

РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Г. Л. С е д о в а

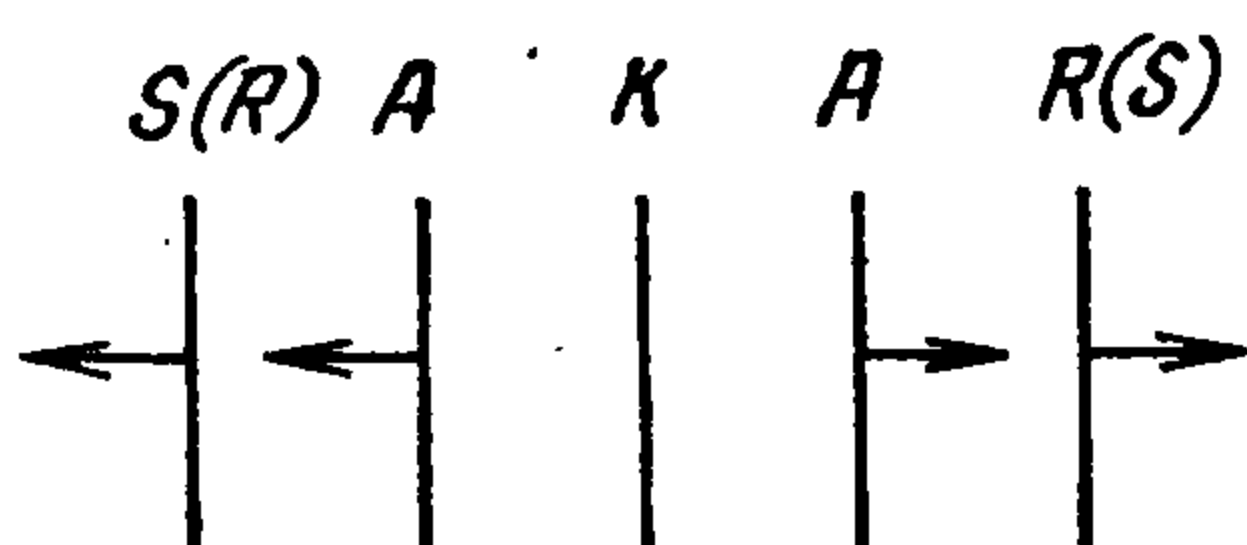
(Москва)

Рассматривается распад произвольного разрыва электромагнитных величин в непроводящих ферромагнетиках. Исследуются случаи, когда магнитная проницаемость среды и модуль напряженности внешнего магнитного поля связаны линейной (закон Релея) и обратно пропорциональной (формула Фрелиха — Кеннели) зависимостями.

В газовой динамике задача о распаде произвольного разрыва для идеального совершенного газа решена в [1], для сред с произвольным уравнением состояния задача решена в [2], для горючих смесей — в [3] и в магнитной гидродинамике — в [4].

1. Пусть в начальный момент времени параметры электромагнитного поля в ферромагнетике терпят разрыв на плоскости $x = 0$. В последующие моменты времени произвольный разрыв распадается. В силу автомодельности задачи разрыв распадается на некоторую комбинацию, состоящую из сильных разрывов и двух типов электромагнитных волн [5]. Световые волны A , идущие со скоростью $v_A = c / \sqrt{\mu \epsilon}$ (μ — магнитная проницаемость, ϵ — диэлектрическая проницаемость ферромагнетика), будем в дальнейшем по аналогии с магнитной гидродинамикой называть альфвеновскими волнами или вращательными разрывами.

Рассмотрим сначала распад разрыва в случае обратной зависимости μ от модуля напряженности внешнего магнитного поля H ($1 / \mu = a + bH$). При этом скорости распространения простых волн, сильных разрывов и альфвеновских волн, как будет показано ниже, таковы, что от контактного разрыва K , на котором рвется тангенциальная составляющая индукции магнитного поля B_τ , могут пойти в обе стороны две волны, причем вращательный разрыв A следует за простой волной R или сильным разрывом S (фиг. 1).



Фиг. 1

Параметры среды, расположенной слева от плоскости контактного разрыва, отмечены штрихом. Параметры среды в начальный момент времени отметим индексом 0, параметры за первой волной, идущей вправо или влево, — индексом 1, а за A — разрывом — индексом 2.

Рассмотрим связь величин в волнах и на разрывах в ферромагнетиках при обратно пропорциональной зависимости магнитной проницаемости от модуля напряженности магнитного поля. Было показано [6], что если первоначально нормальные составляющие магнитного поля на разрыве не равны, то на контактном разрыве произойдет скачок H_n , причем должно выполняться равенство $[\mu H_n] = 0$. Скорость распространения контактного разрыва равна нулю, так что он во все моменты времени совпадает с плоскостью $x = 0$. Диэлектрическая проницаемость ферромагнетика считается здесь постоянной, поэтому нормальная составляющая электрического поля в силу известных соотношений, вытекающих из уравнений Максвелла, не может претерпевать разрыв, и в этом случае на всех разрывах и в волнах выполняется равенство $[E_n] = 0$.

Условия на сильном разрыве имеют вид (v_n — скорость распространения разрыва)

$$(1.1) \quad [E_z] = -\frac{c}{v_n \varepsilon} [H_y], \quad [E_y] = \frac{c}{v_n \varepsilon} [H_z]$$

$$v_n = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon}} \left[1 - \frac{H_{2y} (\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 H_{1y} - \mu_2 H_{2y}} \right]^{1/2}$$

(знак плюс соответствует волне, идущей вправо, минус — волне, идущей влево).

Из условий эволюционности следует, что магнитное поле при прохождении сильного разрыва увеличивается [6].

В простой волне электрическое и магнитное поля связаны соотношениями

$$(1.2) \quad E_z = E_{0z} - f(H; H_0), \quad E_y = E_{0y} + \varphi(H; H_0)$$

$$f(H; H_0) = \int_{H_0}^H \frac{c}{\lambda \varepsilon} dH_y, \quad \varphi(H; H_0) = \int_{H_0}^H \frac{c}{\lambda \varepsilon} dH_z$$

$$\lambda = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \left[1 + \frac{b\mu (H_y^2 + H_z^2)}{aH} \right]^{1/2}$$

(λ — скорость распространения простых волн). Было показано [6], что производная $d\lambda / dH > 0$, поэтому волны, в которых магнитное поле растет, опрокидываются, и в действительности будут реализоваться только волны, в которых магнитное поле убывает.

Вращательный разрыв будет отставать от простой и ударной волн, поскольку скорость его распространения меньше скоростей волн R и S . Такой разрыв, не изменяя величины модуля вектора H , поворачивает его на некоторый угол, при этом связь векторов H и E дается формулой $[E] = \pm \sqrt{\mu / \varepsilon} [n \times [H]]$ (n — вектор нормали к плоскости разрыва).

Плоский случай распада. Рассмотрим сначала плоскую задачу о распаде произвольного разрыва. В этом случае векторы $H_0 \perp E_0$, $H_0' \perp E_0'$ и $H_0 \parallel H_0'$. Выбрав систему координат так, чтобы вектор $H_{0\tau}$ был направлен по оси y , получим, что векторы $E_{0\tau}$ и $E_{0\tau}'$ направлены по оси z . Из точки O с координатами H_{0y} и E_{0z} (фиг. 2) проведем кривые, соответствующие

и *САКА*. Уравнения линий *РАКА*, *САКА* аналогичны уравнениям для *РК* и *СК* (1.3), если вместо значений E_{0z} подставить значения E_{Az} , а уравнения линий *АКАР* и *АКАС* имеют вид

$$E_z = E_{0z} - f(H_y H_{0y}) + 4H \sqrt{\mu/\epsilon}, \quad 0 < H_y < H_{0y}$$

$$E_z = E_{0z} - \frac{c}{v_n \epsilon} (H_y - H_{0y}) + 4H \sqrt{\mu/\epsilon}, \quad H_y > H_{0y}$$

Таким образом, вся правая полуплоскость $H_y > 0$ разделяется на восемь областей, в каждой из которых указано, какая комбинация волн пойдет при распаде произвольного разрыва.

Если $H_{0y}' < 0$, то при распаде необходимо возникает один альфвеновский разрыв, поворачивающий магнитное поле на 180° , за исключением предельного случая, когда магнитное поле падает до нуля вдоль линии *РКР*, которую можно продолжить за ось $H_y = 0$. Справа от этой линии будет осуществляться альфвеновский разрыв, идущий влево, а слева — идущий вправо. Рассмотрим точки O_2 и O_3 , соответствующие прохождению одного *A*-разрыва; координаты этих точек будут $H = -H_0$; $E_z = E_{0z} - 2H_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon}$ и $H = -H_0$, $E_z = E_{0z} + 2H_0 \sqrt{\mu_0/\epsilon}$ соответственно. Уравнения линий *АКС*, *РАК*, *САК*, *АКР* и *КАС*, *РКА*, *СКА*, *КАР*, выходящих из точек O_2 и O_3 , можно записать по аналогии с уравнениями, описывающими распады *АКАР*, *АКАС*, *САКА* и *РАКА*, взяв вместо координаты точки O_1 координаты точки O_2 или O_3 , [вместо H величину $-H$ и учитывая, что происходит только один альфвеновский разрыв.

Таким образом, и левая полуплоскость разбивается на ряд областей, каждая из которых соответствует комбинации волн, состоящей из одного *A*-разрыва и двух или одной волн.

Пространственный случай распада. Пусть векторы $H_{0\tau}$, $H_{0\tau}'$ и $E_{0\tau}$, $E_{0\tau}'$ не параллельны. Повернем систему координат так, чтобы $H_{0z} = 0$, и будем строить решение в плоскости $E_y E_z$. Тогда комбинациям двух альфвеновских волн и одной простой или ударной волны будут соответствовать в этой плоскости некоторые кривые, а комбинациям из двух разрывов и двух волн — области, заключенные между этими разрывами.

Составим уравнение кривой *АКАР*

$$(1.5) \quad E_{1y} = E_{0y}, \quad E_{1z} = E_{0z} - f(H_1 H_0)$$

$$E_{2y} - E_{1y} = \sqrt{\mu_1/\epsilon} H_{2z}, \quad E_{2z} - E_{1z} = -\sqrt{\mu_1/\epsilon} (H_{2y} - H_{1y})$$

$$E_{0y}' - E_{2y} = -\sqrt{\mu_1/\epsilon} (H_{0z}' - H_{2z}),$$

$$E_{0z} - E_{2z} = \sqrt{\mu_1/\epsilon} (H_{0y}' - H_{2y})$$

$$|H_2| = |H_0|, \quad H_{1y} = H_{0y} |H_0'| / |H_0|$$

При заданных за разрывом значениях H_{0y} и H_{0y}' получаем систему восьми уравнений для определения девяти величин: H_{1y} , H_{2y} , H_{2z} , E_{1y} , E_{1z} , E_{2y} , E_{2z} , E_{0y}' , E_{0z}' .

Связь величин E_{0y}' и E_{0z}' , при которой происходит распад разрыва на комбинацию *АКАР*, может быть записана в виде

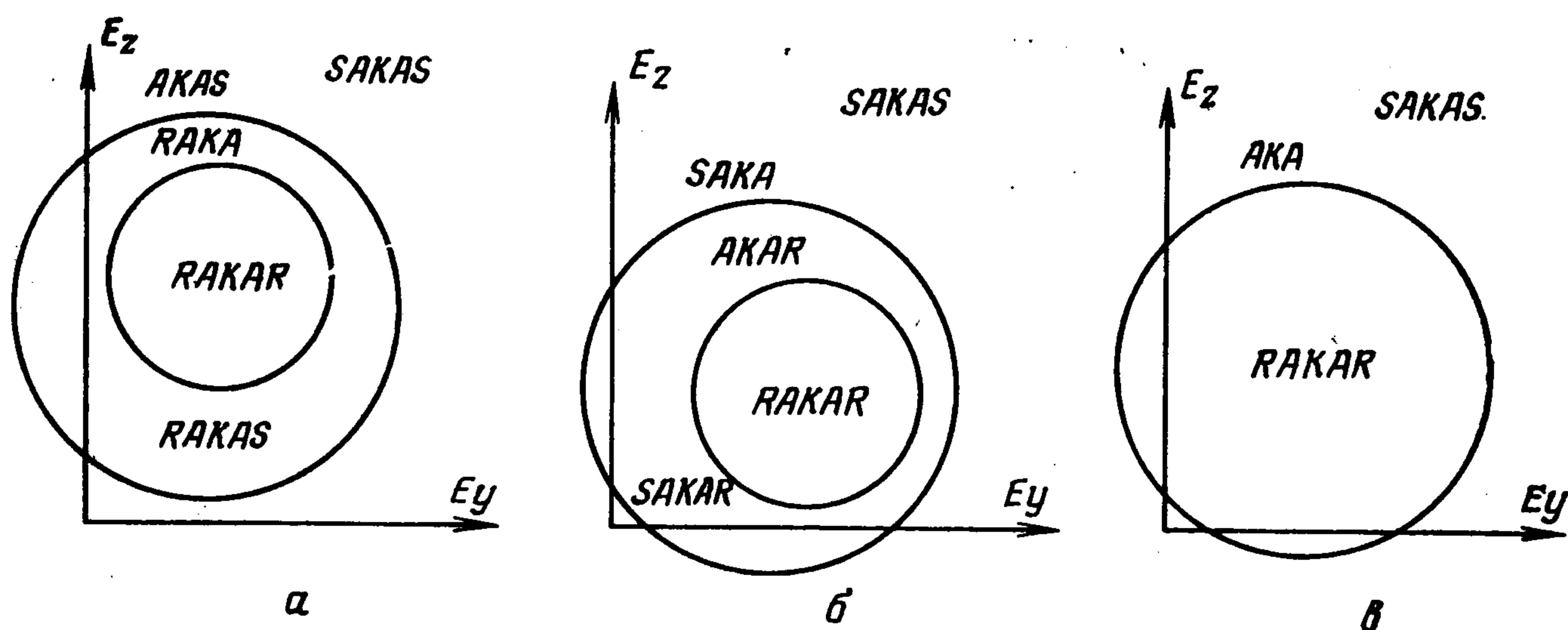
$$(1.6) \quad \left[E_{0y}' - E_{0y} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon}} H_{0z}' \right]^2 + \left[E_{0z}' - E_{0z} + f(H_1 H_0) - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon}} \left(H_{0y}' + \frac{H_{0y} |H_0'|}{|H_0|} \right) \right]^2 = 4 \frac{\mu_1}{\epsilon} H_0'^2$$

Это уравнение представляет собой окружность радиуса $2\sqrt{\mu_1/\varepsilon}|H'_0|$ с центром в точке

$$E_y = E_{0y} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon}} H'_{0z}, \quad E_z = E_{0z} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon}} \times \\ \times \left(H'_{0y} + \frac{H_{0y}|H'_0|}{|H_0|} \right)$$

Можно показать, что линия $AKAS$ в плоскости $E_y E_z$ также будет представлять собой окружность.

В случае, когда $|H_{0\tau}| > |H'_{0\tau}|$, в плоскости $E_y E_z$ получаем две окружности, соответствующие распаду разрыва на комбинации волн $AKAS$



Фиг. 3

и $РАКА$. Окружность $РАКА$ находится внутри окружности $АКАС$ (фиг. 3, а), поскольку в плоском случае распада произвольного разрыва (прямая $E_y = 0$), двигаясь из бесконечности, пересекает сначала область, которой соответствует комбинация $САКАС$, затем кривую $АКАС$ и далее область $РАКАС$. Если $H'_{0z} = 0$, то окружность $АКАС$ получается расположенной симметрично оси $|E_y = E_{0y}|$; точки E_{z1} и E_{z2} [пересечения окружности $АКАС$ с осью E_z можно найти из фиг. 2 плоского распада разрыва. Они соответствуют распаду на комбинацию $КС$ и $АКАС$. Вращая эти точки вокруг центра отрезка, их соединяющего, можно получить искомую окружность $АКАС$. Введение величины H'_{0z} приводит к сдвигу окружности по оси E_y на величину $\sqrt{\mu_1/\varepsilon}H'_{0z}$ и увеличению ее радиуса до значения $2\sqrt{\mu_1/\varepsilon}|H'_0|$.

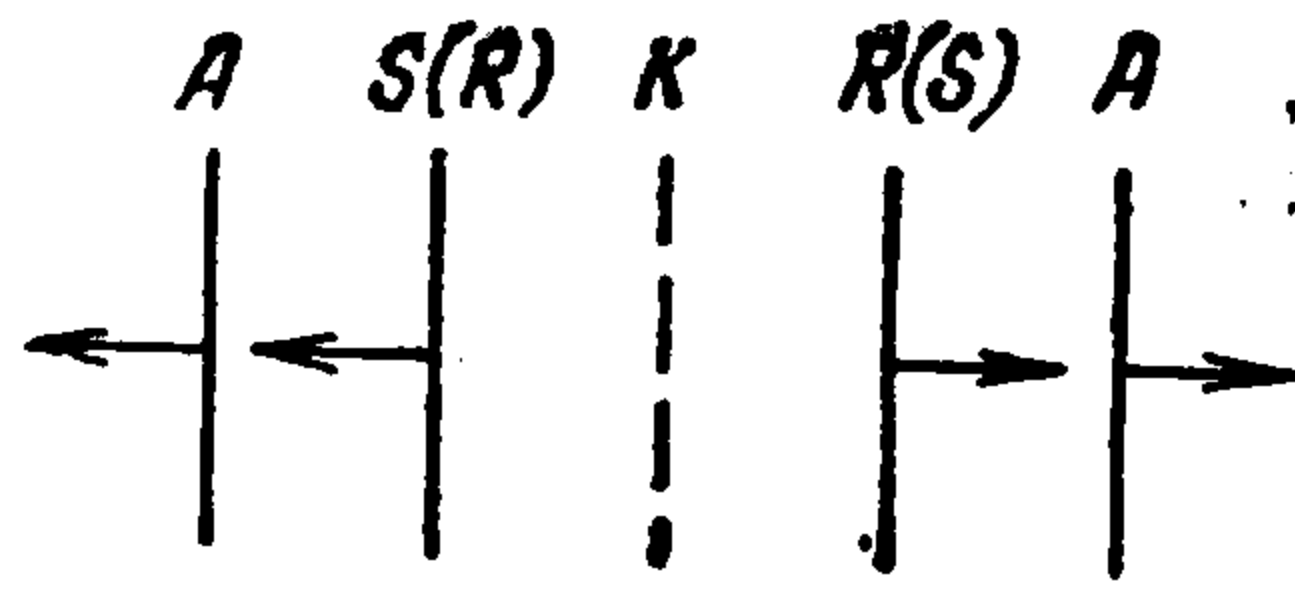
При $|H'_{0\tau}| < |H_{0\tau}|$ в области $E_y E_z$ также получаем две окружности: $САКА$ и $АКАР$ (последняя внутри первой, фиг. 3, б).

Если $|H_{0\tau}| = |H'_{0\tau}|$, то происходит распад только на комбинации $САКАС$, $РАКАС$ и $АКА$ (фиг. 3, в).

Если известны значения параметров поля по обе стороны от плоскости разрыва, то, построив кривые, описываемые уравнениями типа (1.5), получаем в плоскости $E_y E_z$ окружности, аналогичные приведенным на фиг. 3. Зная координаты точки (H'_{0y}, H'_{0z}) и (E'_{0y}, E'_{0z}) , можно найти комбинацию волн, которая пойдет при заданных значениях параметров.

2. Рассмотрим распад разрыва электромагнитного поля в случае линейной зависимости μ от H ($\mu = \mu_0 + \mu_H H$). При этом скорости распро-

странения простых волн и сильных разрывов меньше скорости распространения альфвеновских волн. Качественная картина распада произвольного разрыва электромагнитного поля при линейной зависимости магнитной проницаемости от магнитного поля представлена на фиг. 4. В работе [6] показано, что в данном случае на контактном разрыве нормальная составляющая магнитного поля H_n не рвется. Контактный разрыв K практически обозначает только плоскость $x = 0$.



Фиг. 4

Условия на сильном разрыве имеют такой же вид, что и в случае обратной зависимости μ от H (формула (1.1)). Сильные разрывы распространяются со скоростью

$$v_n = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu_1 \epsilon}} \left[1 - \frac{\mu_H H_{2y} (H_1 - H_2)}{\mu_0 (H_{1y} - H_{2y}) + \mu_H (H_{1y} H_2 - H_{2y} H_1)} \right]^{1/2}$$

Из условий эволюционности следует, что магнитное поле в сильном разрыве уменьшается.

Связь электрического и магнитного полей в простых волнах имеет тот же вид, что и в формулах (1.2). Скорость распространения этих волн

$$\lambda = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left[1 + \frac{\mu_H H_y^2}{(\mu + \mu_H H) H} \right]^{1/2}$$

Производная $d\lambda / dH < 0$, поэтому волны, в которых магнитное поле падает, будут опрокидываться и переходить в сильные разрывы. Существовать будут только те простые волны, в которых магнитное поле растет.

Вращательный разрыв при линейной зависимости μ от H полностью совпадает с рассмотренным ранее в п. 1 вращательным разрывом. В таком разрыве модуль вектора H остается неизменным, следовательно, и магнитная проницаемость и скорость распространения разрыва постоянны.

Плоский случай распада. В случае, когда параметры поля за разрывом и перед ним связаны соотношениями $H_0 \perp E_0$, $H_0' \perp E_0'$ и $H_0 \parallel H_0'$, картина распада произвольного разрыва соответствует представленной на фиг. 2. Задача о распаде решается аналогично рассмотренной ранее в п. 1. Уравнения линий KR , KS , RK и SK запишутся в виде (1.3) с заменой всех неравенств на противоположные. Уравнение линии SKS описывается формулой

$$E_{0z} = \frac{c}{v_n \epsilon} H_{0y} = E_z + \frac{c}{v_n \epsilon} H_y$$

Уравнения всех остальных линий, соответствующих распаду плоского разрыва на альфвеновские и одну простую или ударную волну, пишутся так же, как и в п. 1, если заменить соотношения для волн R на соотноше-

ния для S и наоборот, причем необходимо учесть, что альфвеновская волна обгоняет простую волну и сильный разрыв.

Пространственный случай. Если за разрывом и перед ним векторы \mathbf{H}_τ и \mathbf{E}_τ не параллельны, то распад такого разрыва происходит с образованием вращательных разрывов, при которых возникают поперечные компоненты магнитного поля. Уравнения, описывающие связь компонент E_y и E_z в комбинациях волн, состоящих из двух альфвеновских волн и одной R - или S -волны, совпадают с формулой (1.6). Плоскость $E_y E_z$ будет разбита окружностями $AKRA$, $AKSA$, $ASKA$ и $ARKA$ на области, в которых будут осуществляться комбинации волн $ARKRA$, $ARKSA$, $ASKRA$ и $ASKSA$.

Если на фиг. 3 заменить знаки R на S , а S на R , то получается картина пространственного распада произвольного разрыва при линейной зависимости μ от H в случае $|\mathbf{H}_{0\tau}| > |\mathbf{H}_{0\tau}'|$ (а), $|\mathbf{H}_{0\tau}| < |\mathbf{H}_{0\tau}'|$ (б) и при $|\mathbf{H}_{0\tau}| = |\mathbf{H}_{0\tau}'|$ (в).

Автор благодарит А. Г. Куликовского и В. В. Гогосова за обсуждение работы.

Поступила 31 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kotchine N. E.* Sur la theorie des ondes de choc dans un fluide. Rend. Circolo. Nat. Palermo, 1926, № 50.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
3. *Бам-Зеликович Г. М.* Распад произвольного разрыва в горючей смеси. В сб.: Теоретическая гидромеханика, № 4. М., Оборонгиз, 1949.
4. *Гогосов В. В.* Распад произвольного разрыва в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
5. *Налетова В. А., Шапошникова Г. А.* Распад произвольного разрыва в идеально проводящей намагничивающейся несжимаемой среде. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
6. *Седова Г. Л.* Нелинейные волны и сильные разрывы в ферромагнетиках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2.