазы — ε_2, γ_2. Рассмотрим эффективный коэффициент электропроводности данной суспензии, если частицы вращаются с угловой скоростью ω, а электрическое число Рейнольдса, представляющее отношение конвективного и кондуктивного переноса электрического заряда [12], достаточно велико.

Потенциал электрического поля вблизи отдельной частицы, когда на бесконечном удалении от частицы реализуется однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, определяется из уравнения Лапласа при граничных условиях

[1] *Марценюк М. А.* Теплопроводность суспензии эллипсоидальных ферромагнитных частиц в магнитном поле. 8-е Рижск. совещание по магнитной гидродинамике, Тезисы докладов, т. 1. Рига, «Зинатне», 1975.

на поверхности частицы [12] и на бесконечности

$$D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\sigma, \quad \psi_1 = \psi_2, \quad \psi|_{r\to\infty} = -(\mathbf{E}_0\mathbf{r}) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\psi, \quad \mathbf{i} = \gamma\mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]$$

$$-(R\sin\vartheta)^{-1}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(j_\vartheta\sin\vartheta) - (R\sin\vartheta)^{-1}\frac{\partial j_\varphi}{\partial\varphi} = i_n^{(1)} - i_n^{(2)}$$

$$(\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0), \quad \mathbf{E}_0 = (0, E_y, E_z))$$

Решение задачи имеет вид

$$\psi_1 = -(\mathbf{E}_0\mathbf{r}) + Aa^3(\mathbf{E}_0\mathbf{r})r^{-3} + Ba^3\mathbf{E}_0[\mathbf{e}_x\times\mathbf{r}]r^{-3}, \quad r \geqslant a \tag{2.2}$$

$$\psi_2 = C(\mathbf{E}_0\mathbf{r}) + B\mathbf{E}_0[\mathbf{e}_x\times\mathbf{r}], \quad \mathbf{r} \leqslant a$$

$$A = \frac{\gamma_2^\circ - \gamma_1^\circ + (\varepsilon_2^\circ - \varepsilon_1^\circ)(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2}$$

$$B = 3\frac{(\gamma_1^0\varepsilon_2^0 - \gamma_2^0\varepsilon_1^0)\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}, \quad C = -3\frac{\gamma_1^\circ + \varepsilon_1^\circ(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2}$$

$$\tau = \frac{1}{4\pi}\frac{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\gamma_1+\gamma_2}$$

$$\varepsilon_k^\circ = \frac{\varepsilon_k}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}, \quad \gamma_k^\circ = \frac{\gamma_k}{2\gamma_1+\gamma_2}, \quad k = 1, 2$$

Здесь τ — время релаксации заряда, $\omega\tau$ имеет смысл электрического числа Рейнольдса [12].

Эффективный коэффициент электропроводности суспензии находится в результате осреднения кондуктивного тока по объему, содержащему много частиц, и конвективного тока $\sigma\mathbf{v}$ по поверхности сферических включений, содержащихся внутри данного объема. Полный осредненный ток в суспензии при учете обоих механизмов переноса электрического заряда может быть записан в виде

$$\langle\mathbf{I}\rangle_k = -\gamma_1\langle\nabla\psi\rangle_k + V^{-1}\gamma_1\int\limits_{\Sigma S_i}\psi n_k dS + V^{-1}\int\limits_{\Sigma S_i} x_k i_n^{(1)} dS \tag{2.3}$$

$$\left(\langle\mathbf{I}\rangle = V^{-1}\int\mathbf{i}dV + V^{-1}\int\limits_{\Sigma S_i}\mathbf{j}dS, \quad \langle\nabla\psi\rangle = V^{-1}\int\nabla\psi dV\right)$$

Здесь $\langle\nabla\psi\rangle$ — объемно-осредненный градиент электрического потенциала. В предположении равенства поверхностных и объемных средних в гетерогенной системе он может быть вычислен осреднением по плоскости с характерным размером, гораздо большим среднего расстояния между частицами. В случае разбавленной системы, когда возмущения поля частицами можно считать аддитивными, при учете (2.2) получаем ($\mathbf{n}$ — нормаль к плоскости осреднения).

$$\int\nabla\psi\mathbf{n}dS = -E_{0z}(S-\Sigma) + E_{0z}\Sigma(2A+C) - 3BE_{0y}\Sigma$$

$$\Sigma = \sum_i \pi(a^2 - z_i^2), \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

Здесь z_i — расстояние центра частицы до плоскости, суммирование осуществляется по совокупности частиц, центры которых находятся на расстоянии $|z_i| \leqslant a$ от плоскости осреднения. С учетом соотношений (2.2) и того, что при равномерном распределении частиц $\Sigma = S\varphi$, последнее равенство дает

(2.4) $\int \nabla\psi \mathbf{n} dS = -E_{0z} S - 3S\varphi BE_{0y} + 3S\varphi AE_{0z}, \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1)$

Аналогичным образом

(2.5) $\int \nabla\psi \mathbf{n} dS = -E_{0y}S + 3\varphi SAE_{0y} + 3\varphi SBE_{0z}$

$\mathbf{n} = (0, 1, 0)$

(2.6) $\int \nabla\psi \mathbf{n} dS = 0, \quad \mathbf{n} = (1, 0, 0)$

Для электрического тока, осредненного по площадке с площадью S и нормалью $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$

$$S\langle I_z\rangle = \int i_n dS + \oint\limits_{\Sigma l_i} \sigma v_n dl$$

(во втором члене суммирование производится по совокупности контуров, образуемых пересечением плоскостью сферических частиц), в предположении аддитивности возмущений электрического потенциала, вносимого отдельными частицами, получаем

$$S\langle I_z\rangle = \gamma_1 E_{0z}(S - \Sigma) - (\gamma_1 A + \gamma_2 C - \omega\tau(2\gamma_1 + \gamma_2)B) \times$$
$$\times\ \Sigma E_{0z} + (2\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \omega\tau(A + (\varepsilon_1^\circ - \varepsilon_2^\circ)))E_{0y}\Sigma$$

Последнее выражение дает $S\langle I_z\rangle = \gamma_1 SE_{0z}$.

Аналогично при осреднении по площадке с нормалью $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ получаем $S\langle I_y\rangle = \gamma_1 SE_{0y}$. Пользуясь соотношениями (2.4), (2.5), в предположении равенства объемных средних градиента поверхностным при $\langle\nabla\psi\rangle_y = 0$, с точностью до членов первого порядка по объемной доле частиц получаем

$$E_{0y} = -\langle\nabla\psi\rangle_z 3\varphi B, \quad E_{0z} = -\langle\nabla\psi\rangle_z (1 + 3\varphi A)$$

соответственно для компонент поверхностно-осредненного тока

$$\langle I_z\rangle = -\gamma_1\langle\nabla\psi\rangle_z (1 + 3\varphi A), \quad \langle I_y\rangle = -\gamma_1 \langle\nabla\psi\rangle_z 3\varphi B$$

что, как нетрудно показать, совпадает с результатом объемного осреднения согласно формуле (2.3). Ток, осредненный по произвольно ориентированной площадке с нормалью $\mathbf{n}$ вследствие уравнения $\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$ в твердой и жидкой фазах и краевого условия (2.1), вычисляется согласно соотношению

$$S\langle I_n\rangle = \int i_n dS + \int\limits_{\Sigma l_i} j_n dl = n_y\langle I_y\rangle + n_z\langle I_z\rangle$$

Как следует из полученных законов электропроводности суспензий вращающихся частиц, для эффективного коэффициента электропроводности суспензии справедливо соотношение

$$\gamma_e = \gamma_1 (1 + 3\varphi A)$$

Кроме того, перенос электрического заряда в подобных средах связан с появлением эффекта, аналогичного эффекту Риги — Ледюка, т. е. с наличием электрического тока, поперечного макроскопическому электрическому полю, и угловой скорости вращающихся частиц.

Поступила 7 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Condiff D. W., Dahler J. S.* Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 6.
2. *Зайцев В. М., Шлиомис М. И.* Увлечение ферромагнитной суспензии вращающимся полем. ПМТФ, 1969, № 5.
3. *Суязов В. М.* Движение намагничиваемой жидкости под действием вращающегося магнитного поля. ПМТФ, 1970, № 4.
4. *Суязов В. М.* Движение ферросуспензии во вращающихся однородных магнитных полях. Магнитная гидродинамика, 1976, № 4.
5. *Mailfert R., Martinet A.* Flow regimes for a magnetic suspension under a rotating magnetic field. J. Phys., 1973, vol. 34, No. 2—3.
6. *Moskowitz R., Rosensweig R. E.* Nonmechanical torgue-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field. Appl. Phys. Letters, 1967, vol. 11, No. 10.
7. *Цебер А. О.* Межфазные напряжения в гидродинамике жидкостей с внутренними вращениями. Магнитная гидродинамика, 1975, № 1.
8. *Вислович А. Н.* О воздействии вращающегося поля на ферромагнитную суспензию в слое со свободной границей. Письма в ЖТФ, 1975, т. 1, вып. 16.
9. *Каган И. Я., Рыков В. Г., Янтовский Е. И.* О течении диэлектрической ферромагнитной суспензии во вращающемся магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1973, № 2.
10. *Hyman W. A.* Augmented diffusion in flowing blood. Trans. ASME. Ser. B. J. Engng Industry, vol. 97, No. 1. (Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж-механ. Конструирование и технология машиностроения. Сер. В, 1975, т. 97, № 1.)
11. *Николаевский В. Н.* Тензор напряжений и осреднение в механике сплошных сред. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
12. *Melcher J. B., Taylor G. I.* Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stresses. In: Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 1, Palo Alto, California, 1969. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1971, № 5.)