Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 538.4

ДВИЖЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. В. Кирюшин, В. А. Налетова, В. В. Чеканов

(Москва)

Получено общее стационарное решение уравнений, описывающих движение намагничивающейся несжимаемой непроводящей жидкости в однородном вращающемся с постоянной угловой скоростью магнитном поле, обладающее цилиндрической симметрией. С использованием полученного решения находится скорость и внутренний момент количества движения намагничивающейся жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися с разными угловыми скоростями. Показано, что в случае, когда цилиндры закреплены, жидкость, обладающая внутренним моментом количества движения, в отличие от обычной вязкой жидкости движется. Рассмотрены различные предельные случаи, когда внутренний либо внешний цилиндр отсутствует, когда один из цилиндров закреплен, а другой свободно вращается, когда оба цилиндра свободно вращаются.

Примерами намагничивающихся жидкостей служат мелкодисперсные суспензии ферромагнитных частиц. Упорядоченное вращение частиц (например под действием вращающегося магнитного поля) создает в такой жидкости внутренний момент количества движения. Уравнение изменения внутреннего момента количества движения выписано в общем виде в монографии [1].

Уравнения, описывающие ферромагнитные суспензии, в случае, когда внутренний момент количества движения можно не учитывать, выведены в [2,3]. В данной работе ферромагнитные суспензии рассматриваются как однофазные среды, а наличие ферромагнитных частиц учитывается при помощи введения внутреннего момента количества движения единицы объема и намагниченности суспензии, связанной с числом частиц, их взаимным расположением и намагниченностью отдельной частицы. Уравнения описывающие движение такой среды без учета гиромагнитного эффекта, впервые были выведены в работе [4].

1. Общее решение уравнений, описывающих намагничивающуюся жидкость с внутренним вращением, в случае цилиндрической симметрии.

В работе [4] выведена замкнутая система уравнений, описывающая движение намагничивающейся жидкости с учетом внутреннего момента количества движения. В случае, когда среда непроводящая и несжимаемая, феноменологические коэффициенты не зависят от магнитного поля. Без учета перекрестных эффектов эти уравнения в приближении феррогидродинамики [2] имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \rho\frac{du}{dt} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{2\tau_s}\operatorname{rot}(\mathbf{K} - I\Omega) + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} \tag{1.1}$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \delta\Delta\mathbf{K} + \delta_1\nabla\operatorname{div}\mathbf{K} - \frac{1}{\tau_s}(\mathbf{K} - I\Omega) + [\mathbf{M}\times\mathbf{H}]$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = I^{-1}[\mathbf{K}\times\mathbf{M}] - \frac{\mathbf{M} - \chi\mathbf{H}}{\tau}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$$

Здесь $\mathbf{u}$, ρ, p, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ — скорость, плотность, давление, внутренний момент количества движения единицы объема, намагниченность среды соответственно, $\mathbf{H}$ — магнитное поле, $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u} / 2$ — вектор вихря, μ, τ_s, δ, δ_1, I, τ — феноменологические коэффициенты, которые в данной работе считаются постоянными. Предположим, что коэффициент магнитной проницаемости χ не зависит от температуры. Уравнение энергии при этом отщепляется от системы уравнений (1.1), описывающей движение несжимаемой жидкости. Это уравнение в данной работе рассматриваться не будет.

Для упрощения будем считать, что $4\pi M \ll H$. В известных экспериментах такое неравенство обычно имеет место. При этом можно считать магнитное поле всюду внутри жидкости равным приложенному внешнему однородному полю. Последние два уравнения системы (1.1) тождественно удовлетворяются.

Рассмотрим стационарное движение жидкости в однородном магнитном поле, вращающемся в некоторой плоскости с постоянной угловой скоростью Ω_f, обладающее цилиндрической симметрией относительно некоторой оси, перпендикулярной плоскости вращения поля. Выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z так, что ось z — ось симметрии. Будем предполагать, что $K_\varphi = K_r = 0$, $K_z = K$, $u_r = u_z = 0$, $u_\varphi = u$, $\Omega_{f\varphi} = \Omega_{fr} = 0$, $\Omega_{fz} = \Omega_f$ и что все функции зависят только от r, т. е. $\partial / \partial t = \partial / \partial \varphi = \partial / \partial z = 0$. Установившееся решение четвертого уравнения системы (1.1) имеет вид

$$M_\parallel = \frac{I^2 \chi H}{I^2 + \tau^2 (K - I\Omega_f)^2}, \quad M_\perp = \frac{\chi \tau I H (I\Omega_f - K)}{I^2 + \tau^2 (K - I\Omega_f)^2} \tag{1.2}$$

Здесь $M_\parallel$, $M_\perp$ — проекции вектора намагниченности $\mathbf{M}$ на направление магнитного поля $\mathbf{H}$ и на направление, перпендикулярное вектору магнитного поля соответственно, H — абсолютная величина магнитного поля.

Используя решение уравнения для намагниченности (1.2), получим

$$[\mathbf{M} \times \mathbf{H}]_z = M_\perp H = \frac{\chi \tau I H^2 (I\Omega_f - K)}{I^2 + \tau^2 (K - I\Omega_f)^2} \tag{1.3}$$

Уравнения движения и момента количества движения (второе и третье уравнения системы (1.1) в проекции на координатные оси φ и z соответственно) с учетом равенства (1.3) и предположений, сделанных выше, запишутся в виде

$$\mu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) - \frac{1}{2\tau_s} \frac{d}{dr} (K - I\Omega) = 0, \tag{1.4}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right)$$

$$\delta \left(\frac{d^2 K}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK}{dr} \right) - \frac{1}{\tau_s} (K - I\Omega) + M_\perp H = 0$$

Интегрируя первое уравнение системы (1.4), получим

$$\Omega = \frac{\gamma (K + C_1')}{I}, \quad \gamma = \frac{1}{1 + 2R}, \quad R = \frac{2\mu\tau_s}{I}, \quad C_1' = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

Будем искать общее решение уравнений (1.1) в предположении, что $\tau^2\Omega_f^2 \ll 1$. Тогда система (1.4) с учетом выражений (1.5) и (1.2) имеет общее решение в виде

$$\frac{K}{I\Omega_f} = \frac{Q+C_1}{Q+1} + C_2 I_0\left(\frac{r}{l}\right) + C_3 K_0\left(\frac{r}{l}\right) \tag{1.6}$$

$$C_1 = \frac{\gamma C_1'}{I\Omega_f} + \gamma\frac{I\Omega_f Q + \gamma C_1'}{I\Omega_f(Q+1-\gamma)}$$

$$\frac{u}{\Omega_f} = C_1 r + \frac{C_4}{r} + 2\gamma l C_2 I_1\left(\frac{r}{l}\right) - 2\gamma l C_3 K_1\left(\frac{r}{l}\right), \quad l^2 = \frac{\delta\tau_s}{Q+1-\gamma}$$

$$Q = \chi\tau\tau_s I^{-1} H^2$$

Здесь $I_n(r/l)$, $K_n(r/l)$ — модифицированные функции Бесселя и Ганкеля порядка n соответственно. Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 находятся из граничных условий.

2. Движение намагничивающейся жидкости между двумя цилиндрами во вращающемся магнитном поле. Рассмотрим течение жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2, $R_1 < R_2$, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 (индексы *1* и *2* здесь и далее относятся к внутреннему и внешнему цилиндрам соответственно). Ось цилиндров перпендикулярна плоскости вращения магнитного поля. В качестве граничных условий примем условия прилипания для скорости и внутреннего момента количества движения вязкой феррожидкости на твердой границе. Эти условия запишутся в виде

$$\mathbf{u}(R_i) = \Omega_i R_i, \quad \mathbf{K}(R_i) = I\Omega_i, \quad i = 1, 2 \tag{2.1}$$

Условия (2.1) приводят к системе линейных уравнений для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 в формулах (1.6). Решив эту систему, получим

$$C_1 = c(Q+1) - Q - a(Q+1)C_2 + b(Q+1)C_3 \tag{2.2}$$

$$C_2 = \Delta^{-1}\{[K_0(R_2/l) + b](\omega_1 - c) - [K_0(R_1/l) + b] \times (\omega_2 - c)\}$$

$$C_3 = \Delta^{-1}\{[I_0(R_1/l) - a](\omega_2 - c) - [I_0(R_2/l) - a](\omega_1 - c)\}$$

$$C_4 = R_1^2(\omega_1 - C_1) - 2\gamma l R_1 I_1(R_1/l) C_2 + 2\gamma l R_1 K_1(R_1/l) C_3$$

$$a = 2\gamma l\frac{R_1 I_1(R_1/l) - R_2 I_1(R_2/l)}{(R_1^2 - R_2^2)(Q+1)}$$

$$b = 2\gamma l\frac{R_1 K_1(R_1/l) - R_2 K_1(R_2/l)}{(R_1^2 - R_2^2)(Q+1)}$$

$$c = \frac{Q}{Q+1} + \frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)(Q+1)}, \quad \omega_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_f}, \quad i = 1, 2$$

$$\Delta = [I_0(R_1/l) - a][K_0(R_2/l) + b] - [I_0(R_2/l) - a][K_0(R_1/l) + b]$$

Перейдя в формулах (1.6), (2.2) к пределу при $R_2 \to \infty$, получим в случае, когда цилиндры неподвижны ($\omega_1 = \omega_2 = 0$)

$$\frac{K}{I\Omega_f} = c\left[1 - \frac{K_0(r/l)}{K_0(R_1/l)}\right], \quad c = \frac{Q}{Q+1} \tag{2.3}$$

$$\frac{u}{\Omega_f} = 2\gamma l\frac{c}{K_0(R_1/l)}\left[K_1\left(\frac{r}{l}\right) - \frac{R_1 K_1(R_1/l)}{r}\right]$$

Решение (2.3) описывает течение намагничивающейся жидкости вне неподвижного цилиндра. Исследуя это решение, можно показать, что вне неподвижного цилиндра образуется течение, направленное в сторону, противоположную вращению поля.

Перейдя в формулах (1.6), (2.2) к пределу при $R_1 \to 0$, получим для течения жидкости внутри неподвижного цилиндра

$$(2.4)\qquad \frac{K}{I\Omega_f} = c - \frac{c}{I_0(R_2/l) - a}\left[I_0\left(\frac{r}{l}\right) - a\right], \quad a = \frac{2\gamma l I_1(R_2/l)}{R_2}$$

$$\frac{u}{\Omega_f} = -\frac{2\gamma l c}{I_0(R_2/l) - a}\left[I_1\left(\frac{r}{l}\right) - \frac{r}{R_2} I_1\left(\frac{R_2}{l}\right)\right]$$

Формулы (2.4) впервые были получены в работах [5,6]. Исследуя решение (2.4), можно показать, что внутри неподвижного цилиндра образуется течение, направленное в сторону вращения поля. Этот результат качественно совпадает с экспериментальными данными [7,8].

На неподвижные цилиндры радиусов R_1 и R_2 со стороны намагничивающейся жидкости действуют моменты сил, рассчитанные на единицу высоты цилиндра, $\mathbf{M}_1 = M_1\mathbf{e}$, $\mathbf{M}_2 = M_2\mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$ — единичный вектор оси z), связанные как с наличием поверхностной силы трения, так и с наличием потока внутреннего момента количества движения

$$(2.5)\qquad M_i = (2\pi R_i^2 p_{r\varphi} + 2\pi R_i Q_{zr})\big|_{r=R_i} \cdot n_i, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = -1$$

$$Q_{zr} = \delta\frac{dK}{dr}, \quad p_{r\varphi} = \mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) - \frac{1}{2\tau_s}(K - I\Omega)$$

Здесь $p_{r\varphi}$ — компонента тензора напряжений, действующего в намагничивающейся среде, Q_{zr} — компонента тензора потока внутреннего момента количества движения среды. В случае отсутствия внешнего цилиндра момент сил M_1, действующий на внутренний цилиндр, равен

$$(2.6)\qquad M_1 = -2\pi R_1 \frac{Q\Omega_f}{Q+1}\left[\frac{R_1 I}{2\tau_s} - \frac{\delta I K_1(R_1/l)}{l K_0(R_1/l)}\right]$$

В случае отсутствия внутреннего цилиндра момент сил M_2, действующий на внешний цилиндр, равен

$$(2.7)\qquad M_2 = \pi R_2 Q I \Omega_f \frac{R_2 I_0(R_2/l) + 2(Q+\gamma) l I_1(R_2/l)}{\tau_s (Q+1)(I_0(R_2/l) - a)}$$

Рассмотрим течение намагничивающейся жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами, когда один из них (внешний, например) закреплен или вращается с заданной угловой скоростью, другой — свободен.

Течение жидкости описывается формулами (1.6) с постоянными C_1, C_2, C_3, C_4, которые определяются из следующих граничных условий на свободном цилиндре и на цилиндре, вращающемся с заданной угловой скоростью Ω_2

$$(2.8)\qquad \left\{\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) - \frac{1}{2\tau_s}(K - I\Omega)\right\}\Big|_{r=R_1} = 0, \quad \frac{dK}{dr}\Big|_{r=R_1} = 0$$

$$u\big|_{r=R_2} = \Omega_2 R_2, \quad K\big|_{r=R_2} = I\Omega_2$$

Первые два условия (2.8) — следствия законов сохранения потока импульса и потока момента количества движения на свободной поверхности. Последние два условия (2.8) — условия прилипания жидкости на твердой стенке.

Подставляя решения (1.6) в граничные условия (2.8), получим систему линейных уравнений для постоянных C_1, C_2, C_3, C_4.

В случае отсутствия внешнего цилиндра ($\omega_2 = 0$, $R_2 \to \infty$) уравнения (2.8) упрощаются, и для скорости жидкости вне свободного цилиндра и угловой скорости вращения цилиндра Ω_c получим

$$u = -\frac{Q\Omega_f R_1^2}{2(Q+1)Rr}, \quad \Omega_c = -\frac{Q\Omega_f}{2(Q+1)R}, \quad R = \frac{2\mu\tau_s}{I} \tag{2.9}$$

Течение намагничивающейся жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами, один из которых (внутренний) свободен, рассматривалось ранее [1] в предположении $\tau_s = 0$, $\delta = 0$ [9].

Из решения задачи о свободном цилиндре в бесконечной намагничивающейся жидкости (формула (2.9)) видно, что цилиндр должен вращаться в сторону, противоположную вращению поля.

Рассмотрим случай, когда как внутренний, так и внешний цилиндры свободны. Течение жидкости описывается формулами (1.6), постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 в которых определяются условиями на свободных поверхностях цилиндров. Получим

$$u = \Omega_f r, \qquad K = I\Omega_f \tag{2.10}$$

Равенства (2.10) означают, что вся система, состоящая из двух свободных цилиндров и жидкости, находящейся между ними, вращается как твердое тело с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения поля. Этот результат согласуется с экспериментальными данными, полученными в лаборатории феррогидродинамики Ставропольского педагогического института.

Авторы благодарят В. В. Гогосова и А. О. Цебера за полезное обсуждение и ценные замечания.

Поступила 19 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1976.
2. *Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А.* Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. Изд-во МГУ, 1975.
3. *Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Гидродинамика дисперсных систем, взаимодействующих с электромагнитным полем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
4. *Суязов В. М.* О несимметричной модели вязкой электромагнитной жидкости. ПМТФ, 1970, № 2.
5. *Суязов В. М.* Движение намагничивающейся жидкости под действием вращающегося магнитного поля. ПМТФ, 1970, № 4.
6. *Суязов В. М.* Движение ферросуспензий во вращающихся однородных магнитных полях. Магнитная гидродинамика, 1976, № 4.
7. *Moskowitz R., Rosensweig R. E.* Nonmechanical torgue-driven of ferromagnetic fluid by an electromagnetic field. Appl. Phys. Letters, 1967, vol.11, No. 10, p. 301.
8. *Mailfert R., Martinet A.* Flow regimes for a magnetic suspension under a rotating magnetic field. J. Phys., 1973, vol. 34, No. 2—3, p. 197.
9. *Цеберс А. О.* Феррогидродинамика как гидродинамика системы с внутренними степенями свободы. В сб.: Физические свойства и гидродинамика дисперсных ферромагнетиков. Свердловск, 1977.

[1] *Цеберс А. О.* Собственные вращения частиц в гидродинамике намагничивающихся и поляризующихся сред. Канд. диссертация, Рига, 1976.