

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ СЛАБО СЖИМАЕМОГО ГАЗА
В ТРУБЕ С МОДЕЛЬНОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ**

Л. Б. Айзин, В. П. Максимов

(Новосибирск)

В линейном приближении рассматривается задача об устойчивости течения слабо сжимаемого газа в шероховатой трубе относительно стоячих волн. Считается, что ламинарный профиль скорости, шероховатость и возмущение скорости аксиально-симметричны. Получено критическое число Рейнольдса как функция среднеквадратичной амплитуды шероховатости.

Для рассматриваемого течения незатухающая стоячая волна при наименьших числах Рейнольдса образуется в результате взаимодействия между конвективно-неустойчивой вихревой волной и звуковой волной, бегущей вверх по потоку [1]. Последнее связано с тем, что остальные бегущие вверх по потоку волны затухают существенно быстрее, чем звуковая волна. Поэтому в данной работе рассматривается взаимодействие между вихревой и звуковой волнами. Чтобы не рассматривать эффектов, связанных с отражением звука от начала трубы, в начальном сечении ставятся граничные условия, обеспечивающие отсутствие или достаточную малость отражения звука. Согласно существующим представлениям, течение Пуазейля конвективно-устойчиво относительно аксиально-симметричных возмущений. Поэтому можно требовать затухания возмущений вниз по потоку.

1. Уравнения, которые будут рассмотрены ниже, должны описывать вихревую и звуковую волны, а также взаимодействие между ними при $M \ll 1$ (M — число Маха). Считая стенку трубы адиабатической, линеаризованные уравнения Навье — Стокса запишем в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}) + \text{rot} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v} + \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}_0 = -\text{grad} P + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{div} \mathbf{v} = -M^2 \partial P / \partial t$$

В качестве масштабов выбраны расходная скорость и средний радиус трубы; \mathbf{v}_0 — стационарное решение уравнения Навье — Стокса. В уравнениях (1.1) опущены члены порядка M^2 / R . В уравнении неразрывности опущен также член $M^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \text{grad} P)$. Это связано с тем, что для звуковой волны $\text{grad} P \sim pMP$, тогда как $\partial P / \partial t \sim pP$ ($P = Pe^{pt}$).

Ищем решение системы (1.1) в виде стоячей волны

$$(1.2) \quad P = Pe^{pt}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}e^{pt}$$

$$(1.3) \quad p\mathbf{v} + \text{grad}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}) + \text{rot} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v} + \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}_0 = -\text{grad} P + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{div} \mathbf{v} = -M^2 pP; \quad \mathbf{v}(X, r(X)) = 0; \quad X \rightarrow \infty, \quad \mathbf{v} \rightarrow 0$$

Здесь X — продольная координата, r — радиальная координата, $r(X)$ — координата стенки трубы, представляющая собой стационарную

случайную функцию с характерными амплитудой a , масштабом Δ и спектральной плотностью

$$(1.4) \quad s(\omega) = \frac{a^2 \Delta}{2} \left(\eta\left(|\omega| - \frac{1}{\Delta}\right) - \eta\left(|\omega| - \frac{2}{\Delta}\right) \right); \quad \eta(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

Однородные граничные условия в начальном сечении трубы, соответствующие отсутствию отражения звука, будут приведены в п. 2.

Устойчивость состояния здесь понимается так же, как в [2]: если для всех p_i , определяемых задачей (1.3), выполняется условие $\operatorname{Re} p_i < 0$, то будем говорить, что ламинарное течение устойчиво.

Задача рассматривается при следующих ограничениях на величины a и Δ :

$$(1.5) \quad |\operatorname{rot} v_0| \Delta^2 / \nu \ll 1, \quad |r'(X)| \ll a / \Delta \ll 1$$

Первое условие означает, что обтекание неровностей стенки вязкое (ν — кинематический коэффициент вязкости, $\operatorname{rot} v_0$, Δ здесь размерны). Второе условие не связано с физическими ограничениями, но позволяет существенно упростить задачу.

2. Можно считать, что уравнение (1.3) записано в координатах

$$\begin{aligned} \theta, \quad x = \varphi(X, r); \quad y = \psi(X, r) \\ (\partial\psi / \partial r = -rv_x, \quad \psi(X, 0) = 1/2, \quad \psi(X, r(\bar{X})) = 0) \end{aligned}$$

Здесь θ — угол, а φ и ψ — потенциал и функция тока соответствующей стационарной задачи для несжимаемой невязкой среды.

Составим вектор $A = \{A^1, A^2, A^3, A^4\}$ следующим образом (h_θ, h_x, h_y — коэффициенты Ламе):

$$h_\theta h_y v_x = A^1, \quad P = A^2, \quad h_\theta h_x v_y = A^3, \quad (1 - 2y) \frac{\partial A^1}{\partial y} - \frac{\partial A^3}{\partial x} = A^4$$

В новых обозначениях задачу (1.3) можно записать в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \partial A / \partial x = LA = HA + H_1 A, \quad H = \lim L, \quad a \rightarrow 0 \\ y = 0, \quad A^1 = A^3 = 0; \quad x \rightarrow \infty, \quad A \rightarrow 0 \\ x = 0, \quad \partial A^i / \partial x - \lambda_3 A^i = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Вид операторов H и H_1 определяется формулами (1.3) и видом A ; λ_3 — волновое число звуковой волны, распространяющейся вверх по потоку.

Решение задачи (2.1) ищется в виде суперпозиции собственных векторов оператора H

$$(2.2) \quad A = \sum c_i A_i, \quad H A_i = \lambda_i A_i; \quad y = 0, \quad A_i^1 = A_i^3 = 0$$

Из (2.1) получим

$$(2.3) \quad \begin{aligned} c_i' - \lambda_i c_i = c_m (H_1 A_m, B_i) / (A_i, B_i) \\ x = 0, \quad c_k = 0; \quad x \rightarrow \infty, \quad c_l \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Индекс k принимает значения, соответствующие волнам, бегущим вниз по потоку, B_i — собственные векторы оператора, сопряженного H .

Следуя [3], будем рассматривать искомое решение задачи как предел решения задачи (2.3) при

$$(2.4) \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = -N, -N + 1, \dots, N, \quad N \rightarrow \infty$$

Задача вида (2.3), (2.4) была рассмотрена в работе [4], результаты которой будем использовать в дальнейшем. Для того чтобы записать уравнение кривой собственных значений задачи (2.3), (2.4), необходимо знать два волновых числа λ_1, λ_3 , для которых на рассматриваемом интервале выполняется условие

$$(2.5) \quad \operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_3) = 0$$

и выражения для коэффициентов связи

$$(2.6) \quad (H_1 A_3, B_1) / (A_1, B_1), \quad (H_1 A_1, B_3) / (A_3, B_3)$$

В данном случае λ_1 — волновое число неустойчивой вихревой волны. Результаты, получаемые в данной задаче при помощи формализма работы [4], верны лишь в случае, когда вихревая и звуковая волны мало различаются в области взаимодействия (на расстояниях порядка Δ от стенки) при $H_1 = 0$ и $H_1 \neq 0$, т. е. волна должна иметь вид

$$(2.7) \quad c_i \exp\left(\int \lambda_i dx\right) (A_i + D_i), \quad D_i^k = \varepsilon f_i^k A_i^k, \quad i = 1, 3$$

Здесь f_i^k — стационарные случайные функции с амплитудой порядка единицы и корреляционным размером порядка Δ . Для $k = 3$ выполнения условия (2.7) не требуется, так как третий столбец оператора H_1 состоит из нулей.

Ограничение на величину ε можно получить из следующих соображений. Стоящее в правой части системы (2.3) выражение запишем в виде

$$(2.8) \quad (H_1 \sum c_m A_m, B_k) / (A_k, B_k), \quad k = 1, 3$$

В случае, когда сумма в (2.8) соответствует рассматриваемой здесь волне, получим (Π_1 — оператор, сопряженный оператору H_1).

$$c_i \exp\left(\int \lambda_i dx\right) [(A_i, \Pi_1 B_k) + (D_i, \Pi_1 B_k)] / (A_k, B_k); \quad i = 1, 3; k = 1, 3$$

Забегаая вперед (см. п. 4), скажем, что амплитуда низкочастотных гармоник в $\Pi_1 B_k$ пропорциональна $a \sqrt{\Delta} a / \Delta$, а высокочастотных — $a \sqrt{\Delta}$. Амплитуда низкочастотных гармоник в $(A_i, \Pi_1 B_k)$ пропорциональна $a \sqrt{\Delta} a / \Delta$, а в $(D_i, \Pi_1 B_k)$ пропорциональна $\varepsilon a \sqrt{\Delta}$. Отсюда следует ограничение

$$(2.9) \quad \varepsilon \ll a / \Delta$$

Средний радиус трубы много больше размеров неровностей стенки, поэтому для отыскания решения вблизи стенки можно рассматривать плоскую задачу, $h_\theta = 1$, $h_x = h_y = h^{-1}$. Уравнение для

$$Q = \int A^1 dy,$$

при условии (1.5) имеет вид

$$Th^2 TQ = 0, \quad T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad y = 0, Q = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0; \quad y \rightarrow \infty, \frac{2Q}{y^2} \rightarrow 1$$

Здесь в $1/\Delta$ раз растянуты координаты, а величина A^4 нормирована на единицу при $y \rightarrow \infty$; y отсчитывается от стенки.

Так как $Th^2 \sim (a^2/\Delta^2)$, то $Q = 1/2 y^2 (1 + o(a^2/\Delta^2))$, $A^1 = y (1 + o(a^2/\Delta^2))$, $A^4 = 1 + o(a^2/\Delta^2)$. Следовательно, условие (2.9) выполнено.

3. Приведем выражения для собственных векторов, входящих в (2.6). Собственные векторы, согласно формулам (2.1), (2.2), рассчитываются для задачи с гладкой стенкой. При их вычислении опускаем производные u по x (u — продольная компонента скорости стационарного решения уравнения Навье — Стокса для трубы с гладкой стенкой). Кроме того, при вычислении A_1, B_1 пренебрегаем сжимаемостью, а при вычислении A_3, B_3 — конвективными членами, так как соответствующие поправки малы, а именно

$$A_1^1 \approx \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad A_1^2 \approx \left(-\frac{p}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial y} - u \frac{\partial}{\partial y} + u' + \frac{1}{\lambda_1 R} \frac{\partial}{\partial y} \left((1-2y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_1^2 \right) \right) \varphi_1$$

$$A_1^3 \approx -\lambda_1 \varphi_1, \quad A_1^4 \approx (1-2y) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \lambda_1^2 \varphi_1$$

$$A_3^1 \approx u_3 \sim M, \quad A_3^2 \approx 1, \quad A_3^3 \sim M^2 \left| \frac{p}{R} \right|^{1/2}, \quad A_3^4 \approx (1-2y) \frac{\partial u_3}{\partial y}$$

Здесь φ_1 — собственная функция вихревой волны, характерный масштаб φ_1 порядка $(u')^{-3/4} R^{-1/4}$, уравнение для φ_1 приведено в работе [5]. Выражение для u_3 приведено в работе [1], характерный масштаб u_3 порядка $|pR|^{-1/2} \sim (u')^{-3/4} R^{-1/4}$; B_1, B_3 определяются из соотношения (Π — оператор, сопряженный оператору H)

$$\bar{\lambda}_i B_i = \Pi B_i; \quad y = 0, \quad B_i^2 = B_i^4 = 0$$

$$B_1^1 \approx \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \frac{\partial}{\partial y} \left((1-2y) \left(\frac{\partial^2 (1-2y)}{\partial y^2} + \bar{\lambda}_1^2 - \bar{p}R \right) \right) \varphi_2, \quad B_1^2 \approx R \frac{\partial (1-2y) \varphi_2}{\partial y}$$

$$B_1^3 \approx \left(\bar{\lambda}_1 R u - \bar{\lambda}_1^2 - \frac{\partial^2 (1-2y)}{\partial y^2} \right) \varphi_2, \quad B_1^4 \approx \bar{\lambda}_1 \varphi_2$$

$$B_3^1 \approx 1, \quad B_3^2 \approx u_3, \quad B_3^3 \sim M \left| \frac{p}{R} \right|^{1/2}, \quad B_3^4 \sim \frac{M^2}{R} \left| \frac{p}{R} \right|^{1/2}$$

φ_2 удовлетворяет уравнению, сопряженному к уравнению для φ_1 .

4. Из вида шероховатости (1.4), условий (1.5) и свойств собственных векторов, указанных в п. 3, следует, что при вычислении H_1 можно пренебречь конвективными членами. Записав уравнение (1.3) в криволинейных координатах (см. п. 2) и положив $h_\theta = 1$, $h_x = h_y = h^{-1}$ ($\Delta \ll 1$), получим

$$(4.1) \quad H_1 = \begin{vmatrix} 0 & M^2 p (1-h^{-2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} (h^2 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R (1-h^{-2}) \frac{\partial}{\partial y} & 0 & (h^{-2} - 1) \frac{\partial}{\partial x} (h^2 - 1) \end{vmatrix}$$

Используя формулы п. 3, формулу (4.1) и опуская малые члены, выражения (2.6) запишем в виде

$$(4.2) \quad (H_1 A_3, B_1) / (A_1, B_1) \approx MW_1 F, \quad W_1 = \sqrt{-ipR} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_2}{\partial y^2} \Big|_{y=0} / (A_1 B_1)$$

$$(H_1 A_1, B_3) / (A_3, B_3) \approx W_2 F, \quad W_2 = \sqrt{\frac{ip}{R}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, \quad F = \int_0^\infty (h^2 - 1) dy$$

Здесь $F(x)$ — стационарный случайный процесс. Выразим I — интенсивность этого процесса через характеристики шероховатости. Так как $\Delta \ll 1$, для вычисления F рассматриваем плоскую задачу, которая совпадает с задачей определения потенциала над проводящей шероховатой поверхностью. Решение задачи ищем в виде ряда по малому отношению a / Δ с точностью до первого члена включительно ($f(\alpha)$ — образ Фурье $r(X)$)

$$(4.3) \quad 1 - r \approx y + y_1, \quad y_1 = \int f(\alpha) \exp(i\alpha x - |\alpha| y) d\alpha$$

$$X \approx x + x_1, \quad x_1 = \int f(\alpha) \operatorname{sign}(\alpha) \exp(i\alpha x - |\alpha| y) d\alpha$$

$$h^2 - 1 = \left(\left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right)^{-1} \approx -2 \frac{\partial y_1}{\partial y} + 3 \left(\frac{\partial y_1}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial y} \right)^2$$

Используя формулы (1.4), (4.3), получим

$$(4.4) \quad I \approx 25 \int_0^\infty s^2(\omega) \omega^2 d\omega \approx 15a^3 \frac{a}{\Delta}$$

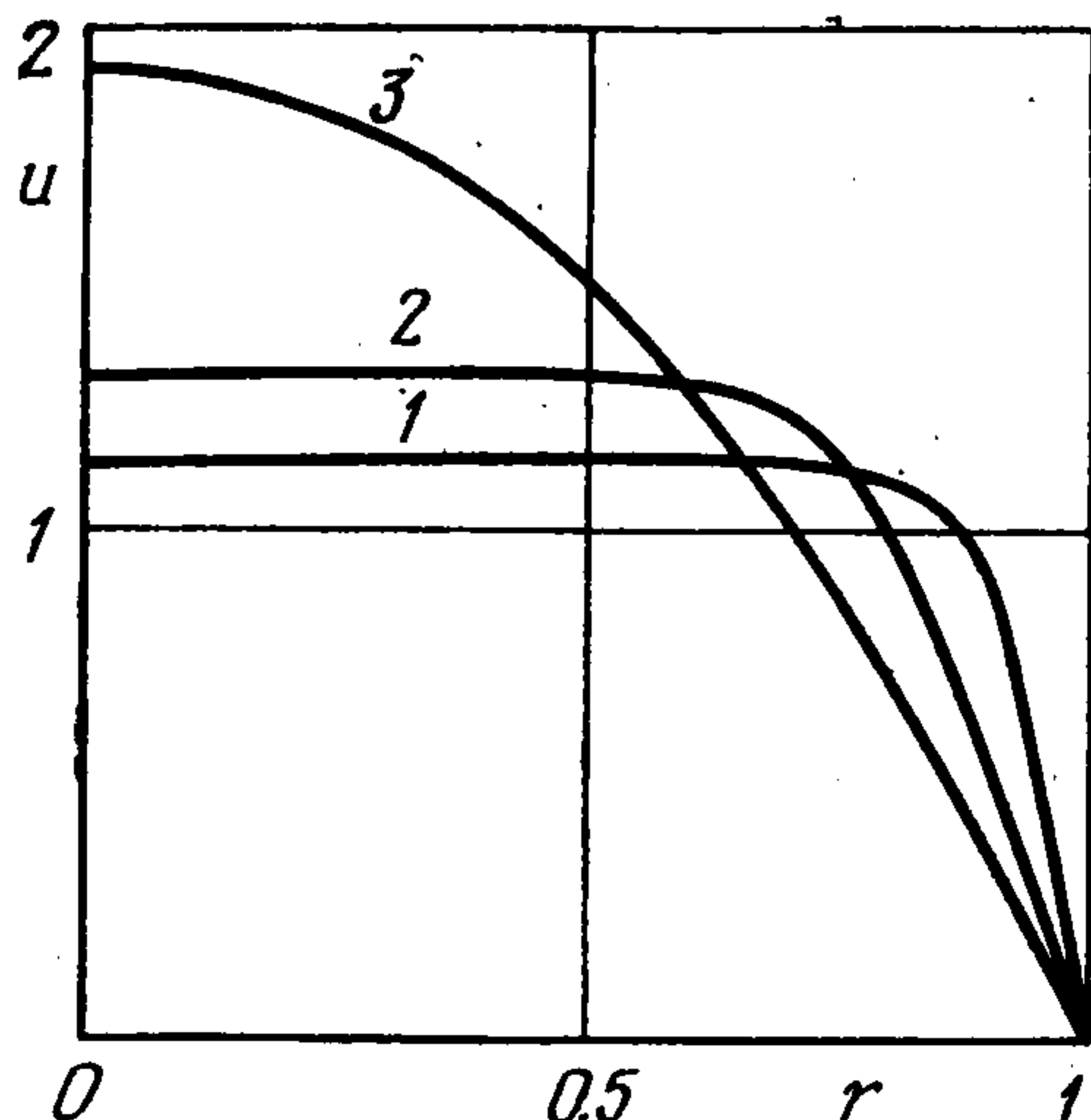
5. Используя выражение (4.2) для коэффициентов связи (2.5), выпишем, следуя [4], уравнение кривой собственных значений задачи (2.3), (2.4). Согласно сказанному в п. 2, эта задача и задача (1.3) в определенном смысле эквивалентны.

Уравнение кривой собственных значений имеет вид

$$(5.1) \quad M^2 I^2 d^2 = 1, \quad d = \exp \left(\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 dx \right) |W_1(x_1)| |W_2(x_2)| \left(\frac{\partial \lambda_r}{\partial x} \Big|_{x_1} \frac{\partial \lambda_r}{\partial x} \Big|_{x_2} \right)^{-1/2}$$

$$\lambda_r(x_1) = \lambda_r(x_2) = 0, \quad x_2 > x_1, \quad \lambda_r = \operatorname{Re} \lambda_1$$

Уравнение (5.1) решали численно на ЭВМ. При фиксированных R и p вычисляли d , затем при фиксированном R вычисляли $b = \max_p d^2$ ($\operatorname{Re} p = 0$).



Теперь, задавая M и I , можно найти критическое число Рейнольдса R_* . Величины λ_1 и φ_1 определяли из решения линейной спектральной задачи, вид которой приведен в работе [5]. За основу численной схемы для этой задачи взята программа работы [6].

Профиль скорости во входном участке трубы рассчитывали из уравнения типа пограничного слоя, вид которого приведен в [5]. Использована численная схема работы [7]. В качестве начального профиля

($z = X / R = 0$) брали решение Блазиуса. Полученные профили скорости показаны на фигуре для $z = 16 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-3}$, $15 \cdot 10^{-2}$ (кривые 1, 2, 3 соответственно).

Величина b рассчитана в интервале $10 > 10^{-4}R > 3$. В результате вычислений получена зависимость, допускающая простую аналитическую аппроксимацию $\frac{1}{2} \lg b = 2 + 10^{-4}R$, погрешность которой в расчетном интервале не превышает 3%.

Отсюда, используя (4.4), получим

$$R_* = [-3.2 - \lg M - 3 \lg a - \lg(a / \Delta)] \cdot 10^4$$

Полученный результат справедлив в области выполнения условия (1.5), которое, огрубляя, можно записать в виде $R_* \Delta^2 < 1$.

Авторы признательны А. Г. Володину за ряд ценных советов по численному решению задачи и Б. П. Колобову за ряд замечаний по работе.

Поступила 5 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г. Об устойчивости течений слабо сжимаемой жидкости в плоской трубе большой, но конечной длины. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
2. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. Куликовский А. Г. Об устойчивости течения Пуазейля и некоторых других плоскопараллельных течений в плоской трубе большой, но конечной длины при больших числах Рейнольдса. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
4. Айзин Л. Б. Об устойчивости слабонеоднородных состояний с малой добавкой типа белого шума. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
5. Tatsumi T. Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of poiseuille regime. J. Phys. Soc. Japan, 1952, vol. 7, No. 5.
6. Левченко В. Я., Володин А. Г., Гапонов С. А. Характеристики устойчивости пограничных слоев. Новосибирск, «Наука», 1975.
7. Loer S. Eine numerische Methode zur Lösung der Navier — Stokessehen Gleichungen für die Zweidimensionale, inkompressible, stationäre Strömung längs einer dünnen Platte. Ingr-Arch., 1971, Bd 41, Nr 1.