Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 533.6.011.8

# БАРНЕТТОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ К ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СУПЕРБАРНЕТТОВСКИЕ ВКЛАДЫ В ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕПЛОВОЙ ПОТОК

**М. Ш. Шавалиев**

(Новосибирск)

Для максвелловских молекул получено точное решение уравнения, определяющего барнеттовскую поправку к функции распределения скоростей. Показано, что оно содержит ряд новых членов, отсутствующих в вычислениях Барнетта. На основе полученной функции распределения вычислены супербарнеттовские члены в тензоре напряжений и тепловом потоке. При этом исправлены ошибки, имеющиеся в работе [1], где эти члены были получены другим методом.

**1. Барнеттовская поправка к функции распределения.** Как известно, в случае максвелловских молекул интегральное уравнение, которому удовлетворяет $f^{(1)}$, может быть решено точно [2]. Таким же путем можно решить уравнение, определяющее $f^{(2)} = f^{(0)}\Phi^{(2)}$. Оно имеет вид (1.1) с дополнительными условиями (1.2) [2]

$$\frac{\partial_1}{\partial t} f^{(0)} + \left(\frac{\partial_0}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) f^{(1)} - I(f^{(1)}, f^{(1)}) = L(\Phi^{(2)}) \tag{1.1}$$

$$\int \psi(\mathbf{v}) f^{(2)} d\mathbf{v} = 0, \quad \psi(\mathbf{v}) = 1,\ \mathbf{v},\ (\mathbf{v}-\mathbf{u})^2 \tag{1.2}$$

Здесь

$$f^{(1)} = f^{(0)}\left(A_\alpha \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha} + B_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}\right) =$$

$$= f^{(0)}\left[\frac{3\mu}{2pT}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha} V_\alpha\left(\frac{5}{2} - W^2\right) - \frac{\rho\mu}{p^2} e_{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta\right]$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\right) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{u}, \quad W^2 = \frac{mV^2}{2kT}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

где $L$ — линеаризованный интеграл столкновений, остальные обозначения взяты из [2].

Укажем лишь основные моменты решения, не приводя подробных выкладок.

Уравнение (1.1) — линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Условия разрешимости (ортогональность левой части (1.1) к решениям однородного уравнения) приводят к соотношениям

$$\frac{\partial_1 n}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial_1 u_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial r_\beta} \tag{1.3}$$

$$\frac{3}{2} nk \frac{\partial_1 T}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{q}^{(1)} - p_{\alpha\beta}^{(1)}\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta}$$

Далее левую часть (1.1) представим в виде линейной комбинации собственных функций линеаризованного интеграла столкновений.

Наиболее сложным является вычисление интегралов столкновений $I$. При помощи метода, изложенного в [1], получаем

$$I(A_\alpha, A_\beta) = f^{(0)}\frac{9}{8}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\mu}{p}\langle V_\alpha V_\beta\rangle S^{(2)}_{5/2} \tag{1.4}$$

$$I(B_{\alpha\beta}, B_{\gamma\delta}) = f^{(0)}\left[\frac{9}{16}\left(1 - \frac{35}{27}\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\rho^2\mu}{p^3}\langle V_\alpha V_\beta V_\gamma V_\delta\rangle + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{21}\frac{\rho\mu}{p^2}\delta_{\beta\gamma}\langle V_\alpha V_\delta\rangle S^{(1)}_{5/2} - \frac{8}{45}\frac{\mu}{p}\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}S^{(2)}_{1/2}\right]$$

$$I(B_{\alpha\beta}, A_\gamma) + I(A_\gamma, B_{\alpha\beta}) =$$
$$= -f^{(0)}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{8}\frac{A_4}{A_2}\right)\frac{\rho\mu}{p^2}\langle V_\alpha V_\beta V_\gamma\rangle S^{(1)}_{7/2} + \frac{1}{5}\frac{\mu}{p}\delta_{\beta\gamma}V_\alpha S^{(2)}_{3/2}\right]$$

Угловые скобки обозначают симметричную неприводимую часть тензора [3], $S^{(r)}_{l+1/2}(W^2)$ — полиномы Сонина (в (1.4) и далее для краткости записи аргумент $W^2$ опущен).

Функции $\psi_{rl} = \langle V_{\alpha_1}V_{\alpha_2}\ldots V_{\alpha_l}\rangle S^{(r)}_{l+1/2}$ — собственные функции оператора столкновений ($\lambda_{rl}$ — собственные значения) [3]

$$L(\psi_{rl}) = -f^{(0)}\lambda_{rl}\psi_{rl} \tag{1.5}$$

Остальные члены в левой части (1.1) после выполнения операций дифференцирования и (1.3) также можно выразить через собственные функции оператора $L$.

После этого частное решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$\Phi^{(2)} = \sum_{l=0}^{4}\sum_{s}\sum_{r=0}^{\infty} R^{(s)}_{rl}(\mathbf{r}, t)\,\Gamma^{(s)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}\psi_{rl}$$

где $\Gamma^{(s)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ — появляющиеся в левой части (1.1) тензоры ранга $l$, составленные из производных от макроскопических параметров газа. Используя (1.5) и ортогональность полиномов Сонина, обычным путем [3] можно определить неизвестные коэффициенты $R_{rl}{}^{(s)}$.

В результате, для барнеттовской поправки к функции распределения получим следующее выражение:

$$\Phi^{(2)} = \frac{\mu^2}{\rho p}\left\{\frac{4\rho}{3p}e_{\alpha\beta}e_{\beta\alpha}S^{(2)}_{1/2} + \frac{3}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha{}^2}S^{(2)}_{1/2} + \right. \tag{1.6}$$
$$+ \frac{3}{T^2}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\left[\left(\frac{7}{2} + \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)S^{(2)}_{1/2} - 2S^{(3)}_{1/2}\right] -$$
$$\left. - \frac{3}{pT}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial p}{\partial r_\alpha}S^{(2)}_{1/2}\right\} +$$
$$+ V_\alpha\frac{\mu^2}{p^2}\left\{-\frac{3}{2T}\left(\frac{7}{2} - \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\operatorname{div}\mathbf{u}S^{(1)}_{3/2} - \right.$$
$$- \frac{9}{4T}\left(\frac{D_0}{Dt}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right)S^{(1)}_{3/2} -$$
$$- \frac{1}{T}e_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\left[\frac{6}{5}\left(\frac{35}{4} + \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)S^{(1)}_{3/2} - \frac{19}{5}S^{(2)}_{3/2}\right] +$$
$$\left. + \frac{6}{5p}e_{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}S^{(1)}_{3/2} - \frac{6}{5}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta}S^{(1)}_{3/2}\right\} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\langle V_\alpha V_\beta\rangle \frac{\mu^2}{p^2}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{7}{2}-\frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)\frac{\rho}{p}e_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{u}+\right.\\
&+\frac{\rho}{p}\left(\frac{D_0}{Dt}e_{\alpha\beta}-2\frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\alpha}e_{\gamma\beta}\right)+\frac{\rho}{p}e_{\alpha\gamma}e_{\gamma\beta}\left(4-\frac{40}{49}S_{5/2}^{(1)}\right)+\\
&+\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha\partial r_\beta}\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{7}S_{5/2}^{(1)}\right)+\frac{9}{7pT}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}S_{5/2}^{(1)}+\\
&+\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\left[\frac{3}{2}\frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}-\frac{9}{7}\left(2+\frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)S_{5/2}^{(1)}+\right.\\
&\left.\left.+\frac{35}{24}\left(1-\frac{27}{70}\frac{A_4}{A_2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\frac{A_4}{A_2}\right)^{-1}S_{5/2}^{(2)}\right]\right\}+\\
&+\langle V_\alpha V_\beta V_\gamma\rangle\frac{\rho\mu^2}{p^3}\left\{\frac{1}{T}e_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial r_\gamma}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}+\frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)-\right.\right.\\
&\left.\left.-\left(3-\frac{5}{16}\frac{A_4}{A_2}\right)\left(1+\frac{5}{12}\frac{A_4}{A_2}\right)^{-1}S_{7/2}^{(1)}\right]-\frac{2}{3p}e_{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial r_\gamma}+\frac{2}{3}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\gamma}\right\}+\\
&+\langle V_\alpha V_\beta V_\gamma V_\delta\rangle e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}\frac{\rho^2\mu^2}{p^4}\frac{25}{14}\left(1-\frac{7}{15}\frac{A_4}{A_2}\right)\left(1+\frac{5}{6}\frac{A_4}{A_2}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

При этом условия (1.2) выполняются автоматически.

К (1.6) необходимо добавить общее решение однородного уравнения $a_0+\mathbf{a}\mathbf{V}+a_4V^2$. Однако из (1.2) следует, что коэффициенты $a_0$, $\mathbf{a}$, $a_4$ равны нулю. Следовательно, (1.6) — общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2).

Таким образом, $f^{(2)}$ состоит из пяти групп членов, являющихся относительно переменной $\mathbf{V}$ соответственно скаляром, вектором, симметричными неприводимыми тензорами второго, третьего и четвертого рангов.

Приводимые в литературе [4,5] выражения содержат лишь группы членов в виде вектора и тензора второго ранга, которыми только и определяются барнеттовские вклады в тензор напряжений и тепловой поток. Однако дополнительные члены в $f^{(2)}$ будут необходимы, например, при выводе граничных условий для уравнений Барнетта и при вычислении супербарнеттовских вкладов в тензор напряжений и тепловой поток, а также моментов третьего и четвертого порядков функции распределения.

**2. Супербарнеттовские поправки к тензору напряжений и тепловому потоку.** На основе полученной функции распределения $f^{(2)}$ могут быть вычислены $p_{\alpha\beta}^{(3)}$ и $\mathbf{q}^{(3)}$, супербарнеттовские вклады в тензор напряжений и тепловой поток без нахождения функции распределения $f^{(3)}=f^{(0)}\Phi^{(3)}$ аналогично тому, как были получены $p_{\alpha\beta}^{(2)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$ с помощью $f^{(1)}$ [2].

Последовательно используя дополнительное условие на $f^{(3)}$, интегральное уравнение для $B_{\alpha\beta}$ и свойства симметрии интеграла столкновений [2], находим, что

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad & p_{\alpha\beta}^{(3)}=m\int V_\alpha V_\beta f^{(3)}d\mathbf{v}=2kT\int \Phi^{(3)}f^{(0)}\langle W_\alpha W_\beta\rangle d\mathbf{v}=\\
&=kT\int\Phi^{(3)}L(B_{\alpha\beta})\,d\mathbf{v}=kT\int B_{\alpha\beta}L(\Phi^{(3)})\,d\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Исключая $\Phi^{(3)}$ при помощи уравнения, которому она удовлетворяет, получим

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad & p_{\alpha\beta}^{(3)}=-\frac{\mu}{p}\left(\frac{\partial_1}{\partial t}p_{\alpha\beta}^{(1)}+\frac{D_0}{Dt}p_{\alpha\beta}^{(2)}+p_{\alpha\beta}^{(2)}\operatorname{div}\mathbf{u}+\right.\\
&\left.+2\left\langle\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\gamma}p_{\gamma\beta}^{(2)}\right\rangle+\frac{\partial}{\partial r_\gamma}P_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}+\frac{4}{5}\left\langle\frac{\partial q_\alpha^{(2)}}{\partial r_\beta}\right\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Здесь

$$(2.3)\qquad P_{\alpha\beta\gamma}{}^{(2)} = m\int \langle V_\alpha V_\beta V_\gamma\rangle f^{(2)}d\mathbf{v} = \frac{4\mu^2}{\rho}\left[\left\langle \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\gamma}\right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{5}{2} + \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)\frac{1}{T}\left\langle e_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial r_\gamma}\right\rangle - \frac{1}{p}\left\langle e_{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial r_\gamma}\right\rangle\right]$$

— барнеттовское приближение для момента третьего порядка от функции распределения.

Аналогично для теплового потока запишем

$$(2.4)\qquad q_\alpha{}^{(3)} = \frac{m}{2}\int V_\alpha V^2 f^{(3)} d\mathbf{v} = -kT\int \Phi^{(3)} f^{(0)}\left(\frac{5}{2} - W^2\right) V_\alpha d\mathbf{v} =$$
$$= kT\int \Phi^{(3)} L(A_\alpha)\, d\mathbf{v} = kT\int A_\alpha L(\Phi^{(3)})\, d\mathbf{v}$$

Здесь последовательно использованы дополнительное условие на $f^{(3)}$ уравнение, определяющее $A_\alpha$, и свойства симметрии интеграла столкновений. Снова, исключая $\Phi^{(3)}$, получим

$$(2.5)\qquad q_\alpha{}^{(3)} = -\frac{3\mu}{2p}\left[\frac{\partial_1}{\partial t} q_\alpha{}^{(1)} + \frac{D_0}{Dt} q_\alpha{}^{(2)} + \frac{10}{3} q_\alpha{}^{(2)} \operatorname{div}\mathbf{u} + \right.$$
$$+ \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} q_\beta{}^{(2)} + \frac{4}{5} e_{\alpha\beta} q_\beta{}^{(2)} - \frac{5}{2}\frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial r_\beta} p_{\alpha\beta}{}^{(2)} - \frac{1}{\rho} p_{\alpha\beta}{}^{(1)} \frac{\partial}{\partial r_\gamma} \times$$
$$\times p_{\beta\gamma}{}^{(1)} - \frac{1}{\rho} p_{\alpha\beta}{}^{(2)} \frac{\partial p}{\partial r_\beta} + P_{\alpha\beta\gamma}{}^{(2)} e_{\gamma\beta} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(P_{2|\alpha\beta}{}^{(2)} + \frac{1}{3} P_{4|}{}^{(2)}\delta_{\alpha\beta}\right)\right]$$

$$P_{2|\alpha\beta}{}^{(2)} = m\int \langle V_\alpha V_\beta\rangle V^2 f^{(2)} d\mathbf{v} = \frac{p\mu^2}{\rho^2}\left[\frac{28}{3}\left(\frac{7}{2} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)\frac{\rho}{p} e_{\alpha\beta} \operatorname{div}\mathbf{u} + 14\frac{\rho}{p}\left(\frac{D_0}{Dt} e_{\alpha\beta} - 2\left\langle \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\alpha} e_{\gamma\beta}\right\rangle\right) +$$
$$+ \frac{472}{7}\frac{\rho}{p}\langle e_{\alpha\gamma} e_{\gamma\beta}\rangle + \frac{39}{T}\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}\right\rangle - \frac{18}{pT}\left\langle \frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}\right\rangle +$$
$$\left. + 39\left(\frac{12}{13} + \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)\frac{1}{T^2}\left\langle \frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right\rangle\right]$$

$$P_{4|}{}^{(2)} = m\int V^4 f^{(2)} d\mathbf{v} = \frac{p\mu^2}{\rho^2}\left[20\frac{\rho}{p} e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} + \frac{45}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha{}^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{45}{pT}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial p}{\partial r_\alpha} + \frac{45}{T^2}\left(\frac{7}{2} + \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\right]$$

В работе [1] получены высшие приближения для тензора напряжений и теплового потока при помощи метода Максвелла. Полученные в [1] выражения переходят в (2.2), (2.3) и (2.5) при разложении производной $\partial/\partial t$ в ряд по числу Кнудсена Kn (как это принято в методе Чепмена — Энскога) и удержании членов порядка $\mathrm{Kn}^2$. Однако в соответствующих формулах для $P_{2|\alpha\beta}$ и $P_{4|}$ в работе [1] допущены ошибки. Источник ошибок — формула (8.10) [1], правая часть которой, в отличие от приведенного авторами [1] выражения, должна иметь вид

$$-\frac{p}{\rho\mu}\left(\rho P_{4|\alpha} - \frac{28}{3} p h_\alpha + \frac{2}{3} P_{\alpha\beta\gamma} P_{\beta\gamma} + \frac{28}{3} P_{\alpha\beta} h_\beta\right)$$

Отметим также, что в выражениях для $f^{(2)}$, $q_\alpha^{(3)}$, $P_{2|\alpha\beta}^{(2)}$, $P_{4|}^{(2)}$, опубликованных автором в [6], имеются ошибки, которые здесь исправлены.

Автор благодарит В. В. Струминского за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 6 XII 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ikenberry E., Truesdell C.* On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory. I. J. Rational and Mech. Analysis, 1956, vol. 5, No. 1.
2. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. *Вальдман Л.* Явления переноса в газах при среднем давлении. В кн.: Термодинамика газов. М., «Машиностроение», 1970.
4. *Burnett D.* The distribution of molecular velocities and the mean mation in a non-uniform gas. Proc. London Math. Soc., 1935, vol. 40, No. 5, p. 382.
5. *Лунькин Ю. П.* Уравнения пограничного слоя и граничные условия к ним в случае движения в слабо разреженном газе со сверхзвуковыми скоростями. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
6. *Шавалиев М. Ш.* Некоторые результаты по барнеттовскому и супербарнеттовскому приближениям. Тр. 4 Всес. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М., Изд-во ЦАГИ, 1977.